

INTRODUCTION À LA TOPOLOGIE NON-COMMUTATIVE

AMAURY FRESLON

1. INTRODUCTION

1.1. Qu'est-ce que la topologie non-commutative ? Le terme topologie non-commutative laisse généralement perplexé, ou amène la question suivante : « Mais qu'est-ce qui commute en topologie ? ». La question est intéressante, car il a fallu attendre plusieurs décennies pour qu'un résultat classique de théorie des algèbres d'opérateurs soit interprété en termes topologiques. En effet, le théorème 3.4 affirme qu'il existe une correspondance parfaite entre les espaces topologiques et les C^* -algèbres commutatives. Il suffit donc de prendre des C^* -algèbres non-commutatives pour faire de la topologie non-commutative !

Cette approche est extrêmement fructueuse, comme nous le verrons. En effet, la correspondance précédente respecte un certain nombre d'opérations, et permet notamment de transporter des théories de topologie algébrique usuelle au cadre plus général des C^* -algèbres. L'une de ces théories, la K -théorie, fournit un outil particulièrement puissant pour leur étude.

1.2. Organisation du texte. Les C^* -algèbres peuvent être abordées selon des points de vue assez différents. Le fait qu'elles se trouvent ainsi au confluent de diverses théories est un avantage pour leur étude. Nous nous intéressons ici aux trois aspects principaux : le point de vue abstrait, le point de vue topologique et le point de vue hilbertien.

Du point de vue abstrait, les C^* -algèbres forment une classe particulière de \mathbb{C} -algèbres de Banach. On peut donc leur appliquer tous les résultats usuels de la théorie des algèbres de Banach, notamment la théorie spectrale et le calcul fonctionnel. Nous rappelons certains de ces résultats dans la première partie.

Le calcul fonctionnel, qui ne se fait en général que pour des fonctions holomorphes, peut être étendu dans le cadre des C^* -algèbres aux fonctions continues. Ceci suggère d'étudier de plus près l'importance des C^* -algèbres de fonctions. Cette étude culmine avec le théorème de Gel'fand-Naimark 3.4 qui nous permet d'introduire la notion d'espace non-commutatif (ou espace quantique).

Pour conclure cette section, nous abordons le point de vue hilbertien. Il s'agit ici de *représenter* une C^* -algèbre par des opérateurs agissant

sur un espace de Hilbert. On peut alors réaliser toute C^* -algèbre comme une algèbre de tels opérateurs.

Ce document est en fait un résumé du premier chapitre de [2]. Le lecteur qui voudrait avoir à portée de main les résultats et les preuves d'analyse fonctionnelle peut consulter [1] qui couvre également les bases de la théorie des C^* -algèbres.

2. ALGÈBRES DE BANACH ET C^* -ALGÈBRES

Nous dirons qu'une \mathbb{C} -algèbre est *unifère* si elle possède une unité (le terme *unitaire* sera réservé à certains éléments des algèbres). Nous commençons par rappeler la définition d'une \mathbb{C} -algèbre de Banach.

Définition 2.1. Une \mathbb{C} -algèbre de Banach est une \mathbb{C} -algèbre normée complète $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ telle que pour tous $x, y \in \mathcal{A}$,

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|.$$

Définition 2.2. Soit \mathcal{A} une \mathbb{C} -algèbre, une *involution* sur \mathcal{A} est une application $*$: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ qui est

- *additive* : pour tous $a, b \in \mathcal{A}$, $(a + b)^* = a^* + b^*$.
- *antilinéaire* : pour tout $a \in \mathcal{A}$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda a)^* = \bar{\lambda}a^*$.
- *antimultiplicative* : pour tous $a, b \in \mathcal{A}$, $(ab)^* = b^*a^*$.

Définition 2.3. Une *C^* -algèbre* est une \mathbb{C} -algèbre de Banach \mathcal{A} munie d'une involution $*$ telle que pour tout $x \in \mathcal{A}$,

$$\|x^*x\| = \|x\|^2.$$

Nous ne donnons pas ici les définitions de sous- C^* -algèbres, sous- C^* -algèbres engendrée par une partie et morphismes de C^* -algèbres. Signalons tout de même que ces derniers seront appelés **-homomorphismes*. Nous nous attardons par contre sur la notion d'idéal.

Définition 2.4. Soit \mathcal{A} une C^* -algèbre. On appelle *idéal* de \mathcal{A} tout idéal bilatère fermé de \mathcal{A} . Un tel idéal est automatiquement auto-adjoint (i.e. stable par l'application $*$).

Exemple 2.5. Comme nous le verrons dans la suite, les exemples suivants sont en fait très généraux.

- (1) Soit X un espace topologique compact (donc séparé). On note $C(X)$ l'algèbre des fonctions continues sur X à valeurs dans \mathbb{C} , les opérations étant définies ponctuellement. Munie de la norme infinie, $C(X)$ est une \mathbb{C} -algèbre de Banach commutative. Si on pose de plus, pour tout $f \in C(X)$ et tout $x \in X$, $f^*(x) = \overline{f(x)}$, $C(X)$ devient une C^* -algèbre commutative possédant de plus une unité (la fonction constante égale à 1).
- (2) Si on ne suppose plus X compact mais seulement localement compact, on dit qu'une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ est *nulle à l'infini* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de X telle

que $|f(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in X \setminus K$. On peut alors munir, en s'inspirant de l'exemple précédent, l'algèbre $C_0(X)$ des fonctions continues s'annulant à l'infini sur X d'une structure de C^* -algèbre commutative (cette fois-ci sans unité si X n'est pas compact).

- (3) Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés (i.e. continus) sur \mathcal{H} . On munit $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de la norme subordonnée à la norme euclidienne et de l'adjonction (qui est une involution), c'est alors une C^* -algèbre. De plus, toute sous-algèbre fermée stable par passage à l'adjoint de cette algèbre est également une C^* -algèbre.

Dans toute la suite de cette section, \mathcal{A} désigne une C^* -algèbre unifière (c'est-à-dire possédant une unité). Le dernier exemple suggère les définitions suivantes.

Définition 2.6. Soit a un élément de \mathcal{A} ,

- (1) On dit que a est *autoadjoint* si $a^* = a$.
- (2) On dit que a est *normal* si $a^*a = aa^*$.
- (3) On dit que a est un *projecteur* si $a^2 = a^* = a$.
- (4) On dit que a est une *isométrie* si $a^*a = 1$.
- (5) On dit que a est *unitaire* si $a^*a = 1 = aa^*$.
- (6) On définit le *spectre* de a , noté $\sigma(a)$, par

$$\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (a - \lambda.1) \text{ n'est pas inversible}\}.$$

Remarque 2.7. Nous ne donnons pas ici toutes les propriétés élémentaires concernant les C^* -algèbres, mais l'analogie peut être poussée bien plus loin. Par exemple, un élément autoadjoint a toujours un spectre réel. On dit qu'un autoadjoint est *positif* si son spectre est inclus dans \mathbb{R}_+ et on vérifie qu'un élément est positif si et seulement s'il s'écrit x^*x pour un certain $x \in A$.

Remarque 2.8. Les propositions (1) à (2) font encore sens si \mathcal{A} n'est pas unifière. Pour les autres, il faut commencer par ajouter une unité à \mathcal{A} à l'aide du résultat suivant afin de donner un sens aux définitions.

Proposition 2.9. Soit \mathcal{A} une C^* -algèbre, il existe une unique C^* -algèbre unifière (à isomorphisme unifière près) $\tilde{\mathcal{A}}$ telle que \mathcal{A} soit un idéal de $\tilde{\mathcal{A}}$ et que le quotient $\tilde{\mathcal{A}}/\mathcal{A}$ soit isomorphe à \mathbb{C} . De plus, si \mathcal{A} est unifière alors $\tilde{\mathcal{A}} \cong \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$.

Remarque 2.10. Ce résultat est en fait la généralisation non-commutative du théorème de compactification d'Alexandroff.

Proposition 2.11. Soit \mathcal{A} une \mathbb{C} -algèbre de Banach, alors pour tout a dans \mathcal{A} , $\sigma(a)$ est un compact non-vidé de \mathbb{C} .

Définition 2.12. On appelle *rayon spectral* de a le réel

$$r(a) := \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Les quelques résultats suivants montrent que les notions purement algébrique précédentes permettent en fait de retrouver la norme (c'est-à-dire toute l'information topologique) d'une C^* -algèbre. Nous donnons aussi une application importante à la caractérisation de l'injectivité d'un $*$ -homomorphisme.

Proposition 2.13. *Soit \mathcal{A} une C^* -algèbre et $a \in \mathcal{A}$, alors on a $r(a) = \lim \|a^n\|^{1/n}$. De plus, si a est normal alors on a $r(a) = \|a\|$.*

Proposition 2.14. *Soit \mathcal{A} une C^* -algèbre et $a \in \mathcal{A}$, alors*

$$\|a\| = \sqrt{r(a^*a)}.$$

Corolaire 2.15. *Soit \mathcal{A} et \mathcal{B} deux C^* -algèbres et $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un $*$ -homomorphisme. Alors φ est injectif si et seulement s'il est isométrique.*

Nous rappelons le théorème suivant, dû à Riesz, sur les \mathbb{C} -algèbres de Banach (voir par exemple [1] pour une démonstration).

Théorème 2.16 (Calcul fonctionnel holomorphe). *Soit \mathcal{A} une algèbre de Banach unifiée et $a \in \mathcal{A}$, G un ouvert de \mathbb{C} contenant $\sigma(a)$ et $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ un contour orienté enlaçant $\sigma(a)$ et f une fonction holomorphe sur G , alors la formule*

$$f(a) := \int_{\Gamma} f(z)(z - a)^{-1} dz$$

définit un élément de \mathcal{A} indépendant du contour choisi. De plus,

- (1) L'application $\text{Hol}(a) \rightarrow \mathcal{A}$ est un morphisme de \mathbb{C} -algèbres, $\text{Hol}(a)$ désignant l'algèbre des fonctions holomorphes au voisinage de $\sigma(a)$.
- (2) Si $f(z) = \sum \alpha_k z^k$ a un rayon de convergence $r > r(a)$ alors

$$f(a) = \sum \alpha_k a^k.$$

Dans le cas des C^* -algèbres, le résultat précédent peut être considérablement amélioré pour les éléments normaux, c'est l'objet du théorème suivant. Remarquons que si $P \in \mathbb{C}[X]$, on peut sans difficulté définir $P(a)$ pour a dans une \mathbb{C} -algèbre quelconque.

Théorème 2.17 (Calcul fonctionnel continu). *Soit \mathcal{A} une C^* -algèbre et $a \in \mathcal{A}$ un élément normal. Alors l'application $P \mapsto P(a)$, définie sur les fonctions polynômiales sur $\sigma(a)$ est une isométrie. Elle admet donc par le théorème de Stone-Weierstrass un unique prolongement en une application*

$$C(\sigma(a)) \rightarrow C^*(a)$$

qui est en fait un isomorphisme (isométrique). De plus, on a alors pour tout $f \in C(\sigma(a))$,

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)).$$

Remarque 2.18. La dernière partie de ce théorème est parfois connue sous le nom de *théorème spectral*.

3. LE CAS COMMUTATIF

Nous allons maintenant généraliser le résultat précédent. Dans cette section, \mathcal{A} désigne une C^* -algèbre commutative unifère.

Définition 3.1. Le *spectre* de \mathcal{A} est l'ensemble des morphismes d'algèbres de \mathcal{A} dans \mathbb{C} , noté $\text{Spec}(\mathcal{A})$.

Remarque 3.2. Le terme *spectre* et la notation $\text{Spec}(\mathcal{A})$ peuvent paraître surprenants. Cependant, le théorème de Gel'fand-Mazur assure que dans le cas commutatif ce $\text{Spec}(\mathcal{A})$ est homéomorphe au spectre maximal (i.e. l'ensemble des idéaux maximaux muni de sa topologie de Jacobson) de \mathcal{A} (qui est lui-même alors homéomorphe au spectre premier).

Proposition 3.3. Soit $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ un morphisme d'algèbres, alors φ est continu et $\|\varphi\| \leq 1$.

En vertu de la proposition précédente et du théorème de Banach-Alaoglu qui affirme que la boule unité de \mathcal{A}^* muni de sa topologie faible-* est un espace compact, on voit que $\text{Spec}(\mathcal{A})$ est un espace compact. On peut alors définir l'application suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\rightarrow C(\text{Spec}(\mathcal{A})) \\ a &\mapsto (h \mapsto h(a)) \end{aligned}$$

appelée *transformation de Gel'fand*. Le résultat essentiel est le suivant :

Théorème 3.4 (Gel'fand–Naimark, première version). *La transformation de Gel'fand est un isomorphisme.*

Ainsi toute C^* -algèbre commutative unifère est en fait isomorphe à l'algèbre des fonctions continues sur un espace compact. Si \mathcal{A} n'est pas unifère, on commence par lui adjoindre une unité pour appliquer ensuite le théorème précédent qui donne un isomorphisme entre \mathcal{A} et l'algèbre des fonctions nulles à l'infini sur un espace localement compact.

Le résultat précédent est en fait plus fort si on l'exprime dans le langage des catégories :

Théorème 3.5 (Gel'fand–Naimark, deuxième version). *La transformation de Gel'fand définit une équivalence de catégories (contravariante) entre la catégories des C^* -algèbres commutatives munies des *-homomorphismes et la catégorie des espaces topologiques localement*

compacts munis des applications propres. En fait, la transformation de Gel'fand est l'inverse du foncteur $X \mapsto C_0(X)$.

La signification essentielle du théorème précédent est que la totalité de l'information topologique d'un espace localement compact X est « codée » de façon algébrique dans $C_0(X)$. On peut donc établir un dictionnaire entre ces deux objets, la liste suivante en est un aperçu.

Espace topologique		C*-algèbre
compact	\longleftrightarrow	unifère
connexe	\longleftrightarrow	sans projecteur (non-trivial)
σ -compact	\longleftrightarrow	σ -unifère
à base dénombrable d'ouverts	\longleftrightarrow	séparable
ouverts	\longleftrightarrow	idéaux bilatères fermés
ouverts denses	\longleftrightarrow	idéaux essentiels
fermés	\longleftrightarrow	quotients
compactification	\longleftrightarrow	unitarisation

On peut formaliser la correspondance précédente par le vocabulaire suivant. Il ne faut toutefois pas attacher une trop grande importance au terme « quantique ».

Définition 3.6. Une C*-algèbre (éventuellement non-commutative) est appelée *espace quantique*. Si elle est commutative, on dit alors qu'il s'agit d'un *espace classique*.

Remarque 3.7. Certains auteurs, préférant que les équivalences de catégories soient covariantes, définissent la catégorie des espaces quantiques comme la catégorie opposée de celle des C*-algèbres.

4. LE POINT DE VUE HILBERTIEN

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, il existe un troisième point de vue consistant à voir les éléments d'une C*-algèbre comme des opérateurs agissant sur un espace de Hilbert. Ce point de vue présente l'avantage d'être très concret, et permet ensuite d'utiliser des outils d'analyse fonctionnelle.

Définition 4.1. Soit \mathcal{A} une C*-algèbre, une *représentation* de \mathcal{A} est la donnée d'un espace de Hilbert \mathcal{H} et d'un *-homomorphisme

$$\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Une représentation est dite *fidèle* si π est injectif, elle est dite *non-dégénérée* si $\pi(\mathcal{A})\mathcal{H}$ est dense dans \mathcal{H} . S'il existe un vecteur $\xi \in \mathcal{H}$ tel que $\pi(\mathcal{A})\xi$ est dense dans \mathcal{H} , la représentation est dite *cyclique* (et ξ est appelé *vecteur cyclique*).

Définition 4.2. Soit \mathcal{A} une C^* -algèbre, un *état* sur \mathcal{A} est une forme linéaire positive de norme 1.

Exemple 4.3. Soit (π, \mathcal{H}) une représentation cyclique et ξ un vecteur cyclique, alors l'application

$$x \in \mathcal{A} \mapsto \langle \xi, \pi(x)\xi \rangle$$

définit un état sur \mathcal{A} . Le résultat suivant, souvent appelé *construction GNS* (pour Gel'fand, Naimark et Segal), donne une réciproque de cette construction.

Théorème 4.4 (Construction GNS). *Soit \mathcal{A} une C^* -algèbre et ρ un état sur \mathcal{A} . Alors il existe une représentation cyclique (π, \mathcal{H}) de \mathcal{A} et un vecteur cyclique ξ tels que pour tout $x \in \mathcal{A}$, $\rho(x) = \langle \xi, \pi(x)\xi \rangle$.*

Définition 4.5. Soit \mathcal{A} une C^* -algèbre, une représentation (π, \mathcal{H}) de \mathcal{A} est irréductible s'il n'existe pas de sous-espace fermé non-trivial de \mathcal{H} stable par \mathcal{A} .

La question se pose naturellement de savoir quels états donnent des représentations irréductibles. Remarquons tout d'abord que les états d'une C^* -algèbre \mathcal{A} forment un convexe fermé pour la topologie faible- $*$ sur \mathcal{A}^* . Un point extrémal de ce convexe est appelé *état pur*. On a alors le résultat suivant :

Proposition 4.6. *Soit \mathcal{A} une C^* -algèbre et (π, \mathcal{H}) une représentation cyclique de \mathcal{A} . Cette représentation est irréductible si et seulement si l'état associé est pur.*

Le résultat dit en fait qu'une C^* -algèbre possède toujours assez de représentations irréductibles pour construire une représentation fidèle (il suffit en fait de prendre la somme des représentations GNS associées à tous les états \mathcal{A}).

Théorème 4.7 (Gel'fand, Naimark). *Soit \mathcal{A} une C^* -algèbre quelconque, alors \mathcal{A} possède une représentation fidèle. Autrement dit, il existe un espace de Hilbert \mathcal{H} tel que \mathcal{A} soit isomorphe à une sous-algèbre fermée stable par passage à l'adjoint de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

RÉFÉRENCES

- [1] J. B. Conway, *A course in functional analysis*, Springer, 1990.
- [2] ———, *A course in operator theory*, American Mathematical Society, 2000.

E-mail address: amaury.freslon@ens.fr

URL: <http://www.eleves.ens.fr/home/freslon>