Isabelle Gallagher

Université Paris-Diderot (Paris 7),
UFR de Mathématiques,
175 rue du Chevaleret,
75013 Paris, France.

Née le 27 octobre 1973 à Cagnes sur mer (06), France
Mariée, trois enfants (nés en 1999, 2001 et 2005)
Nationalité française

tél : (+33) (0)1 57 27 92 93 ; fax : (+33) (0)1 44 27 25 55
courrier électronique : `Isabelle.Gallagher@math.jussieu.fr`
page personnelle : `http://www.math.jussieu.fr/~gallagher`

Notice scientifique

Table des matières

1 Curriculum Vitae

Situation actuelle : **Professeur** en Mathématiques (Section 25) à l'**Université Paris-Diderot (Paris 7)** (depuis 2004 ; Professeur de **première classe** depuis 2008).

2011-2012 : **Délégation d'un an au CNRS**, affectation au Laboratoire Poncelet, Moscou.

2011 : Séjour de six mois au **Laboratoire Poncelet, Moscou**.

2009 - 2014 : Membre junior de l'**Institut Universitaire de France** (interruption en 2011-2012 pour délégation CNRS).

2008 : **Prix** Paul Doistau-Émile Blutet de l'Académie des Sciences.

2006 : **Prix** de la Jeune Scientifique Parisienne (avec L. Saint-Raymond).

2004 - : **Professeur** à l'**Université Paris-Diderot (Paris 7)**.

2003 - 2009 : **Professeur chargée de cours** d'exercice incomplet à l'**École polytechnique**.

2002 : **Habilitation** à diriger des recherches de l'Université Paris-Sud
Sujet : *Étude mathématique d'équations des ondes et de la mécanique des fluides.*

2001 - 2004 : **Chargée de Recherches au CNRS de 1ère classe** au Centre de Mathématiques de l'École polytechnique.

1998 - 2001 : **Chargée de Recherches au CNRS de 2ème classe** au Département de Mathématiques de l'Université Paris-Sud.

1996 - 1998 : **Thèse** au Laboratoire d'Analyse Numérique de Paris 6 (dir. J.-Y. Chemin)
Sujet : *Étude mathématique de quelques problèmes en mécanique des fluides.*

1995 - 1996 : **DEA** au Laboratoire d'Analyse Numérique de Paris 6.

1995 : **Stage** de 3 mois au département de **météorologie** de Florida State University, USA.

1993 - 1995 : Études à l'**École polytechnique**.

1992 : **Service National**.

1990 - 1992 : **Classes Préparatoires** scientifiques au Lycée Masséna, Nice.

1990 : **Baccalauréat C**, Lycée Renoir, Cagnes-sur-mer.

2 Activités d'enseignement et d'encadrement

2.1 Enseignement

2.1.1 Enseignement à Paris 7

2010 - 2011 : **M2** Paris 7 (*Théorie des équations d'évolution*, Cours magistral)
24 heures de cours.

2009 - 2010 : **M1** Paris 7 (*Analyse Réelle*, Cours magistral)
26 heures de cours.

M2 Paris 7 (*Théorie des équations d'évolution*, Cours magistral)
48 heures de cours.
Agrégation Paris 7.
Environ 20 heures de préparation à l'oral et séances d'exercices.

<u>2008 - 2009</u> : **L2** Paris 7 (*Mathématiques pour la Physique*, Cours magistral)
26 heures de cours.
M1 Paris 7 (*Analyse Réelle*, Cours magistral)
26 heures de cours.
M2 Paris 7 (*Théorie des équations de Navier-Stokes*, Cours magistral)
48 heures de cours.

<u>2007 - 2008</u> : **L2** Paris 7 (*Mathématiques pour la Physique*, Cours magistral)
26 heures de cours.
L3 Paris 7 Math-Info (*Analyse*, Cours magistral)
48 heures de cours.
M1 Paris 7 (*Analyse Réelle*, Cours magistral et Travaux Dirigés)
12 heures de cours et 18 heures de Travaux Dirigés.

<u>2006 - 2007</u> : **L2** Paris 7 (*Mathématiques pour la Physique*, Cours magistral et Travaux Dirigés)
24 heures de cours et 36 heures de TD.
L3 Math-Info Paris 7 (*Analyse*)
48 heures de cours.

<u>2005 - 2006</u> : **M2** Paris 7 (*Équations d'évolution non linéaires*)
24 heures de cours.

<u>2004 - 2005</u> : **DEUG Première année** Paris 7 (*Analyse et Algèbre élémentaires I*)
42 heures de cours.
Licence Paris 7 (*Équations Différentielles*, cours et Travaux Dirigés)
26 heures de cours, 42 heures de TD.

2.1.2 Autres activités d'enseignement

<u>2004</u> : **DEA** Paris 6 (*Introduction à l'étude mathématique des fluides géophysiques*)
24 heures de cours.
Mini-cours (*Navier-Stokes equations and geophysical fluids*),
12 heures, Chinese Academy of Sciences, Pékin.

<u>2003 - 2009</u> : Enseignement à **l'École polytechnique** :
- TD de *Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques*
- TD d'*Intégration et Analyse Hilbertienne*
- TD d'*Éléments d'Analyse et d'Algèbre*
- Cours et TD de Majeure *Analyse Nonlinéaire*
- À partir de 2007 : cours magistral d'*Analyse de Fourier et Théorie spectrale.*

<u>1999 - 2001</u> : Petites classes à l'École Nationale Supérieure des **Mines de Paris** (24 heures par an) :

- TD d'*Intégration*
- TD d'*Équations différentielles.*

<u>1998</u> : Cours de **DEA** (*Théorie de Littlewood–Paley et Équations de Navier–Stokes*)
24 heures, Faculté des Sciences de Tunis.
TD de **DEUG** (*Algèbre et Analyse élémentaires*)
24 heures, Faculté des Sciences de Tunis.

2.2 Encadrement

<u>2009 -</u> : Co-encadrement (avec J.-Y. Chemin) de la **thèse** de **C. Mullaert**, *Étude mathématique des équations de Saint-Venant et de Navier-Stokes*, soutenue le 17 décembre 2011 à l'Université Pierre-et-Marie-Curie (Paris 6).

<u>2009 -</u> : Encadrement de la **thèse** de **A. Yotopoulos**, *Résolution des équations de Navier-Stokes pour de grandes données initiales.*

<u>2008</u> : encadrement du **stage d'option** de l'école polytechnique de **P. Pasquier de Franclieu**. Ce stage a reçu le **Grand Prix du Stage de Recherche** de l'École polytechnique.

<u>2008</u> : encadrement du **mémoire de M2** de Paris 7 de **J.-P. Daniel**.

<u>2008 -</u> : encadrement de la **thèse** de **R. Thai**, *Sur les équations de Navier-Stokes à surface libre.*

<u>2007</u> : encadrement du **mémoire de M2** de Paris 7 de **R. Thai**.

<u>2006</u> : encadrement de six mois de **stage post-doctoral** d'A. Rekalo.

<u>2003-2005</u> : encadrement de la **thèse** de **P. Germain** (Assistant Professor, Courant Institute), *Solutions fortes, solutions faibles d'équations aux dérivées partielles d'évolution*, soutenue le 13 décembre 2005 à l'École polytechnique. Cette thèse a reçu le **Prix de thèse** de l'École polytechnique en 2006 et a donné lieu aux publications suivantes :

- Equations de Navier-Stokes en deux dimensions : existence et comportement asymptotique de solutions d'énergie infinie, *Bull. Sci. Math.* 130 (2006), no. 2, 123–151.
- Multipliers, Paramultipliers, and weak-strong uniqueness for the Navier-Stokes equations, *J. Differential Equations* 226 (2006), no. 2, 373–428
- Global infinite energy solutions of the critical semilinear wave equation, *Revista Mathematica Iberoamericana* 24 (2008), no. 2, 463–497.

<u>2001-2004</u> : encadrement de la **thèse** de **F. Charve** (Maître de Conférences à Paris 12), *Étude de phénomènes dispersifs en mécanique des fluides géophysiques*, soutenue le 8 décembre 2004 à l'École polytechnique. Cette thèse a donné lieu aux publications suivantes :
- Global well-posedness and asymptotics for a geophysical fluid system, *Communications in Partial Differential Equations*, 29 (2004), 1919-1940.
- Convergence of weak solutions for the primitive system of the quasigeostrophic equations, *Asymptotic Analysis* 42 (2005), 173-209.
-Asymptotics and vortex patches for the quasigeostrophic approximation, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 85 (2006), 493-539.

<u>1999-2002</u> : Co-encadrement (avec J.-Y. Chemin) de la **thèse** de **M. Paicu** (Maître de Confé-

rences à Paris 11, puis professeur à l'Université de Bordeaux), *Équations des fluides tournants périodiques anisotropes*, soutenue le 18 décembre 2002 à l'École polytechnique. Cette thèse a donné lieu aux publications suivantes :
- Étude asymptotique pour les fluides anisotropes en rotation rapide dans le cas périodique, *J. Math. Pures Appl.* (9) 83 (2004), no. 2, 163–242.
- Équation periodique de Navier-Stokes sans viscosité dans une direction *Comm. Partial Differential Equations* 30 (2005), no. 7-9, 1107–1140.
- Équation anisotrope de Navier-Stokes dans des espaces critiques, *Rev. Mat. Iberoamericana* 21 (2005), no. 1, 179–235.

3 Activités administratives et animation de la recherche

3.1 Responsabilités actuelles

2012 - : Membre du **Conseil Scientifique** de l'*Erwin Schrödinger Institute* de Vienne.

2011 - : **Co-rédactrice en chef**, avec François Loeser, du *Journal de l'Institut de Mathématiques de Jussieu.*
- Membre du **Projet Émergences** de la Mairie de Paris, *Instabilités hydrodynamiques.*
- Membre élue au **CNU**, Section 25.
- Membre du **Research Group** «Phase Space Analysis of PDEs» du *Centro di Ricerca Matematica Ennio di Giorgi.*

2010 - : Membre du **Comité de Rédaction** des *Annales Scientifiques de l'ENS Paris.*

2009 - : Membre du **Conseil Scientifique** du GdR «Analyse des EDPs» .

2008 - : Membre du **programme blanc** «Math Océan» de l'ANR.
- Membre du Conseil Scientifique du **«Paris-London Analysis Seminar»**.

2005 - : Membre du **Comité de Rédaction** de *Panoramas et Synthèses.*

2004 - : Membre de la **Commission des Thèses** de l'UFR de Mathématiques, Paris 7.

3.2 Autres responsabilités

2010 : Membre de la **Commission de répartition des services** de l'UFR de Mathématiques de Paris 7.
- Membre de **comités de sélection** à Paris 6, Paris 7, Paris 13.

2008 - 2010 : Membre élue du **Conseil Scientifique** de l'UFR de Mathématiques de Paris 7.

2007 - 2010 : Membre élue du **Conseil d'UFR** de Mathématiques de Paris 7.

2009 : Membre de **comités de sélection** à Paris 6 et Paris 7.

2005 - 2010 : Membre du **Bureau d'UFR** de Mathématiques de Paris 7.

2006 - 2009 : Responsable de la **Licence Mathématiques et Applications**, Paris 7
- Responsable de la filière «Mathématiques Fondamentales» en **L3**, Paris 7
- Membre du **Conseil d'UFR** 929, Paris 6.

2005 - 2009 : Membre du **programme blanc** «Singularités et Comportement Asymptotique des Solutions d'Euler et de Navier-Stokes» (SCASEN) de l'ANR.

2006 - 2008 : Membre élue de la **commission de spécialistes** de l'UFR de Mathématiques de Paris 7 (Section 25).

2005 - 2008 : Présidente de la **Commission de Pédagogie** de l'UFR de Mathématiques de Paris 7.

2003 : Coorganisatrice (avec A. de Bouard) d'une **session du GdR** «Équations d'amplitude et propriétés qualitatives» au CIRM à Luminy.

2002 - 2006 : Membre du **Comité de Département** du Centre de Mathématiques de l'École polytechnique.

2002 - 2005 : Membre du comité d'organisation du **congrès annuel d'Équations aux Dérivées Partielles** de Forges–les–Eaux.

2002 - 2004 : Coorganisatrice (avec G. Allaire et B. Charron–Bost) du **Colloquium** mensuel des centres de mathématiques (pures et appliquées) et de calcul formel de l'École polytechnique.
- Coorganisatrice (avec Y. Martel) du **Groupe de Travail** d'Analyse du Centre de Mathématiques de l'École polytechnique.
- Membre de la **Commission des Thèses** de l'École polytechnique.

2001 - 2004 : Membre suppléante des **commissions de spécialistes** des départements de Mathématiques de l'université de Cergy–Pontoise et de l'université Paris 6 (section 25).

1997 - 1998 : Coorganisatrice (avec J. Matos) d'un **Groupe de Travail des Thésards** au Laboratoire d'Analyse Numérique de Paris 6.

3.3 Vulgarisation

Participation annuelle à la «Fête de la Science» dans des groupes scolaires parisiens.

2010 : **Mini-cours** pour les Journées X-UPS, avec J.-Y. Chemin et D. Gérard-Varet sur les équations de Navier-Stokes.
- **Colloquium**, Grenoble.
- **Colloquium**, Marseille.

2009 : Conférence au **Maths Club** de l'Université Paris 7.
- **Colloquium**, Strasbourg.
- **Conférence publique** lors de la Fête de la Science à l'Université Paris 7, sur le thème «Autour des problèmes du Millénaire, les équations de Navier-Stokes».

2008 : **rencontres avec des élèves** de Terminale Scientifique au Lycée Lavoisier (Paris), au Lycée de Sartrouville, et au Collège Picasso de Montesson.

- participation à une **table ronde** à la Bibliothèque Publique d'Information du **Centre Pompidou**, sur le thème «Mathématiques et imagination» (avec J.-P. Kahane et B. Rittaud).
- **Conférence publique** lors de la Fête de la Science à l'Université Paris 7, sur le thème «Mathématiques et océanographie».

2007 : **exposé préparatoire**, devant des **lycéens** du Lycée Technique Condorcet d'Aubervilliers, à la Conférence de J.-Y. Chemin à la BNF dans le cadre du cycle «Un texte, un mathématicien»

2006 : **rencontre**, au Ministère de la Recherche, avec des **lycéens** de Garches-les-Gonesses dans le cadre du **«Prix de la Jeune Scientifique Parisienne»** (obtenu conjointement avec L. Saint-Raymond en 2006).

4 Conférences internationales

(ne sont pas indiqués les séminaires dans des universités françaises)

1998 : Collège de France, Paris.

- 7th International Conference on Hyperbolic Problems, Zürich, Suisse.
- Colloque annuel de la Société Mathématique Tunisienne, Medhia, Tunisie.
- Congrès EDP de Saint-Jean-de-Monts.
- Colloque Navier–Stokes et Analyse Microlocale, Luminy.

1999 : Colloque Mesures de Wigner, théorie cinétique et ondes de Bloch, Luminy.

2000 : Séminaire EDP, École polytechnique.

2001 : Colloque Franco–Tunisien, la Marsa, Tunisie.

- Congrès AMS-SMF, École Normale Supérieure, Lyon.

2002 : Colloque du GDR EAPQ, Luminy.

- Congrès EDP de Forges–les–Eaux.
- Colloque en l'honneur de J.-L. Joly, Bordeaux.
- Vidéoséminaire Paris Nord – Berkeley, Paris Nord.
- Séminaire EDP, École polytechnique.

2003 : Colloquium, Heriot Watt, Edinburgh, Écosse.

- Journée «Mécanique des Fluides», Université de Lille.
- Colloque «Phase space analysis of PDEs», Bertinoro, Italie.
- Séminaire Bourbaki, Paris.

2004 : Collège de France, Paris.

- Conférence du réseau HYKE, session «Geophysical Flows», Paris.
- Mini-cours, Chinese Academy of Sciences, Beijing, Chine.
- Conférence «Deterministic and stochastic Navier-Stokes equations», Palo Alto, USA.

2005 : Ecole d'été «Dynamique des équations aux dérivées partielles non linéaires», Grenoble.

2006 : Ninth Rivière-Fabes Symposium for Analysis and PDE, Minnesota, USA.

- Colloque «Mathematical Hydrodynamics», Institut Steklov, Moscou, Russie.
- Colloque «Asymptotic Behavior in Fluid Mechanics», Lausanne, Suisse.
- Colloque «Microlocal Analysis and Applications to PDEs», Pise, Italie.
- Colloque «Phase space analysis», Bertinoro, Italie.

2007 : Séminaire d'Analyse, Warwick University, Royaume-Uni.

- Tenth Paseky School in Fluid Dynamics, République Tchèque.
- Colloque «Analysis and control of partial differential equations», Pont-à-Mousson.
- Colloque «Phase space analysis», Sienne, Italie.

2008 : Séminaire à l'Université de Bonn, Allemagne.

- «Conférence Franco-Taiwanaise sur les EDP non linéaires», Luminy.
- Séminaire, Oxford Center for Nonlinear PDEs, Oxford, Royaume-Uni.
- Paris-London Analysis Seminar, Londres, Royaume-Uni.
- Indo-French Conference in Mathematics, Chennai, Inde.

2009 : Workshop on the mathematics of weather and climate prediction, Exeter, Royaume-Uni.

- Mathematical Aspects of Hydrodynamics, Oberwohlfach, Allemagne.
- Séminaire, Universidad del Pais Vasco, Bilbao, Espagne.
- SIAM conference on PDE, Miami, Floride, USA.

2010 : «Linear and nonlinear hyperbolic equations», Pise, Italie.

- International Congress in Mathematical Fluid Dynamics and its Applications, Rennes.
- Partial Differential Equations and Fluid Mechanics, Warwick, Royaume-Uni.
- ICM satellite conference in Partial differential equation and related topics, Bangalore, Inde.

2011 : Séminaire Vishik, Moscow State University, Russie.

- Journées de Metz.
- 23d Petrovskii Conference, Moscou, Russie.
- Mini-cours, Chinese Academy of Sciences, Beijing, Chine.
- «Perspectives in Phase Space Analysis of Partial Differential Equations», Bertinoro, Italie.

2012 : Conférence invitée à l'European Congress of Mathematics, Krakow, Pologne.

- Spring School «Kinetic Theory and Fluid Mechanics», Lyon.
- Conférence plénière, «International Conference on Nonlinear PDEs», Oxford, Royaume-Uni.

5 Liste de publications

5.1 Livres, chapitres de livres

[L1] Mathematical Geophysics : An introduction to rotating fluids and to the Navier-Stokes equations, (en collaboration avec J.-Y. Chemin, B. Desjardins et E. Grenier), Oxford University Press, 2006, xii+250 pages.

[L2] On the influence of the Earth's rotation on geophysical flows (en collaboration avec L. Saint-Raymond) : *Handbook of Mathematical Fluid Dynamics*, S. Friedlander and D. Serre Editors Vol 4, Chapter 5, 201-329, 2007.

[L3] Mathematical study of the betaplane model : equatorial waves and convergence results (en collaboration avec L. Saint-Raymond) : *Mémoires de la Société Mathématique de France* **107**, 2006, vi+116 pages.

[L4] Phase-space analysis and pseudodifferential calculus on the Heisenberg group (en collaboration avec H. Bahouri et C. Fermanian-Kammerer) : accepté pour publication, *Astérisque*.

5.2 Articles parus ou acceptés

<u>Revues à comité de lecture</u>

[A1] The tridimensional Navier–Stokes equations with almost bidimensional data : stability, uniqueness and life span, *International Mathematics Research Notices*, **18** (1997), pages 919–935.

[A2] Asymptotics of the solutions of hyperbolic equations with a skew–symmetric perturbation, *Journal of Differential Equations*, **150** (1998), pages 363–384.

[A3] Applications of Schochet's methods to parabolic equations, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **77** (1998), pages 989–1054.

[A4] A Remark on smooth solutions of the weakly compressible Navier–Stokes equations, *Journal of Mathematics of Kyoto University*, **40** (2000), 3, pages 525–5403.

[A5] Fluids with anisotropic viscosity (en collaboration avec J.-Y. Chemin, B. Desjardins et E. Grenier) : *Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, **34** (2000), pages 315–335.

[A6] Profile decomposition for the wave equation outside a convex obstacle (en collaboration avec P. Gérard) : *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **80** (2001), 1, pages 1–49.

[A7] Paraproduit sur le groupe de Heisenberg et applications (en collaboration avec H. Bahouri) : *Revista Matematica Iberoamericana*, **17** (2001), pages 69–105.

[A8] Existence et unicité de solutions pour le système de Navier–Stokes axisymétrique (en collaboration avec S. Ibrahim et M. Majdoub) : *Comunications in Partial and Differential Equations*, **26** (2001), pages 883–907. (*Erratum* **27** (2002), pages 2527–2529).

[A9] Profile decomposition for the Navier–Stokes equations, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **129** (2001), pages 285–316.

[A10] Mathematical analysis of a structure–preserving approximation of the bidimensional vorticity equation, *Numerisch. Math.*, **91** (2002), pages 223–236.

[A11] Ekman boundary layers in rotating fluids (en collaboration avec J.-Y. Chemin, B. Desjardins et E. Grenier) : *ESAIM Contrôle Optimal et Calcul des Variations*, A tribute to J.-L. Lions, **8** (2002), pages 441–466 (version électronique : `http://www.emath.fr/cocv/`).

[A12] On global infinite energy solutions to the Navier–Stokes equations in two dimensions (en collaboration avec F. Planchon) : *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **161** (2002), pages 307–337.

[A13] On global solutions to a defocusing semi-linear wave equation (en collaboration avec F. Planchon) : *Revista Matematica Iberoamericana*, **19** (2003), pages 161–177.

[A14] Stability and weak–strong uniqueness for axisymmetric solutions of the Navier–Stokes equations, *Differential and Integral Equations*, **16** (2003), 5, pages 557–572.

[A15] On the role of quadratic oscillations in nonlinear Schrödinger equations (en collaboration avec R. Carles et C. Fermanian) : *Journal of Functional Analysis*, **203** (2003), pages 453–493.

[A16] Asymptotics and stability for global solutions to the Navier–Stokes equations (en collaboration avec D. Iftimie et F. Planchon) : *Annales de l'Institut Fourier*, **53**, 5 (2003), pages 1387–1424.

[A17] On pressureless gases driven by a strong inhomogeneous magnetic field (en collaboration avec L. Saint-Raymond) : *SIAM Journal for Mathematical Analysis*, **36** (2005), no. 4, 1159–1176.

[A18] Uniqueness of solutions of the Navier-Stokes equation in $\mathbf{R}^2$ with measure-valued initial vorticity (en collaboration avec T. Gallay) : *Mathematische Annalen*, **332** (2005), 287–327.

[A19] On the uniqueness of the solution of the two-dimensional Navier-Stokes equation with a Dirac mass as initial vorticity (en collaboration avec T. Gallay et P.-L. Lions) : *Math. Nachrichten*, **278** (2005), 1665-1672.

[A20] Weak convergence results for inhomogeneous rotating fluid equations (en collaboration avec L. Saint-Raymond) : *Journal d'Analyse Mathématique*, **99** (2006), 1-34.

[A21] Refined Hardy inequalities (en collaboration avec H. Bahouri et J.-Y. Chemin) : *Annali della Scuola Normale di Pisa* Vol V (2006), 375-391.

[A22] On the global wellposedness of the 3-D Navier-Stokes equations with large initial data (en collaboration avec J.-Y. Chemin) : *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure de Paris*, **39** (2006), 679-698.

[A23] A mathematical review of the analysis of the betaplane model and equatorial waves, *Discrete and Continuous Dynamical Systems* Series S, **1**, 3 (2008), pages 461–480.

[A24] Wellposedness and stability results for the Navier-Stokes equations in $\mathbf{R}^3$ (en collaboration avec J.-Y. Chemin) : *Annales de l'Institut H. Poincaré, Analyse non linéaire*, **26** (2009), no. 2, 599–624.

[A25] Analyticity of the scattering operator for semilinear dispersive equations (en collaboration avec R. Carles) : *Communications in Mathematical Physics* **286** (2009), 3 1181-1209.

[A26] Spectral asymptotics for large skew-symmetric perturbations of the harmonic oscillator (en collaboration avec Th. Gallay et F. Nier) : *International Mathematics Research Notices* **2009** (2009), 2147-2199.

[A27] Remarks on the blow-up of solutions to a toy model for the Navier-Stokes equations (en collaboration avec M. Paicu) : *Proceedings of the American Mathematical Society* **137** (2009), no. 6, 2075–2083.

[A28] Heat kernel on the Heisenberg group $\mathbf{H}^d$ (en collaboration avec H. Bahouri) : Advances in Phase Space Analysis of Partial Differential Equations, Antonio Bove, Daniele Del Santo, and M. K. Venkatesha Murthy Editors, Birkhauser «Progress in nonlinear differential equations and their applications», **78** (2009), pages 17–35.

[A29] Large, global solutions to the Navier-Stokes equations slowly varying in one direction (en collaboration avec J.-Y. Chemin) : *Transactions of the American Mathematical Society* **362** (2010), no. 6, 2859–2873.

[A30] Global regularity for some classes of large solutions to the Navier-Stokes equations (en collaboration avec J.-Y. Chemin et M. Paicu) : *Annals of Mathematics* **173** (2011), no. 2, 983–1012.

[A31] (en collaboration avec E. Feireisl et A. Novotny) : A singular limit for compressible rotating fluids, *SIAM Journal for Mathematical Analysis* **44** (2012), 192–205.

[A32] On large perturbations to global solutions of the 3-D incompressible Navier-Stokes equations (en collaboration avec J.-Y. Chemin et P. Zhang), accepté après révision dans *Journal für die reine und angewandte Mathematik.*

[A33] Semiclassical and spectral analysis of oceanic waves (en collaboration avec Ch. Cheverry, Th. Paul et L. Saint-Raymond), accepté dans *Duke Mathematical Journal.*

[A34] (en collaboration avec Th. Paul et L. Saint-Raymond) : On the propagation of oceanic waves driven by a strong macroscopic flow, accepté après révision dans *Abel Symposia Series.*

Notes aux Comptes–Rendus

[N1] Un résultat de stabilité pour les solutions faibles des équations des fluides tournants, *Notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **324**, Série I, pages 183-186, 1997.

[N2] Existence globale pour des équations des fluides géostrophiques, *Notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **325**, Série I, pages 623–626, 1997.

[N3] Anisotropie et dispersion dans les fluides tournants (en collaboration avec J.-Y. Chemin, B. Desjardins et E. Grenier) : *Notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **329**, Série I, pages 1055–1058, 1999.

[N4] Solutions axisymétriques des équations de Navier–Stokes (en collaboration avec S. Ibrahim et M. Majdoub) : *Notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **330**, Série I, pages 791–794, 2000.

[N5] Estimations a priori et Lipschitz pour le groupe d'évolution des équations de Navier–Stokes, *Notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **331**, Série I, pages 675–678, 2000.

[N6] Non explosion en temps grand et stabilité de solutions globales des équations de Navier–Stokes (en collaboration avec D. Iftimie et F. Planchon) : *Notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **334**, Série I, pages 289–292, 2002.

[N7] Weak convergence results for inhomogeneous rotating fluid equations (en collaboration avec L. Saint-Raymond) : *Notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **336**, Série I, pages 401–406, 2003.

[N8] Inégalités de Hardy précisées (en collaboration avec H. Bahouri et J.-Y. Chemin) : *Notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **341** (2005), no. 2, pages 89–92.

[N9] Trapping Rossby waves (en collaboration avec Ch. Cheverry, Th. Paul et L. Saint-Raymond) : *Notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **347** (2009), no. 2, pages 879–884.

[N10] Analyse de l'espace des phases et calcul pseudo-differentiel sur le groupe de Heisenberg (en collaboration avec H. Bahouri et C. Fermanian-Kammerer) : *Notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **347** (2009), pages 1021–1024.

Actes de colloques

[C1] Perturbation antisymétrique et oscillations dans des systèmes paraboliques, *Journées Équations aux Dérivées Partielles de Saint-Jean-de-Monts,* Exposé IV, 1998.

[C2] Asymptotics of the Solutions of Hyperbolic Equations With a Skew–Symmetric Perturbation, *7th International Conference on Hyperbolic Problems : Theory, Numerics and Applications, Zürich*, Birkhäuser, **129**, 1999.

[C3] Décomposition en profils pour les solutions des équations de Navier–Stokes, *Séminaire Équations aux Dérivées Partielles, École Polytechnique*, mai 2000.

[C4] Équations de Navier–Stokes sans viscosité dans une direction (en collaboration avec J.-Y. Chemin, B. Desjardins et E. Grenier) : *Colloque Franco–Tunisien d'Équations aux Dérivées Partielles, La Marsa, Tunisie*, 2001.

[C5] Décomposition en profils des solutions de l'équation des ondes à l'extérieur d'un obstacle strictement convexe (en collaboration avec P. Gérard) : *Nonlinear Partial Differential Equations and their applications, Collège de France Seminar*, Studies in Mathematics and its Applications, **31**, pages 367–392, 2002.

[C6] Anisotropy and dispersion in rotating fluids (en collaboration avec J.-Y. Chemin, B. Desjardins et E. Grenier) : *Nonlinear Partial Differential Equations and their applications, Collège de France Seminar*, Studies in Mathematics and its Applications, **31**, pages 171–191, 2002.

[C7] Stabilité et asymptotique en temps grand de solutions globales des équations de Navier-Stokes (en collaboration avect D. Iftimie et F. Planchon) : *Journées Équations aux Dérivées Partielles de Forges–les–Eaux*, 2002.

[C8] Rôle des oscillations quadratiques dans des équations de Schrödinger non linéaires, *Séminaire Équations aux Dérivées Partielles, École Polytechnique*, décembre 2002.

[C9] Résultats récents sur la limite incompressible, *Séminaire Bourbaki*, novembre 2003.

[C10] Interpolation between energy and scaling for some nonlinear Cauchy problems, *Phase Space Analysis of Partial Differential Equations*, Vol. I, 201–223, Pubbl. Cent. Ric. Mat. Ennio Giorgi, Scuola Norm. Sup., Pisa, 2004.

[C11] Résultats d'unicité pour le système de Navier-Stokes bidimensionnel, Séminaire équations aux dérivées partielles de l'Ecole Polytechnique, février 2005.

[C12] Facettes mathématiques de la mécanique des fluides (en collaboration avec J.-Y. Chemin et D. Gérard-Varet), Actes des Journées X-UPS 2010, 90 pages.

[C13] Equations cinétiques pour la turbulence faible (en collaboration avec L. Saint-Raymond et B. Texier), Séminaire équations aux dérivées partielles de l'Ecole Polytechnique, octobre 2010.

5.3 Articles soumis

[S1] (en collaboration avec Y. Sire) : Besov algebras on Lie groups of polynomial growth and related results.

[S2] (en collaboration avec G. Koch et F. Planchon) : A profile decomposition approach to the $L^\infty_t(L^3_x)$ Navier-Stokes regularity criterion.

[S3] (en collaboration avec E. Feireisl, D. Gérard-Varet et A. Novotny) : Multi-scale analysis of compressible viscous and rotating fluids.

[S4] (en collaboration avec H. Bahouri) : Weak stability of global solutions to the incompressible Navier-Stokes equations.

[S5] (en collaboration avec H. Bahouri et C. Fermanian) : Refined inequalities on graded Lie groups.

5.4 En préparation

[P1] (en collaboration avec L. Saint-Raymond et B. Texier) : Kinetic equations for wave turbulence.

[P2] (en collaboration avec H. Bahouri et C. Fermanian) : Strichartz estimates on graded Lie groups.

[P3] (en collaboration avec L. Saint-Raymond et B. Texier) : From Newton to Boltzmann : the case of short-range potentials.

[P4] (en collaboration avec Th. Gallay) : Resolvent estimates for rapidly rotating Oseen vortices.

[P5] (en collaboration avec H. Ammari, H. Bahouri et D. Dos Santos Ferreira) : Stability estimates from the near and far field patterns at the high frequency limit.

6 Domaines de recherche

Mes recherches s'effectuent principalement en Analyse des Équations aux Dérivées Partielles d'évolution non linéaires. Je m'intéresse au problème de Cauchy, en particulier dans le cas des équations de Navier-Stokes, ainsi qu'au comportement asymptotique des solutions, en temps grand ou en présence d'un petit paramètre. Je m'intéresse parallèlement aux équations d'ondes ou de Schrödinger semi linéaires. Enfin récemment mes recherches se sont tournées vers des questions relevant de la théorie cinétique, liées à la théorie de la turbulence de Zakharov. Une présentation plus détaillée de ces trois aspects de mes recherches se trouve au paragraphe 6.1 ci–dessous.

Je m'intéresse également à des questions d'Analyse harmonique sur les groupes, avec un intérêt particulier pour le groupe de Heisenberg. Ces travaux sont présentés au paragraphe 6.2.

6.1 Analyse d'équations aux dérivées partielles non linéaires

Dans ce paragraphe sont détaillés mes travaux en EDP non linéaires. Il est constitué de trois sous-parties :
- Problème de Cauchy.
- Propriétés qualitatives et études asymptotiques.
- Théorie de la turbulence d'ondes.

6.1.1 Problème de Cauchy

Les **équations de Navier-Stokes** modélisent le mouvement d'un fluide visqueux incompressible, et s'écrivent comme un système d'équations aux dérivées partielles d'évolution non linéaires portant sur le champ de vitesses u et la pression p du fluide :

$$(NS) \left\{ \begin{array}{c} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \Delta u = -\nabla p \\ \operatorname{div} u = 0, \end{array} \right.$$

où $\operatorname{div} u = 0$ traduit l'incompressibilité du fluide.
Il est facile de se convaincre (en multipliant scalairement l'équation par u et en intégrant en espace) que la norme L^2 du champ de vitesses est une quantité formellement décroissante avec le temps, mais ce contrôle a priori n'est malheureusement pas suffisant en général pour conclure au caractère globalement bien posé du système : ce n'est qu'en deux dimensions d'espace qu'un tel résultat est connu pour une donnée initiale dans L^2, mais dès que la dimension est supérieure, une telle donnée initiale ne génère a priori que des solutions *faibles*, non uniques. Cela correspond au célèbre travail de J. Leray dans les années trente ; ce résultat est dû au caractère *surcritique* de l'équation en dimension plus grande que deux, lié au fait que le contrôle a priori est insuffisant pour garantir le caractère bien posé de l'équation (cette dernière propriété est plutôt liée à des phénomènes d'invariance d'échelle, voir ci-dessous, et ce n'est qu'en dimension deux que L^2 est invariant d'échelle). Depuis les années soixante, on s'est attaché à comprendre sous quelles conditions sur la donnée initiale les solutions de Leray sont uniques. Il s'avère que la bonne classe de données correspond, ici comme souvent, à des espaces invariants par le changement d'échelle de l'équation, et ainsi de 1964 à 2001 l'on a pu exhiber une chaîne d'espaces fonctionnels garantissant cette unicité, depuis l'espace de Sobolev homogène $\dot{H}^{1/2}$ en trois dimensions d'espace (une «demi-dérivée» de chaque composante du champ de vitesses est dans L^2) jusqu'à BMO^{-1} (chaque composante du champ de vitesses est combinaison linéaire de dérivées de fonctions de BMO), en passant par les espaces de Besov $\dot{B}^{-1+\frac{3}{p}}_{p,\infty}$ en dimension trois d'espace. Ces espaces fonctionnels ne correspondant à aucune conservation de l'équation, il n'est en revanche plus question (avec les techniques utilisées, de type point fixe) d'obtenir des solutions globales, sauf pour des données suffisamment petites.

Ma contribution à cette question du problème de Cauchy pour le système de Navier-Stokes s'est faite dans les directions suivantes.

- On peut se demander si, en trois dimensions d'espace par exemple, des contraintes **géométriques** peuvent être imposées pour garantir l'unicité des solutions de Leray, ou l'existence globale de solutions régulières. Ce type de résultat est connu par exemple dans le cadre invariant par rotation, ou encore hélicoïdal ou axisymétique sans swirl (dans ces situations on obtient des quantités invariantes qui sont au scaling de l'équation). Des résultats dans ce sens ont été apportés dans [A1] (pour une donnée initiale proche d'un champ bidimensionnel) et dans [A8, A14] (pour le cas axisymétrique). Dans [A1] il est démontré que si la donnée initiale est suffisamment proche d'un champ bidimensionnel, avec conditions périodiques en espace, alors tout se passe comme en dimensions deux d'espace, et il y a notamment existence globale et unicité de solutions. Dans [A8] l'on démontre des théorèmes d'existence et d'unicité de solutions, par point fixe, dans un espace fonctionnel invariant d'échelle qui est équivalent à L^2 à distance finie, strictement positive de l'axe d'axisymétrie. L'article [A14] traite de l'unicité fort-faible dans ce cadre (voir le paragraphe suivant pour une discussion de cette notion).

- On peut également se poser la question de l'**unicité fort-faible** des solutions : si une donnée initiale est suffisamment régulière pour engendrer à la fois des solutions faibles et une solution unique pendant un certain temps, peut-on garantir que ces solutions faibles coïncident avec la solution régulière tant que cette dernière existe ? Pour des solutions C^∞ la réponse affirmative a été donnée par J. Leray, pour une donnée dans $L^3(\mathbf{R}^3)$ c'est un travail de W. von Wahl en 1983, alors que pour des espaces de Besov l'on peut consulter [A12] (une partie de la thèse de P. Germain est également consacrée à ces questions).

- En dimension *deux* d'espace, on peut également chercher à savoir si les solutions *locales* obtenues par point fixe (dans un espace plus grand que L^2, mais à la même échelle) sont en fait **globales** (pour toute donnée). Dans [A12] il est démontré que c'est le cas dans les espaces de Besov, alors que le cas BMO^{-1} a été étudié par P. Germain dans sa thèse. Dans les travaux [A18] et [A19] on démontre le caractère bien posé de ces équations quand le rotationnel de la donnée initiale est une mesure finie : l'existence globale était connue depuis les travaux de Giga, Miyakawa et Osada en 1989, mais avec unicité seulement dans le cas de données petites, ou pour une mesure de Dirac (Gallay-Wayne en 2004).

- Une question naturelle est d'étudier la **stabilité** des solutions globales (éventuellement grandes). Un théorème de stabilité par petite perturbation dans les espaces de Besov a été obtenu dans [A16], et étendu au cas de BMO^{-1} par P. Auscher, S. Dubois et P. Tchamitchian. Le résultat principal de [A16] affirme que l'espace des données initiales générant une solution globale aux équations de Navier-Stokes est *ouvert*. La démonstration de ce résultat repose sur un théorème d'asymptotique en grand temps des solutions : toute solution globale unique, éventuellement grande, tend vers zéro quand le temps tend vers l'infini.
Dans [A24] l'on démontre par ailleurs un résultat de stabilité par superposition de translatées-dilatées de la donnée.

- Dans [A22], [A24], [A29], [A30] et [A32], l'on exhibe des classes de données initiales **arbitrairement grandes**, en trois dimensions d'espace, qui donnent lieu à une solution globale ; la condition de petitesse n'est donc pas strictement nécessaire pour garantir l'existence globale de la solution. La démonstration des résultats [A22] et [A24] repose sur un nouveau théorème d'existence globale pour le système de Navier-Stokes tridimensionnel (périodique pour [A22],

dans l'espace entier pour [A24]) : une solution globale unique existe dès lors qu'une condition *non linéaire* de petitesse sur la donnée initiale est satisfaite. On démontre ensuite qu'il existe des données initiales pour lesquelles cette condition de petitesse non linéaire est vraie et qui sont arbitrairement grandes, dans tous les espaces dans lequel des théorèmes d'existence globale à données petites sont connus (on peut montrer que tout espace de Banach de distributions tempérées dont la norme soit invariante d'échelle s'injecte dans l'espace $\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}$, et c'est précisément dans cette norme que les données initiales de [A22] et [A24] sont grandes) — ces grandes données engendrent donc une unique solution globale. ll est intéressant de noter que le travail [A27], en collaboration avec M. Paicu, exhibe un modèle pour le système de Navier-Stokes, tridimensionnel et préservant la condition de divergence nulle, pour lequel les exemples de [A24] conduisent à une solution explosive (alors que la solution de Navier-Stokes associée est globale par [A24]). Ce résultat montre qu'il est donc fondamental d'exploiter au mieux la structure particulière des équations de Navier-Stokes pour espérer les résoudre.
Dans [A29] on montre un nouveau résultat d'existence globale à grande donnée. Dans ce cas la donnée initiale est supposée varier lentement dans une direction d'espace (typiquement elle s'écrit $u^0(x_1, x_2, \varepsilon x_3)$ avec ε suffisamment petit). Ce résultat est étendu dans [A30] à une classe «mal préparée» de données. Dans ce dernier cas les données initiales sont supposées analytiques dans l'une des directions, et l'on propose une méthode de résolution de type «Cauchy-Kowalevska» globale, en contrôlant notamment la manière dont le rayon d'analyticité se détériore au cours du temps.
Enfin le travail [A32] consiste en la remarque suivante : il est possible d'ajouter à n'importe qu'elle donnée initiale engendrant une solution globale un champ de vecteur du type de celui introduit dans [A29], et le champ ainsi construit, pourvu que ε soit assez petit (et sous une condition d'annulation du champ de [A29] à l'origine), produit lui aussi une solution globale régulière. Ainsi les interactions entre les deux types de solutions, dues à la non linéarité, s'avèrent être négligeables. Un corollaire de ce résultat est le suivant : si $\mathcal{G}$ est le sous-espace (ouvert) des champs de $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$ de divergence nulle engendrant une solution globale régulière, alors par tout point de $\mathcal{G}$ passe un nombre non dénombrable de segments de taille arbitrairement grande, tous inclus dans $\mathcal{G}$.
Notons que [A32] appelle une généralisation à d'autres types de données initiales proches (en un sens faible) de données dans $\mathcal{G}$. C'est l'objet du travail [S4] dans lequel on montre que si une suite de données initiales converge faiblement vers un élément de $\mathcal{G}$, avec une hypothèse structurelle d'anisotropie sur la suite (excluant typiquement une convergence de type autosimilaire) alors cette suite appartient aussi à $\mathcal{G}$, après extraction d'une sous-suite.

Il est à noter que tous ces résultats reposent sur la *structure particulière* de l'équation, en particulier sur la décroissance de l'énergie ou la forme spécifique du terme non linéaire : on cherche ainsi à utiliser le plus possible de spécificités des équations.

D'autres travaux sur les équations de Navier-Stokes, dans une optique différente (il ne s'agit plus de la résolution du problème de Cauchy) sont présentés ci-dessous : on décrit notamment des décompositions en profils, ou des problèmes de perturbation singulière pour des équations modelées sur Navier-Stokes.

Le principe d'allier conservation de normes à des invariances d'échelle a également été mis en oeuvre dans [A13], dans l'étude de l'**équation des ondes semi linéaire** cubique, en trois dimensions d'espace. Rappellons que cette équation s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{tt}\Phi - \Delta\Phi + \Phi^3 = 0 \\ (\Phi, \partial_t\Phi)_{|t=0} = (\Phi_0, \Phi_1). \end{array} \right.$$

Dans ce cas, contrairement à Navier-Stokes, la conservation de l'énergie se fait dans un espace «au-dessus» de l'échelle de l'équation. Ainsi pour une donnée initiale d'énergie finie (dans l'espace de Sobolev $\dot{H}^1$) il existe une unique solution globale, alors que dans des espaces invariants d'échelle ($\dot{H}^{1/2}$ par exemple) on peut construire une solution globale unique pour des données petites, locales en temps seulement sinon. Dans [A13] on a cherché à se rapprocher des espaces invariants d'échelle pour la donnée initiale, tout en conservant l'existence et l'unicité globales. Comme dans le cas de plusieurs travaux sur Navier-Stokes cités ci-dessus ([A12] en particulier), une méthode de décomposition de la donnée initiale inspirée de travaux de C. Calderòn a permis d'obtenir un résultat dans $\dot{H}^s, s > 3/4$, retrouvant ainsi un résultat de Kenig, Ponce et Vega (qui utilisent une technique de J. Bourgain, un peu plus délicate à mettre en oeuvre). La technique de Calderòn mise en oeuvre dans [A13] a d'ailleurs ensuite été utilisée par J.-Y. Chemin et H. Bahouri pour obtenir précisément l'espace $\dot{H}^{3/4}$.

6.1.2 Propriétés qualitatives et études asymptotiques

Les EDP d'évolution non linéaires peuvent aussi être l'objet d'études plus qualitatives. Nous présentons ci-dessous deux types de directions de recherche : d'une part des études «hautes fréquences» de type décompositions en profils de solutions, et d'autre part des études asymptotiques quand un petit paramètre apparaît naturellement dans le système, comme par exemple pour les fluides géophysiques.

- *Études hautes fréquences* : il s'agit d'étudier, dans la lignée de travaux de P. Gérard, des familles de solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires dans une approximation hautes fréquences. Le point de départ de ces études consiste en la «décomposition en profils» d'une suite de fonctions bornées dans un espace de Sobolev, afin d'en décrire le défaut de compacité (qui correpond à un phénomène de concentration). Le théorème de décomposition dans $\dot{H}^s$ affirme que toute famille bornée dans $\dot{H}^s$ de fonctions φ_n peut se décomposer de la manière suivante : il existe des suites $(h_n^j)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathbf{R}^+$ et $(x_n^j)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathbf{R}^d$ telles que pour tout $\ell \in \mathbf{N}$,

$$\varphi_n(x) = \varphi^0(x) + \sum_{j=1}^{\ell} \frac{1}{(h_n^j)^{\frac{d}{p}}} \varphi^j \left(\frac{x - x_n^j}{h_n^j} \right) + \psi_n^\ell(x),$$

où p est l'indice de l'injection de Sobolev $\dot{H}^s \subset L^p$, c'est-à-dire $s = d(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})$, et où les fonctions φ^0, φ^j et ψ_n^ℓ sont toutes dans $\dot{H}^s$. En outre ψ_n^ℓ est un terme de reste petit dans L^p (quand ℓ tend vers l'infini, uniformément en n). Enfin ces profils sont orthogonaux, dans le sens où si $j \neq k$, alors soit la limite de h_n^j/h_n^k est zéro (ou l'infini) quand n tend vers l'infini, soit au contraire $h_n^j = h_n^k$ et dans ce cas c'est la limite de $|x_n^j - x_n^k|/h_n^j$ qui est infinie.
Ce type d'analyse s'est avéré efficace pour apporter des informations qualitatives sur les solutiohns d'EDP d'évolution non linéaires critiques, comme les équations des ondes (avec les

travaux d'H. Bahouri et de P. Gérard, voir aussi [A6] et [C5] pour le cas de l'extérieur d'un domaine strictement convexe), de Schrödinger (travaux de S. Keraani et les extensions récentes de Kenig et Merle par exemple, ou encore [A15]) ou de Navier-Stokes (voir [A9]).

Dans [A9] il est notamment démontré que des suites de solutions des équations de Navier–Stokes dans $\mathbf{R}^3$, associées à des suites de données initiales bornées dans $\dot{H}^{1/2}$, peuvent être décomposées en une somme de profils orthogonaux, bornés dans $\dot{H}^{1/2}$, à un terme de reste près, petit dans L^3. La méthode s'appuie sur la démonstration d'un résultat analogue pour l'équation de la chaleur, suivi d'un argument de perturbation. Un corollaire de ce théorème est une estimation a priori pour les solutions globales associées à une donnée initiale dans la plus grande boule (ouverte) de $\dot{H}^{1/2}$ engendrant une solution globale. On montre aussi que l'application associant une donnée dans cette boule à sa solution est lipschitzienne. La généralisation de ce type de technique à l'espace L^3 et aux espaces de Besov $\dot{B}^{-1+3/p}_{p,q}$ est investiguée dans [S2].

Dans [A15] ce sont les équations de Schrödinger semi-classiques (un paramètre ε multiplie chaque dérivée en espace et en temps) semilinéaires (la nonlinéarité est une puissance de la solution) critiques (la nonlinéarité est multipliée par une puissance particulière de ε) qui sont considérées de ce point de vue : dans le cas où la donnée initiale est une oscillation quadratique, c'est-à-dire qu'elle s'écrit $e^{i|x-x_0|^2/\,2\varepsilon t_0}$ et avec cette puissance de ε critique en facteur de la nonlinéarité, R. Carles a démontré dans sa thèse que la solution est asymptotique à la solution de l'équation linéaire avec même donnée avant le temps t_0 (le temps de focalisation), et qu'après ce temps la solution est asymptotique à la solution de l'équation linéaire dont la donnée s'obtient de la donnée initiale du problème nonlinéaire par un opérateur de «scattering». Les décompositions en profils se sont avérées être le bon outil pour démontrer une réciproque à ce résultat dans [A15] : pour que ce type de comportement asymptotique en ε soit vérifié, il *faut* que la donnée initiale soit une superposition linéaire d'oscillations quadratiques.

- *Problèmes de perturbation singulière* : les équations provenant de problèmes physiques font souvent apparaître des petits paramètres ; c'est le cas par exemple des fluides faiblement compressibles (qui satisfont aux équations des fluides compressibles avec petit nombre de Mach) ou des fluides géophysiques (par exemple l'atmosphère terrestre ou les océans, mais aussi la tache rouge de Jupiter) où la force de Coriolis apparaît pénalisée par le (petit) nombre de Rossby. Les nombres de Burger, de Froude..., sont autant de nombres adimensionnés qui suivant le modèle physique étudié peuvent être très petits (ou très grands). Une grande partie de mes travaux de recherche porte sur la compréhension de l'influence de tels paramètres sur le comportement des solutions.
Mes travaux de thèse ([A2,A3]) ont consisté en l'étude de problèmes hyperboliques ou paraboliques abstraits, périodiques, pénalisés par un terme antisymétrique, dans la continuation de travaux de Grenier, Schochet, Babin-Mahalov-Nicolaenko, Klainerman-Majda, Embid-Majda... Cela a permis notamment d'obtenir des résultats montrant l'effet stabilisateur de la force de Coriolis sur les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles. Ce système s'écrit

$$(NSC)\ \begin{cases} \partial_t u + u\cdot\nabla u - \Delta u + \dfrac{1}{\varepsilon}u^\perp = -\nabla p \\ \operatorname{div} u = 0, \end{cases}$$

avec $u^\perp = (-u^2, u^1)$. Les techniques employées, de type optique géométrique non linéaire,

ont également donné des résultats sur la limite incompressible ([A4] ; voir aussi [A31], où l'on étudie à la fois les limites incompressible et de forte rotation, en utilisant des méthodes dispersives de type RAGE, et [S3] où l'on incorpore au modèle l'effet de la force centrifuge).
L'un des résultats principaux de cette analyse est que pour toute donnée initiale dans $\dot{H}^{1/2}$, si le paramètre ε (le nombre de Rossby, qui est une mesure du rapport entre la vitesse du fluide et la vitesse de rotation de la terre) est suffisamment petit alors le système (NSC) est globalement bien posé. En outre l'asymptotique des solutions, quand ε tend vers zéro, est également décrite. Ce résultat est intéressant dans la mesure où ce système possède les mêmes estimations a priori que le système de Navier-Stokes (la force de Coriolis étant un opérateur antisymétrique dans tous les espaces de Sobolev $\dot{H}^s$, elle n'apparaît pas dans les estimations d'énergie $\dot{H}^s$), mais il a une solution globale unique dès que ε est assez petit (un tel résultat est bien sûr ouvert pour le système de Navier-Stokes).
J'ai poursuivi l'étude des équations des fluides géophysiques avec J.-Y. Chemin, B. Desjardins et E. Grenier ([A5], [A11], [C4], et le livre [L1]), où nous avons notamment exhibé des propriétés dispersives de la force de Coriolis dans le cas où les équations sont posées dans l'espace entier, et étudié des phénomènes de couches limites en présence de bords. Ces propriétés dispersives sont analogues aux estimations de Strichartz bien connues pour les équations d'ondes ou de Schrödinger, et sont obtenues comme ces dernières, par des méthodes de phase stationnaire.
Les propriétés dispersives de la force de Coriolis ont été par ailleurs par la suite mises en évidence dans des modèles plus sophistiqués intervenant en météorologie, comme pour le système primitif étudié par F. Charve.

Tous ces travaux font l'hypothèse que la force de Coriolis est de direction et d'amplitude constante, ce qui est physiquement raisonnable sur des zones peu étendues de la Terre, à des latitudes moyennes. Des travaux en collaboration avec L. Saint-Raymond tentent de s'affranchir de cette hypothèse, en autorisant des variations spatiales de la force de Coriolis ([A17],[A20]), qui peut s'annuler au voisinage de l'équateur ([L3]). Le travail [L2] est un article de revue de ces phénomènes. Dans [A20] par exemple, on remplace le terme $1/\varepsilon\ u^\perp$ apparaissant dans (NSC) ci-dessus par le terme plus général $1/\varepsilon\ b(x_1, x_2)u^\perp$ où b est une fonction régulière, ne s'annulant pas. L'analyse est rendue beaucoup plus difficile du fait que le spectre de cet opérateur de «Coriolis inhomogène» ne s'obtient pas par simple transformée de Fourier comme dans le cas constant. Cet opérateur n'est en particulier antisymétrique que sur L^2, et plus sur tous les espaces de Sobolev $\dot{H}^s$. On parvient néanmoins, par des techniques de compacité faible, à décrire l'asymptotique des solutions faibles qui à la limite où ε tend vers zéro vérifient une équation de type «chaleur linéaire» : l'inhomogénéité de la force de Coriolis tend à gommer les effets non linéaires à la limite (en tous cas pour la limite faible, qui décrit un comportement moyen de la solution). Ce résultat a été étendu par M. Majdoub et M. Paicu au cas des solutions fortes, quand la rotation ne dépend que d'une variable : dans ce cas des techniques de type «anisotropes» permettent d'étudier des solutions plus régullières, même si l'opérateur de Coriolis n'est antisymétrique que dans L^2.
Ce type de modèle rend compte du mouvement des océans ou de l'atmosphère terrestre sur des zones relativement étendues, mais au voisinage de l'équateur l'amplitude de b doit être autorisée à s'annuler. Le travail [L3] étudie en détail le modèle dit du «betaplan», qui est un modèle communément utilisé par les physiciens pour décrire cette région du globe. La

difficulté apportée par l'annulation de la force de Coriolis est compensée par la possibilité de faire des calculs explicites : le modèle du betaplan est un modèle de type «shallow water» ou Saint-Venant, avec une force de Coriolis $1/\varepsilon\ x_2 u^\perp$. L'oscillateur harmonique joue un rôle prépondérant dans cette analyse, dans laquelle on peut d'une part décrire comme ci-dessus le comportement des solutions faibles et leurs limites faibles (qui encore une fois se comportent de manière linéaire), mais aussi, de manière relativement précise, celui des limites fortes (après filtrage des ondes, dites de Poincaré et de Rossby, obtenues par diagonalisation exacte du système).
Mon dernier travail dans cette direction est [A33] (et sa généralisation [A34]). L'objectif de ce travail est de chercher à mettre en évidence mathématiquement un phénomène observé physiquement : le piégeage de certaines ondes de Rossby dans les océans, dû à la fois aux courants macroscopiques, et à l'influence du vent. Par un choix particulier d'échelles en temps et en espace, et sur les ordres de grandeur des différentes inconnues (notamment en cherchant des fluctuations autour d'un courant macroscopique stationnaire donné, de la forme $(v_1(x_2), 0)$), on parvient à mettre le système de Saint-Venant évoqué plus haut, sous la forme d'un système quasilinéaire hyperbolique symétrique, semi-classique. Une diagonalisation microlocale de ce système permet d'obtenir des généralisations des ondes de Poincaré et de Rossby. Ces dernières apparaissant sous la forme d'un sous-symbole par rapport aux ondes de Poincaré, pour montrer qu'elles sont piégées il faut aussi s'intéresser à la propagation des ondes de Poincaré sur des échelles de temps de type diffractif. Par des méthodes spectrales (l'analyse semi-classique n'est plus opérante à ces échelles) on parvient à montrer que ces ondes dispersent ; on utilise en particulier une transformée de Fourier en x_1, et une méthode de formes normales (quantification de Bohr-Sommerfeld) en x_2. Sous certaines hypothèses sur le courant macroscopique (analogues aux hypothèses physiques : la propagation de ces ondes doit se faire en sens inverse que celles des ondes de Rossby), on peut également montrer que les ondes de Rossby sont piégées pour tout temps, par l'étude du système dynamique décrivant les trajectoires. Une fois les ondes analysées, on parvient à démontrer des résultats analogues sur le système non linéaire car au vu des échelles choisies la non linéarité est négligeable.
Dans [A34] on généralise cette étude au cas où le courant macroscopique n'est pas zonal. Dans ce cas l'invariance par translation en x_1 est détruite, donc on a recours à d'autres techniques, en particulier pour montrer la dispersion des ondes de Poincaré : il s'agit essentiellement d'utiliser des estimées de Mourre (qui montrent par exemple que si le commutateur entre l'hamiltonien de Poincaré et x_1 est minoré, alors toutes les trajectoires sortent de tout compact en x_1 en temps fini). La minoration n'est vraie que si la variable duale de ξ_1 est elle-même minorée ; ce dernier point est démontré en commençant par une analyse semi-classique (en temps très court) qui montre que les trajectoires sortent du support de $\partial_1 v$ en temps court, et ensuite on peut en déduire l'invariance par translation en x_1 (puisque la solution n'intersecte plus le support de $\partial_1 v$ grâce aux estimées de Mourre) pour conclure.

- *Opérateur de scattering et équations dispersives :* Je me suis intéressée à l'étude de l'opérateur de *scattering* pour des équations dispersives générales (parmi lesquelles on trouve les équations d'ondes ou de Klein-Gordon, de Schrödinger ou encore de Hartree). Rappellons que cet opérateur, quand il existe, permet de relier les états asymptotiques des solutions d'équations non linéaires aux temps $\pm\infty$. C'est un opérateur non linéaire sur lequel on connait très peu de propriétés. Le travail [A25] avec R. Carles décrit plus précisément cet opérateur. On montre par exemple qu'il est analytique pour une grande classe d'équations semi linéaires (à non linéarité polynômiale). Cela permet d'en déduire des propriétés de type «complète intégrabilité» sur le système en question (au sens où il possède une infinité d'invariants), ou encore de scattering inverse (typiquement, déduire la puissance de la non linéarité à partir de l'opérateur de scattering).

- *Propriétés pseudospectrales d'un opérateur non auto-adjoint :* Dans le travail [A26] avec Th. Gallay et F. Nier, on s'est intéressé à une perturbation antisymétrique de l'oscillateur harmonique unidimensionnel. La motivation de cette étude provient de la question de la stabilité des vortex d'Oseen pour la mécanique des fluides incompressibles en deux dimensions d'espace (une généralisation de ce travail à la mécanique des fluides est en cours d'étude, voir [P4]). Après quelques réductions et simplifications on arrive à la question suivante : comment la décroissance du semi-groupe associé à l'opérateur

$$H_\varepsilon = -\partial_x^2 + x^2 + \frac{i}{\varepsilon} f(x)$$

est-elle affectée par le petit paramètre ε, suivant les propriétés de f (supposée être une fonction réguière à valeurs réelles) ? On remarque que l'opérateur H_ε est une perturbation non autoajointe de l'oscillateur harmonique, et cette propriété fait que ses propriétés spectrales sont beaucoup moins faciles à analyser en fonction de ε. On peut montrer par exemple assez facilement que dès que f est non constante, alors la plus petite partie réelle des valeurs propres de H_ε (notée Σ_ε dans la suite) est strictement plus grande que 1, alors que c'est 1 dans le cas non perturbé (et que la perturbation est purement imaginaire). On peut aussi démontrer sans grande difficulté que dès que les lignes de niveau de f sont d'intérieur vide, alors Σ_ε tend vers l'infini quand ε tend vers zéro. On a cherché alors à quantifier cette dépendance, en analysant notamment la quantité «pseudospectrale»

$$\Psi_\varepsilon = \left(\sup_{\lambda \in \mathbf{R}} \|(H_\varepsilon - i\lambda)^{-1}\| \right)^{-1}$$

qui coïncide bien sûr avec Σ_ε dans le cas d'un opérateur auto-adjoint. En supposant typiquement que la fonction f décroit comme $|x|^{-k}$ à l'infini et a des points critiques non dégénérés, on parvient à démontrer que le semi groupe se comporte comme

$$\|e^{-tH_\varepsilon}\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C_\varepsilon e^{-t/\varepsilon^{\frac{1}{k+2}}}$$

On propose deux types de démonstrations de ce résultat : l'un repose sur des méthodes d'hypocoercivité développées récemment par C. Villani, et consiste à ramener le problème à l'étude de l'opérateur auto-adjoint $-\partial_x^2 + x^2 + C^*C$ où C est le commutateur entre $\partial_x + x$ et la perturbation antisymétrique. L'autre est une méthode plus classique dans le cadre de la théorie spectrale et consiste à étudier des problèmes modèles microlocaux, suivant la localisation de x vis-à-vis des points critiques de f, et de l'infini. Cela permet d'avoir un contrôle sur Ψ_ε, qui dicte la décroissance du semi-groupe. On exhibe également un exemple de fonction f pour lequel Σ_ε est beaucoup plus grand que Ψ_ε.

6.1.3 Turbulence d'ondes

Le travail [P1] (voir aussi [C13]) est une tentative d'explication rigoureuse de la théorie de la turbulence d'ondes de Zakharov. Cette théorie est une théorie statistique qui prédit l'occupation des différents niveaux d'énergie dans un système faiblement non linéaire. L'évolution de cette fonction de répartition est gouvernée par un modèle de type cinétique collisionnel. Cette théorie, initialement proposée par Zakharov dans le cadre de la propagation des ondes plasmas, est appliquée aujourd'hui dans de nombreux domaines de la physique : ondes de surface, ondes atmosphériques, mais aussi distribution de vorticité dans les fluides incompressibles.... Ces modèles permettent en effet d'expliquer les transferts d'énergie des grandes échelles vers les petites échelles, et inversement, et de retrouver les prédictions de Kolmogorov sur les cascades d'énergie. Notre but est de comprendre comment ces modèles peuvent être obtenus à partir d'équations d'évolution déterministes, et notamment quelles sont les hypothèses de nature statistique qui sont sous-jacentes. Notre approche a consisté à partir des équations de Schrödinger non linéaire du type

$$i\partial_t \psi + i\alpha\psi + \frac{1}{\varepsilon}\Delta\psi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}|\psi|^2\psi \quad \text{dans } \mathbf{R}\times\mathbf{R}^3,$$

où le petit paramètre $\varepsilon > 0$ permet de séparer les échelles de temps rapide et lent, alors que α est une façon de rendre l'équation irréversible (la dynamique de Boltzmann attendue à la limite étant irréversible). En supposant qu'il existe une mesure invariante pour ce système (c'est un problème ouvert en dimension trois d'espace) le principe consiste à définir des fonctions de corrélation

$$F_p(k_1, ..., k_p, k'_1, ..., k'_p) = \langle \varphi_{k_1} ... \varphi_{k_p} \bar{\varphi}_{k'_1} ... \bar{\varphi}_{k'_p} \rangle$$

où φ_k est défini par filtrage : $\varphi_k := \hat{\psi}_k \exp\left(\frac{it|k|^2}{\varepsilon} + \alpha t\right)$. L'évolution des différentes fonctions de corrélation est alors donnée par un système infini d'équations couplées du type

$$\partial_t F_p = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} L^{\varepsilon}_{p,p+1} F_{p+1}\,,$$

où $L^{\varepsilon}_{p,p+1}$ est un opérateur intégral (de type convolution), qui dépend de ε par un facteur de phase qui vient du filtrage. On fait alors l'approximation quasi-gaussienne (pas du tout justifiée pour la dynamique non linéaire) qui stipule que les différents modes évoluent de manière indépendante : en d'autres termes

$$F_p(k_1, ..., k_s, k'_1, ..., k'_p) \sim F(t, k_1)F(t, k_2) \dots F(t, k_p) \sum_{\sigma \in S_p} \prod_{i=1}^{p} \delta_{k_i - k'_{\sigma(i)}}\,.$$

De nombreuses approximations et simplifications conduisent alors, sous cette hypothèse, à l'équation des phonons :

$$\partial_t F = \int [F(k)F(k_3)F(k_4) + F(k_2)F(k_3)F(k_4) - F(k)F(k_2)F(k_4) - F(k)F(k_2)F(k_3)]$$
$$\delta(k + k_2 - k_3 - k_4)\delta(k^2 + k_2^2 - k_3^2 - k_4^2) dk_2\, dk_3\, dk_4\,.$$

La justification de cette limite semble extrêmement difficile, aussi avons-nous opté pour une stratégie consistant à remplacer l'équation de Schrödinger par un système de particules dont la dynamique collisionnelle conduit à l'équation des phonons. Les collisions doivent ainsi se faire à trois particules (plutôt que deux pour la dérivation de Lanford des équations de Boltzmann quadratiques), et sous une hypothèse de «quasi-résonance» des vitesses. On parvient ainsi dans [P1] à retrouver rigoureusement l'équation de Boltzmann cubique, en suivant l'approche de Lanford pour l'équation de Boltzmann quadratique (améliorée ensuite par C. Cercignani, R. Illner, M. Pulvirenti, puis par C. Cercignani, V. I. Gerasimenko, D. I. Petrina). Ce travail nous a conduit par ailleurs à proposer dans [P3] une nouvelle preuve, élémentaire et complète, de la dérivation de l'équation de Boltzmann quadratique y compris en présence d'un potentiel courte-portée.

6.2 Analyse harmonique sur les groupes de Lie

Depuis la fin de ma thèse, je m'intéresse à des questions d'analyse harmonique sur les groupes de Lie. La plupart de mes travaux sont dédiés au groupe de Heisenberg ([A7], [A21], [A28] et [L4]), même si depuis récemment je me suis intéressée à des généralisations à des groupes de Lie généraux (voir [S1], [S5] et [P2]).

Le groupe de Heisenberg est défini comme $\mathbf{R}^{2d+1}$ muni d'une loi de groupe non commutative :

$$\forall (x,y,s) \in \Big(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}\Big)^2 ,\ (x,y,s)\cdot(x',y',s') = \big(x+x', y+y', s+s' - (x|y') + (y|x')\big) ,$$

où $(\cdot|\cdot)$ représente le produit scalaire euclidien sur $\mathbf{R}^d$. Cette non commutativité a pour conséquence de rentre l'analyse harmonique très riche : ainsi la transformée de Fourier d'une fonction sur le groupe de Heisenberg devient un opérateur (la transformée de Fourier s'écrit en utilisant les caractères sur le groupe, la représentation la plus classiquement utilisée étant ici celle dite de Bargmann) ; il est intéressant de chercher à traduire dans ce cadre des résultats d'analyse harmonique bien connus dans $\mathbf{R}^{2d+1}$. Par exemple une théorie de Littlewood-Paley a été construite sur le groupe de Heisenberg par H. Bahouri, P. Gérard et C.-J. Xu, dans le but d'obtenir des estimations de type Strichartz pour les ondes et pour Schrödinger. Dans [A7], avec H. Bahouri, on a pu étendre la théorie du paraproduit de J.-M. Bony à ce cadre. La difficulté repose sur le fait que l'on ne dispose pas de formule simple pour la transformée de Fourier d'un produit, contrairement au cas euclidien. Néanmoins en établissant un lien entre la transformée de Fourier sur Heisenberg et la transformée de Fourier euclidienne, on parvient à préserver des propriétés de localisation spectrale du cas classique sur le groupe de Heisenberg après passage au produit. Ce résultat a notamment permis dans [A21], avec H. Bahouri et J.-Y. Chemin de démontrer de manière particulièrement simple des estimations de Hardy «précisées» (la démonstration étant d'ailleurs identique dans $\mathbf{R}^n$ et dans le groupe de Heisenberg). Dans [A28] on poursuit l'étude sur ce groupe en analysant le noyau de la chaleur sur le groupe de Heisenberg.
Enfin le travail [L4] consiste en la construction d'un calcul pseudodifférentiel sur le groupe de Heisenberg. Nous définissons une classe d'opérateurs pseudo-différentiels sur le groupe de Heisenberg. Comme il se doit, cette classe constitue une algèbre contenant les opérateurs différentiels. De plus, ces opérateurs pseudo-différentiels sont continus sur les espaces de Sobolev et l'on peut contrôler la perte de dérivée par leur ordre. Les techniques utilisées reposent en

particulier sur le calcul de Weyl-Hörmander associé à l'oscillateur harmonique ; par exemple on compare les opérateurs de localisation en fréquences à leur analogue du point de vue symbolique, via la formule de Mehler. Ce type de résultat devrait d'ailleurs trouver des applications dans d'autres situations. On applique également des méthodes de Coifman-Meyer pour montrer la continuité des opérateurs pseudo-différentiels, qui nécessitent une seconde microlocalisation.

Pour conclure ce chapitre indiquons que récemment, en collaboration avec Y. Sire [S1] et avec H. Bahouri et C. Fermanian [P2], je me suis intéressée à des groupes de Lie généraux (à croissance polynômiale dans [S1], gradués dans [S5] et [P2]). Dans [S1] on démontre des propriétés d'algèbre des espaces de Besov en particulier (pour des indices de régularité entre 0 et 1 seulement dans le cas général, et pour tous les indices dans le cas nilpotent). Un paragraphe est également dévolu à une généralisation du groupe de Heisenberg, les groupes de type H : la généralisation concerne la dimension du centre (de dimension un pour le groupe de Heisenberg), qui peut être quelconque. Il est facile de voir que toutes les propriétés décrites dans [A7], [A21], [A28], et même le calcul pseudodifférentiel de [L4], demeurent valables dans ce cadre général. De même dans le travail [P5] on montre que la structure graduée d'un groupe de Lie permet de construire une théorie de Littlewood-Paley très similaire à celle de l'espace euclidien, à condition qu'elle soit basée sur un opérateur de Rockland. Cela permet d'obtenir toute une zoologie d'inégalités fonctionnelles, de type Hardy, Sobolev, Gagliardo-Nirenberg (et leurs versions précisées). Enfin le travail [P2] consiste en la généralisation aux groupes de Lie gradués des estimations de dispersion obtenues en 1999 par H. Bahouri, P. Gérard et C.-J. Xu pour le groupe de Heisenberg (et généralisés par Del Hierro en 2005 pour les groupes de type H). On démontre que c'est la dimension du centre du groupe qui limite le taux de dispersion (ce qui justifie a posteriori que dans le cas du groupe de Heisenberg, il n'y a pas de dispersion pour Schrödinger).