

**Travaux Dirigés : feuille 7**

**Exercice 1**

On définit l'espace  $h^1 = \left\{ u \in \ell^2(\mathbb{N}), \sum_{n=0}^{\infty} n^2 |u_n|^2 < \infty \right\}$ .

1. Montrer que  $h^1$  est un espace de Hilbert quand on le munit du produit scalaire

$$\langle u|v \rangle_{h^1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1+n^2) \overline{u_n} v_n.$$

2. Montrer que  $h^1$  est un sous-espace dense de  $\ell^2(\mathbb{N})$ .
3. Montrer que la boule unité fermée de  $h^1$  est un compact de  $\ell^2(\mathbb{N})$ .

**Exercice 2**

Soit  $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $]0, 1[$  telle que  $\lim \alpha_n = 0$ . Pour  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de  $\ell^2(\mathbb{N})$ , on pose

$$\langle x | y \rangle_{\alpha} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \overline{x_n} y_n.$$

1. Montrer que l'on définit une nouvelle structure préhilbertienne sur  $\ell^2(\mathbb{N})$ , de norme notée  $\| \cdot \|_{\alpha}$ .
2. Obtient-on ainsi un espace de Hilbert ?

*Indication :* on montrera que la boule unité de  $(\ell^2(\mathbb{N}), \| \cdot \|_2)$  est fermée et précompacte dans  $(\ell^2, \| \cdot \|_{\alpha})$ .

**Exercice 3**

Soit  $H$  un espace préhilbertien sur  $\mathbb{C}$ . Montrer l'identité, dite *de polarisation*, suivante :

$$\forall x, y \in H \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left( \|x+y\|^2 - \| -x+y\|^2 + i \|ix+y\|^2 - i \| -ix+y\|^2 \right).$$

**Exercice 4**

Soit  $E$  un e.v.n. sur  $\mathbb{C}$  dont la norme vérifie l'identité du parallélogramme :

$$\forall x, y \in E \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

On veut montrer que  $\| \cdot \|$  est la norme associée à un produit scalaire.

On définit donc  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  par (d'après l'exercice précédent, ce choix s'impose) :

$$\forall x, y \in E \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left( \|x+y\|^2 - \| -x+y\|^2 + i \|ix+y\|^2 - i \| -ix+y\|^2 \right).$$

Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire de norme associée  $\| \cdot \|$ , en prouvant successivement que, pour tous  $x, y, z \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$  :

1.  $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$  et  $\langle x, 0 \rangle = 0$ .
2.  $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$ .
3.  $\langle x, y + z \rangle = 2\langle x/2, y \rangle + 2\langle x/2, z \rangle$ .
4.  $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ .
5.  $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ .

*Indication* : commencer par  $\lambda \in \mathbb{N}$  puis étendre successivement à  $\lambda \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  puis  $\mathbb{C}$ .

## Exercice 5

1. Soit  $E$  un espace vectoriel et  $P : E \rightarrow E$  une application linéaire telle que  $P^2 = P$ .  
Montrer que  $\text{Ker } P$  et  $\text{Im } P$  sont supplémentaires et que  $P$  est la projection sur  $\text{Im } P$  parallèlement à  $\text{Ker } P$ .
2. Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $P : H \rightarrow H$  une application linéaire.  
Montrer que  $P$  est la projection *orthogonale* sur un s.e.v. fermé de  $H$  si et seulement si  $P$  vérifie les deux conditions :

$$P^2 = P \quad \text{et} \quad \forall x \in H \quad \|P(x)\| \leq \|x\|.$$

*Indication* : on montrera notamment que, sous ces conditions,  $(\text{Ker } P)^\perp \subset \text{Im } P$ .

## Exercice 6

Dans un espace de Hilbert  $H$ , on considère une famille orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$  et  $n$  vecteurs  $x_1, \dots, x_n$  tels que

$$\sum_{i=1}^n \|x_i - e_i\|^2 < 1.$$

Montrer que la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est libre.

*Indication* : se ramener au cas où  $x_1, \dots, x_n \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ .

## Exercice 7

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, non nulle, positive.

1. Montrer que

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 f(t)P(t)Q(t) dt$$

est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ , l'anneau des polynômes à coefficients réels.

2. Montrer qu'il existe une base  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{R}[X]$  telle que  $\langle P_i, P_j \rangle = \delta_{i,j}$  avec  $P_n$  de degré  $n$ .
3. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n$  a  $n$  racines simples dans  $]0, 1[$ .

## Exercice 8

Soit  $H$  un espace de Hilbert. On dit qu'une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $H$  converge faiblement vers  $x \in H$  si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall y \in H.$$

1. Montrer que toute suite convergente dans  $H$  est faiblement convergente.
2. Montrer que toute suite orthonormée de  $H$  converge faiblement vers 0. Y a-t-il convergence "forte" ?

## Exercice 9 : base de Hermite

Les polynômes de Hermite sont définis par la relation

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2} = (-1)^n H_n(x) e^{-x^2}, \quad H_0 = 1,$$

et les fonctions de Hermite sont définies par

$$\psi_n(x) = c_n H_n(x) e^{-x^2}, \quad \text{avec } c_n = (\sqrt{\pi} 2^n n!)^{-\frac{1}{2}}.$$

1. Vérifier que

$$H_{n+1}(x) = -H'_n(x) + 2xH_n(x).$$

2. Vérifier que  $H_n$  est un polynôme de degré  $n$ .
3. Montrer que pour tout  $n \geq 0$ , on a

$$\left(\frac{d}{dx} + 2x\right)\psi_0(x) = 0, \quad -\frac{d}{dx}\psi_n(x) = \sqrt{2(n+1)}\psi_{n+1}(x).$$

4. Montrer que les  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  forment un système orthonormal dans  $L^2(\mathbb{R})$ . Pour calculer  $\langle \psi_q | \psi_p \rangle$ , on pourra intégrer par parties  $p$  (ou  $q$ ) fois.

## Exercice 10 : polynômes de Legendre

On définit, pour tout  $(n, x) \in \mathbb{N} \times [-1, 1]$ ,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n).$$

1. Calculer  $P_0, P_1$  et  $P_2$ .
2. Soit, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $e_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n$ . Montrer que  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  forme un système orthonormal dans  $L^2([-1, 1])$ .
3. Montrer que  $(e_n)$  est une base hilbertienne.

*Indication* : on pourra utiliser le théorème de Stone-Weierstrass.

## Exercice 11 : polynômes de Laguerre

On considère  $L^2(\mu)$  où  $\mu$  est la mesure  $e^{-x} dx$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

1. Démontrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$$

est un polynôme de degré  $n$ .

2. Calculer le produit scalaire  $\langle L_n | x^k \rangle$  pour tout  $0 \leq k \leq n$ . En déduire que  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un système orthonormal dans  $L^2(\mu)$ .
3. Démontrer que si  $\alpha$  est un réel positif ou nul, alors

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha x} L_n(x) e^{-x} dx \right)^2 = \frac{1}{2\alpha + 1}.$$

En déduire que la fonction  $\phi_\alpha : x \mapsto e^{-\alpha x}$  appartient à l'adhérence dans  $L^2(\mu)$  de l'espace vectoriel engendré par la suite  $(L_n)$ .

4. Démontrer que la famille  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est totale dans  $C(\mathbb{R}_+)$  (pour la norme de  $L^2(\mu)$ ).
5. En déduire que  $(L_n)$  est une base hilbertienne.