
**LE THÉORÈME DE POINCARÉ-BENDIXSON ET SON APPLICATION
AU MODÈLE DU BRUXELLATEUR**

par

Amaury Freslon

Table des matières

1. Introduction	2
2. Préliminaires au théorème de Poincaré-Bendixson	2
3. Le théorème de Poincaré-Bendixson	6
4. Application au modèle du Bruxellateur	7
5. Annexes	10
Références	17

1. Introduction

Les phénomènes physiques sont très souvent modélisés à l'aide d'équations différentielles car celles-ci permettent de rendre compte de la dépendance de ces phénomènes par rapport au temps. La résolution explicite de ces équations est généralement impossible, elle n'est faisable que dans des cas simplifiés qui représentent donc l'évolution du système dans des conditions très précises. L'essentiel n'est cependant pas nécessairement d'obtenir une forme explicite des solutions, mais plutôt de connaître leur comportement ou leur réaction à certaines perturbations. C'est là tout l'enjeu de l'*étude qualitative* des équations différentielles.

Nous allons nous intéresser dans ce travail à un théorème classique dans ce domaine, le *théorème de Poincaré-Bendixson*. Ce théorème donne des informations sur certaines solutions de systèmes dynamiques qui permettent de connaître leur comportement quand le temps tend vers l'infini, ce qui physiquement doit correspondre au comportement du système au bout d'un temps raisonnablement long. De tels problèmes de stabilité asymptotique sont extrêmement importants. Il est en effet essentiel de savoir comment un système se comporte une fois mis en place, de savoir s'il va se stabiliser ou si au contraire il va osciller, voire se comporter de façon totalement chaotique. Nous allons donc présenter le contexte et les outils nécessaires au théorème de Poincaré-Bendixson avant de l'énoncer et de le démontrer.

Nous allons ensuite appliquer le théorème de Poincaré-Bendixson à une situation précise afin de voir son utilité et sa pertinence physique. Nous étudierons pour cela une situation issue de la chimie, celle des réactions oscillantes. Notre étude mathématique sera purement théorique pour pouvoir rester simple. Nous nous intéresserons cependant également à un cas concret, l'expérience de Bélousov-Zabotinsky, célèbre oscillateur chimique que nous avons réalisé expérimentalement et que nous présenterons. Nous pourrions alors constater que le théorème de Poincaré-Bendixson prévoit le comportement du système au bout de quelques minutes.

2. Préliminaires au théorème de Poincaré-Bendixson

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$(1) \quad \dot{x} = f(x)$$

avec $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n . Le flot de cette équation différentielle sera noté $\phi_t(x)$ et nous admettrons que l'application $\phi : (x, t) \mapsto \phi_t(x)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R} \times \Omega$. Pour $x \in \Omega$, on définit son *ensemble limite*

$$\omega(x) := \bigcap_{t \geq 0} \overline{\{\phi_s(x), s \geq t\}}.$$

On définit également les courbes

$$\gamma(x) = \{\phi_t(x), t \in \mathbb{R}\} \text{ et } \gamma_+(x) = \{\phi_t(x), t \geq 0\}.$$

2.1. Propriétés du flot et des ensembles limites. — Remarquons tout d'abord que l'équation différentielle (1) peut se réécrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_t(x) = f(\phi_t(x)).$$

Remarquons également que, l'équation étant autonome (i.e. f ne dépendent pas du temps), on a

$$\phi_{t+s}(x) = \phi_t(\phi_s(x)).$$

Nous allons maintenant montrer deux relations entre le flot et les ensembles limites. Premièrement, l'ensemble limite d'un point x est celui de tout point de la courbe $\gamma(x)$.

Proposition 2.1. — *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\omega(x) = \omega(\phi_t(x))$.*

Démonstration. — Soit $y \in \omega(x)$, il existe une suite $t_n \rightarrow +\infty$ telle que

$$\phi_{t_n}(x) \rightarrow y.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$ et $z = \phi_t(x)$, on a alors

$$u_n = t_n - t \rightarrow +\infty$$

et

$$\phi_{u_n}(z) = \phi_{t_n}(x) \rightarrow y,$$

donc $y \in \omega(z)$. Ainsi $\omega(x) \subset \omega(z)$ et, par symétrie, $\omega(x) = \omega(z) = \omega(\phi_t(x))$. □

Deuxièmement, tout ensemble limite est invariant sous le flot.

Proposition 2.2. — *Pour tout $y \in \omega(x)$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_t(y) \in \omega(x)$.*

Démonstration. — Soit (t_n) une suite telle que $t_n \rightarrow +\infty$ et

$$\phi_{t_n}(x) \rightarrow y.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$ et $u_n := t + t_n$, alors

$$\phi_{u_n}(x) = \phi_t(\phi_{t_n}(x)) \rightarrow \phi_t(y)$$

quand $n \rightarrow +\infty$ par continuité du flot et $\phi_t(y) \in \omega(x)$. □

Enfin nous allons établir une propriété topologique sur $\omega(x)$.

Proposition 2.3. — *Si $\omega(x)$ est compact, alors il est connexe.*

Démonstration. — En effet, si $\omega(x)$ est compact alors la courbe $\gamma_+(x)$ est bornée (voir Proposition 5.1). De plus, on peut écrire

$$\omega(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\{\phi_s(x), s \geq t\}}.$$

Comme pour tout $t \geq t_0$ l'ensemble

$$\overline{\{\phi_s(x), s \geq t\}}$$

est connexe et compact (car fermé et borné), $\omega(x)$ est un compact connexe comme intersection décroissante d'une famille de compacts connexes (voir Proposition 5.4). \square

2.2. Théorème de redressement du flot. — Nous allons maintenant établir un résultat technique essentiel pour la preuve du théorème de Poincaré-Bendixson, le *théorème de redressement du flot*.

Théorème 2.4. — *Supposons que 0 est un point régulier de f (le résultat étant valable par translation en tout point régulier de Ω). Soit \mathcal{H} un hyperplan de \mathbb{R}^n transverse à $f(0)$ (c'est à dire tel que $f(0) \notin \mathcal{H}$) et*

$$\Gamma : \begin{cases} \mathcal{H} \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x, t) & \mapsto & \phi_t(x) \end{cases} .$$

Alors Γ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme local au voisinage de 0.

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que

$$\Gamma|_{\mathcal{H} \times \{0\}} = \text{Id}_{\mathcal{H}} .$$

De plus, en notant g l'application $t \mapsto \Gamma(0, t)$, on a

$$g'(0) = \frac{\partial \phi_t(0)}{\partial t}(0) = f(\phi_0(0)) = f(0) .$$

Ainsi, dans une base adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \oplus \mathcal{H}$, la matrice de $\mathbf{D}_{(0,0)}\Gamma$ s'écrit

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & a_1 \\ & & & \vdots \\ & & & a_{n-1} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & a_n \end{array} \right)$$

où a_1, \dots, a_n sont les coordonnées de $f(0)$ dans la base. Comme $f(0) \notin \mathcal{H}$, a_n est non nul et cette matrice est inversible. Donc $\mathbf{D}_{(0,0)}\Gamma$ est inversible. D'après le théorème d'inversion locale (voir théorème 5.8), il existe un voisinage ouvert \mathcal{W} de $(0,0)$ dans $\mathcal{H} \times \mathbb{R}$, un voisinage ouvert \mathcal{V} de 0 dans \mathbb{R}^n (appelé *boite à flot* au voisinage de 0) et une application

$$\Gamma^{-1} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$$

de classe \mathcal{C}^1 telle que la restriction

$$\Gamma : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V}$$

soit un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme d'inverse Γ^{-1} . \square

On notera désormais $\mathcal{S} = \mathcal{H} \cap \mathcal{V}$. L'ensemble \mathcal{S} est appelé *section locale* en 0. Si une solution $\gamma(x)$ entre dans \mathcal{V} , son image par Γ^{-1} entre dans \mathcal{W} et il existe un instant t tel que $\Gamma^{-1}(\phi_t(x)) \in \mathcal{W} \cap \mathcal{H}$. Alors, $\phi_t(x) \in \Gamma(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$. Ainsi, toute solution qui entre dans une boite à flot coupe la section locale. Le dessin suivant illustre le redressement d'un flot de classe \mathcal{C}^1 en un flot trivial.

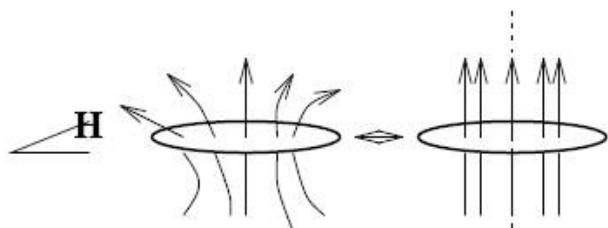


FIGURE 1. Un exemple de boîte à flot

2.3. Suites monotones le long d'une section locale. — Nous nous plaçons désormais dans le cas particulier de la dimension 2. Les sections locales seront donc des segments. On peut définir de manière naturelle la monotonie d'une suite de points sur un segment. De même, on peut définir la monotonie d'une suite de points sur une trajectoire : (x_n) est monotone sur $\gamma(x)$ s'il existe suite croissante (t_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \phi_{t_n}(x)$. Nous allons voir que ces deux notions de monotonies sont en fait liées.

Proposition 2.5. — Soit $\gamma(x)$ la trajectoire d'une solution. Soient $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}^+$ et $y_1 = \phi_{t_1}(x), y_2 = \phi_{t_2}(x), y_3 = \phi_{t_3}(x)$ trois points d'intersection de $\gamma(x)$ avec une section locale \mathcal{S} . Si la suite t_1, t_2, t_3 est monotone, alors la suite y_1, y_2, y_3 l'est aussi.

Démonstration. — On peut sans perte de généralité supposer que la solution dont $\gamma(x)$ est la trajectoire est maximale. On note \mathcal{C} la courbe continue, fermée et simple suivante

$$\mathcal{C} = [y_1, y_2] \cup \{\phi_t(x), t_1 \leq t \leq t_2\}.$$

D'après le lemme de Jordan, son complémentaire dans le plan a deux composantes connexes, une bornée et une non-bornée. Notons \mathcal{P} la composante connexe bornée. Par le théorème de redressement du flot, les trajectoires passant par $[y_1, y_2]$ soit entrent toutes dans \mathcal{P} , soit en sortent toutes. Supposons qu'elles entrent toutes (l'autre cas étant similaire). D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, aucune trajectoire ne peut couper $\gamma(x)$ sauf si elle est déjà incluse dans $\gamma(x)$, et \mathcal{P} est positivement invariant. Si $\gamma(x)$ coupe \mathcal{S} en un point $y_3 = \phi_{t_3}(x)$ avec $t_3 > t_2$, alors $y_3 \in \mathcal{S} \cap \mathcal{P}$ et $y_3 \notin [y_1, y_2]$ car les trajectoires y sont entrantes. La suite y_1, y_2, y_3 est donc monotone sur \mathcal{S} . \square

Le corollaire suivant est la clef de la démonstration du théorème de Poincaré-Bendixson.

Corollaire 2.6. — Soit γ une trajectoire incluse dans un ensemble limite $\omega(x)$ et \mathcal{S} une section locale. Alors γ coupe \mathcal{S} au plus une fois.

Démonstration. — Supposons que γ coupe \mathcal{S} en deux points y_1 et y_2 . Prenons \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 deux boîtes à flot disjointes au voisinage respectivement de y_1 et y_2 . La courbe

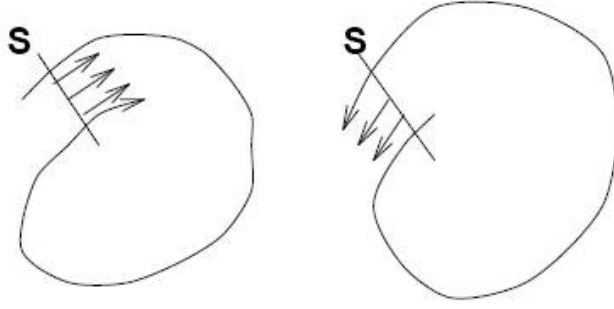


FIGURE 2. A gauche les solutions sont toutes entrantes, à droite elle sont toutes sortantes

$\gamma(x)$ entre une infinité de fois dans \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 par définition de l'ensemble limite, donc $\gamma(x)$ coupe $\mathcal{S} \cap \mathcal{V}_1$ et $\mathcal{S} \cap \mathcal{V}_2$ une infinité de fois, ce qui permet de définir une suite $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ monotone sur $\gamma(x)$ telle que pour tout i , $a_i \in \mathcal{S} \cap \mathcal{V}_1$ et $b_i \in \mathcal{S} \cap \mathcal{V}_2$. Comme $\mathcal{S} \cap \mathcal{V}_1$ et $\mathcal{S} \cap \mathcal{V}_2$ sont disjoints, cette suite n'est pas monotone sur \mathcal{S} , ce qui contredit le lemme précédent. Il n'y a donc au plus qu'un point d'intersection. \square

3. Le théorème de Poincaré-Bendixson

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer le théorème de Poincaré-Bendixson.

Théorème 3.1. — *Soit l'équation différentielle*

$$\dot{x} = f(x)$$

avec $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe \mathcal{C}^1 . Soit $x \in \Omega$ tel que $\omega(x)$ est non vide, compact, et ne contient aucun point d'équilibre. Alors $\omega(x)$ est une orbite périodique.

Démonstration. — Montrons d'abord que $\omega(x)$ contient une trajectoire périodique. Soit $y \in \omega(x)$, $\omega(y)$ n'est pas vide car $\omega(x)$ est compact. Soit $z \in \omega(y)$ qui n'est pas un point d'équilibre. Soit \mathcal{S} une section locale en z et \mathcal{V} la boîte à flot correspondante. La courbe $\gamma(y)$ entre une infinité de fois dans \mathcal{V} , donc coupe \mathcal{S} une infinité de fois. Or, d'après la propriété précédente, $\gamma(y) \cap \mathcal{S}$ est réduit à un point (il n'est pas vide car il contient z). Donc à chaque fois que $\gamma(y)$ entre dans \mathcal{V} , elle coupe \mathcal{S} en z . Ainsi il existe $a > b$ tels que $\phi_a(y) = \phi_b(y)$. Alors, $\phi_{a-b}(y) = y$ et $a - b > 0$ donc la trajectoire de y est périodique. Il reste à montrer que $\omega(x)$ est réduit à $\gamma(y)$. Soit $a \in \gamma(y)$, soit \mathcal{V}_a une boîte à flot ouverte au voisinage de a et soit \mathcal{S} la section locale correspondante. Soit $z \in \omega(x) \cap \mathcal{V}_a$. La trajectoire de z coupe \mathcal{S} en un unique point b . La trajectoire de x entre une infinité de fois dans \mathcal{V}_a et coupe à chaque fois \mathcal{S} en un point x_n , la suite x_n étant monotone sur \mathcal{S} . Or il existe une sous-suite $x_{\varphi(n)}$ qui tend vers a et une autre $x_{\psi(n)}$ qui tend vers b . Ceci n'est possible que si $a = b$. Par le théorème de

Cauchy-Lipschitz on a alors $\gamma(z) \subset \gamma(a) = \gamma(y)$. Ainsi $\omega(x) \cap \mathcal{V}_a = \gamma(y) \cap \mathcal{V}_a$. Définissons maintenant un ouvert \mathcal{V} par

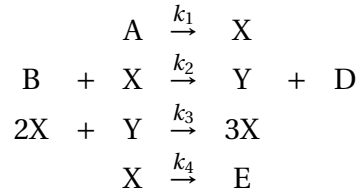
$$\mathcal{V} = \bigcup_{a \in \gamma(y)} \mathcal{V}_a.$$

Alors, \mathcal{V} est un voisinage ouvert de $\gamma(y)$ et $\omega(x) \cap \mathcal{V}$ est un voisinage ouvert de $\gamma(y)$ dans $\omega(x)$. Comme $\omega(x) \cap \mathcal{V} = \gamma(y)$, $\gamma(y)$ est ouvert dans $\omega(x)$ qui est connexe. Comme $\gamma(y)$ est fermée dans Ω et donc aussi dans $\omega(x)$, on a bien $\omega(x) = \gamma(y)$. \square

4. Application au modèle du Bruxellateur

4.1. Etude théorique du Bruxellateur. —

4.1.1. Position du problème. — Nous allons maintenant appliquer le théorème de Poincaré-Bendixson à un système dynamique plan afin de prouver l'existence d'un cycle limite. Le système dynamique que nous allons étudier est un système chimique oscillant purement théorique, baptisé Bruxellateur et inventé en 1968 par I. Prigogine et R. Lefever dans [LP65]. Ce système fait intervenir 6 espèces fictives A, B, D, E, X et Y. Les espèces A, B, D et E seront supposées en quantités constantes tout au long de la réaction. Les équations des réactions sont



En supposant que ces réactions suivent la loi de Van't Hoff, on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} \dot{X} = k_1 A - k_2 B X + k_3 X^2 Y - k_4 X \\ \dot{Y} = k_2 B X - k_3 X^2 Y \end{cases}.$$

4.1.2. Etude de la stabilité du système. — Pour simplifier l'étude, nous allons effectuer les changements de variables suivants :

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{k_3}{k_4}} X \\ y &= \sqrt{\frac{k_3}{k_4}} Y \\ \tau &= k_4 t \\ a &= \sqrt{\frac{k_3}{k_4}} \frac{k_1 A}{k_4} \\ b &= \frac{k_2 B}{k_4}. \end{aligned}$$

Le système s'écrit alors

$$\begin{cases} \dot{x}(\tau) &= a - bx + x^2y - x \\ \dot{y}(\tau) &= bx - x^2y \end{cases}.$$

On pose

$$f(x, y) = (a - bx + x^2y - x, bx - x^2y) \text{ et } \xi = \left(a, \frac{b}{a}\right).$$

Remarquons que ξ est l'unique point d'équilibre de l'équation

$$(\dot{x}, \dot{y}) = f(x, y).$$

Nous allons nous intéresser à la stabilité de ce point d'équilibre. Pour cela, il nous faut étudier la jacobienne du champ en ce point. Posons

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_f \left(a, \frac{b}{a}\right) = \begin{pmatrix} b-1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de \mathcal{J} est

$$\Pi_{\mathcal{J}} = X^2 - \text{Tr}(\mathcal{J})X + |\mathcal{J}|.$$

Comme $|\mathcal{J}| = a^2 > 0$, la stabilité dépend de la trace de \mathcal{J} qui est égale à $b - a^2 - 1$. Prenons $b > a^2 + 1$, alors la somme des deux valeurs propres est positive, donc elles sont de parties réelles positives. Le point fixe est alors répulsif (voir proposition 5.10).

4.1.3. Application du théorème de Poincaré-Bendixson. — Il reste à trouver une partie compacte du plan positivement invariante contenant cet équilibre. Ainsi une solution partant suffisamment loin de l'équilibre ne pourra tendre vers l'équilibre mais son ensemble limite (qui sera non vide par compacité) sera inclus dans un compact. Cet ensemble limite ne contenant pas l'équilibre, il sera, d'après le théorème de Poincaré-Bendixson, une orbite périodique. Notons K ce compact que nous allons construire. Nous allons imposer au champ d'être partout rentrant sur la frontière ∂K de K (afin d'assurer l'invariance). Prenons pour K la partie fermée et bornée (donc compacte) du plan délimitée par les quatre droites d'équations $x = 0$, $y = 0$, $y = \alpha - x$ et $y = \beta + x$, avec α et β des coefficients que nous allons calculer. On vérifie sans peine que sur la droite horizontale et la droite verticale, le champ est rentrant. En $(0, 0)$, le champ est colinéaire à la droite $y = 0$. Cependant, $y''(0) = ab > 0$ et la solution ne peut sortir. Pour $y = \alpha - x$, notons $\eta = (1, 1)$ un vecteur normal. Il suffit de calculer son produit scalaire avec le champ :

$$\langle f, \eta \rangle = a - x.$$

Pour que le champ soit rentrant, il faut que cette quantité soit négative, c'est à dire que $x > a$, ce qui ne nous donne pas de condition sur α . Il nous faut donc d'abord traiter le cas de la droite $y = \beta + x$, avec $\zeta = (-1, 1)$. On obtient alors la condition

$$-a + 2bx - 2x^2y + x < 0,$$

c'est-à-dire

$$y > \frac{(2b+1)x - a}{2x^2}.$$

Le maximum du membre de droite est

$$\frac{(2b+1)^2}{8a},$$

qui est une valeur convenable pour β . Les deux droites affines doivent se croiser en $x = a$, ce qui donne la valeur de $\alpha = 2a + \beta$. Finalement, on a

$$\alpha = 2a + \frac{(2b+1)^2}{8a} \text{ et } \beta = \frac{(2b+1)^2}{8a}.$$

Le théorème de Poincaré-Bendixson affirme alors l'existence dans ce compact d'un cycle limite qui est en fait une trajectoire périodique. Une modélisation sur *Maple* (avec $(a, b) = (1, 3)$) permet d'observer un tel cycle limite :

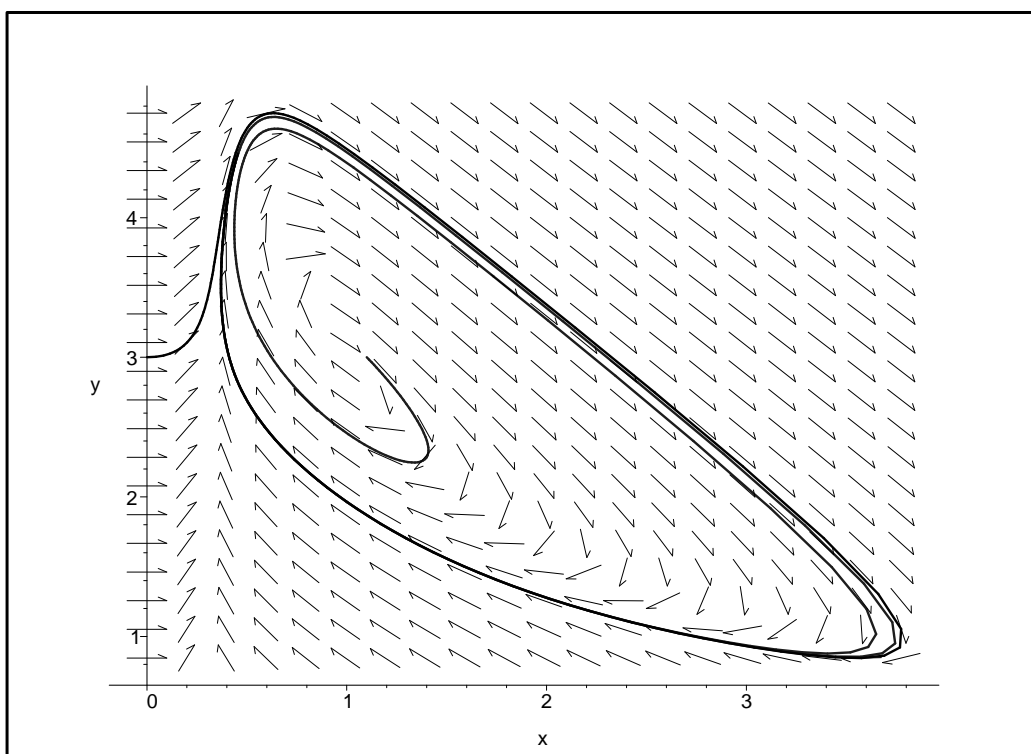


FIGURE 3. $(a, b) = (1, 3)$

On peut se demander s'il y a d'autres cycles limites dans K , voire dans tout le quart de plan $\{x > 0, y > 0\}$. Cette question n'est a priori pas facile à traiter, mais quelques essais sur *Maple* (voir section 5.4) tendent à prouver qu'il n'y a qu'un seul cycle limite. Quoiqu'il en soit, le cycle limite que nous possédons peut déjà être interprété physiquement. En effet, les trajectoires des solutions dont c'est l'ensemble limite vont

s'approcher indéfiniment du cycle et « s'enrouler » autour de lui. Nous pouvons observer expérimentalement ce cycle, dont l'existence est prévue par le théorème de Poincaré-Bendixson.

4.2. Réalisation de l'expérience de Belousov-Zabotinsky. — Pour ce faire, nous avons réalisé l'expérience de Belousov-Zabotinsky en couplant un conductimètre relié à une cellule plongée dans la solution avec un ordinateur. Les espèces intervenant dans cette réaction sont de l'acide malonique, du bromate de potassium, du bromure de potassium, du sulfate de cérium et de l'orthophénantroline ferreuse. Le logiciel *Regressi* a alors permis d'obtenir l'évolution de la conductivité en fonction du temps (voir section 5.5). On peut observer, après un temps de latence d'environ une minute et demie, des oscillations de la conductivité de la solution. L'étude mathématique de cette réaction est très lourde à cause du grand nombre d'équations mises en jeu par les différents modèles réactionnels existant. Le Bruxellateur présente une version simplifiée d'un mécanisme existant dans des réactions du type Belousov-Zabotinsky, et permet d'étudier les solutions de façon relativement simple.

5. Annexes

5.1. Connexité de l'ensemble limite. —

5.1.1. Compacité de l'ensemble limite. —

Proposition 5.1. — *Si $\omega(x)$ est compact alors $\gamma_+(x)$ est bornée.*

Démonstration. — Supposons $\gamma_+(x)$ non bornée, et prenons $\lambda > 0$ tel que $\omega(x)$ soit inclus dans la boule ouverte $B(0, \lambda)$. L'ensemble

$$\{t \in \mathbb{R}, \phi_t(x) \in B(0, \lambda)\}$$

est infini par définition de $\omega(x)$ (supposé non vide). De plus, $\gamma_+(x)$ n'étant pas bornée, l'ensemble

$$\{t \in \mathbb{R}, \phi_t(x) \notin B(0, \lambda)\}$$

est également infini. Par continuité de $\gamma_+(x)$, l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{t \in \mathbb{R}, \phi_t(x) \in S(0, \lambda)\}$$

doit alors être infini, S désignant la sphère. Comme $S(0, \lambda)$ est compacte, \mathcal{A} a un point d'accumulation dans $S(0, \lambda)$ et $\omega(x) \cap S(0, \lambda)$ n'est pas vide ce qui contredit $\omega(x) \subset B(0, \lambda)$. \square

5.1.2. Un lemme. —

Lemme 5.2. — *Soient K_1 et K_2 deux compacts non vides disjoints d'un espace topologique séparé E , alors il existe deux ouverts disjoints \mathcal{U} et \mathcal{V} de E tels que $K_1 \subset \mathcal{U}$ et $K_2 \subset \mathcal{V}$.*

Démonstration. — Soit $b \in K_2$, pour tout $a \in K_1$, $a \neq b$ donc il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}_{a,b}$ de a et un voisinage ouvert $\mathcal{V}_{a,b}$ de b disjoints (car E est séparé). Alors $(\mathcal{U}_{a,b})_{a \in K_1}$ est un recouvrement de K_1 par des ouverts donc il existe une partie finie K'_1 de K_1 telle que

$$K_1 \subset \bigcup_{a \in K'_1} \mathcal{U}_{a,b} = \mathcal{U}_b.$$

On en déduit que

$$\mathcal{V}_b = \bigcap_{a \in K'_1} \mathcal{V}_{a,b}$$

est un voisinage ouvert de b disjoint de \mathcal{U}_b . Par compacité de K_2 il existe une partie finie K'_2 de K_2 telle que

$$K_2 \subset \mathcal{V} = \bigcup_{b \in K'_2} \mathcal{V}_b.$$

Alors

$$\mathcal{U} := \bigcap_{b \in K'_2} \mathcal{U}_b$$

est un voisinage ouvert de K_1 disjoint de \mathcal{V} . Donc \mathcal{U} et \mathcal{V} conviennent. \square

5.1.3. *Cas d'une suite.* —

Proposition 5.3. — Soit (K_n) une suite décroissante (au sens de l'inclusion) de compacts connexes non vides d'un espace topologique séparé E . Alors

$$K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$$

est un compact connexe non vide.

Démonstration. — Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, prenons un élément x_n de K_n . La suite (x_n) est une suite du compact K_0 donc il existe une extraction φ (c'est à dire une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante) telle que la suite $(x_{\varphi(n)})$ converge vers un élément x de K_0 . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x_{\varphi(k)})_{k \geq n}$ est une suite de K_n qui est fermé, donc $x \in K_n$. Ainsi $x \in K$ et K n'est pas vide. K est donc fermé comme intersection de fermés, non vide et inclus dans un compact. Donc K est compact. Il reste à voir que K est connexe. Supposons le contraire et prenons \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 deux fermés de K formant une partition. \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sont compacts car fermés dans K . Donc il existe \mathcal{U} et \mathcal{V} deux ouverts disjoints de E tels que $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{U}$ et $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{V}$. On a alors

$$K \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V} = \mathcal{W}$$

et \mathcal{W} est un ouvert de E . Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, K_n ne soit pas inclus dans \mathcal{W} . On pourrait alors construire une suite (x_n) avec $x_p \in K_p$ dont aucun élément ne soit dans \mathcal{W} . Cette suite étant une suite de K_0 , elle admet une valeur d'adhérence l qui sera dans tous les K_n donc dans $K \subset \mathcal{W}$. Mais (x_n) est une suite de $E - \mathcal{W}$ qui est fermé, donc $l \in E - \mathcal{W}$. On a une contradiction, donc il existe un n tel que $K_n \subset \mathcal{W}$.

On dispose ainsi de deux ouverts disjoints $K_n \cap \mathcal{U}$ et $K_n \cap \mathcal{V}$ de K_n non vides car ils contiennent respectivement \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 qui sont non vides. De plus,

$$(K_n \cap \mathcal{U}) \cup (K_n \cap \mathcal{V}) = K_n \cap \mathcal{W} = K_n$$

donc K_n n'est pas connexe, ce qui contredit les hypothèses. \square

5.1.4. *Cas d'une famille indexée par \mathbb{R}_+ .* —

Proposition 5.4. — *Soit $(K_t)_{t \geq 0}$ une famille décroissante (au sens de l'inclusion) de compacts connexes non vides d'un espace topologique séparé E . Alors $K = \bigcap_{t \geq 0} K_t$ est un compact connexe non vide.*

Démonstration. — Il est évident que

$$\bigcap_{t \geq 0} K_t \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n.$$

Soit $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$, et soit $t \geq 0$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq t$. Donc $K_n \subset K_t$ et comme $x \in K_n$, $x \in K_t$. Ainsi

$$\bigcap_{t \geq 0} K_t = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$$

et la propriété précédente fournit le résultat. \square

5.2. Théorème d'inversion locale. —

5.2.1. *Théorème de Picard.* —

Théorème 5.5. — *Soit \mathcal{F} un fermé d'un espace de Banach E et f une application k -contractante de \mathcal{F} dans \mathcal{F} . Alors f admet un unique point fixe.*

Démonstration. — Soit $x_0 \in \mathcal{F}$. On définit une suite (x_n) par $x_{n+1} = f(x_n)$. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\|.$$

Par conséquent, on obtient en sommant la majoration, pour tout $n, p \in \mathbb{N}$,

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_1 - x_0\|$$

La suite (x_n) est donc de Cauchy. Comme E est complet, la suite (x_n) converge vers un certain $x \in E$. Comme \mathcal{F} est fermé, $x \in \mathcal{F}$. D'autre part, $f(x_n) = x_{n+1} \rightarrow x$ donc, par continuité de f , $f(x) = x$. Soit y un autre point fixe de f , on a alors

$$\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|$$

et $x = y$. \square

5.2.2. *Théorème de Picard à paramètre.* —

Théorème 5.6. — Soient E_1 et E_2 deux espaces de Banach. Soit X une partie de E_1 et \mathcal{F} un fermé de E_2 . Soit

$$f : X \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$$

telle que pour tout $y \in \mathcal{F}$ l'application $\lambda \mapsto f(\lambda, y)$ soit continue. On suppose de plus qu'il existe $k < 1$ tel que pour tout $\lambda \in X$ l'application $y \mapsto f(\lambda, y)$ soit k -contractante. Alors pour tout $\lambda \in X$ il existe un unique $y_\lambda \in \mathcal{F}$ tel que $f(\lambda, y_\lambda) = y_\lambda$. De plus, l'application $\Lambda : \lambda \mapsto y_\lambda$ est continue.

Démonstration. — Par le théorème de Picard, à λ fixé il existe un unique y_λ vérifiant les hypothèses. On note $\|\cdot\|$ la norme induite sur \mathcal{F} . Soient $(\lambda, \mu) \in X^2$, on a

$$\|y_\lambda - y_\mu\| = \|f(\lambda, y_\lambda) - f(\mu, y_\mu)\| \leq \|f(\lambda, y_\lambda) - f(\lambda, y_\mu)\| + \|f(\lambda, y_\mu) - f(\mu, y_\mu)\|$$

d'où

$$\|y_\lambda - y_\mu\| \leq k \|y_\lambda - y_\mu\| + \|f(\lambda, y_\mu) - f(\mu, y_\mu)\|.$$

Ainsi

$$\|y_\lambda - y_\mu\| \leq \frac{1}{1-k} \|f(\lambda, y_\mu) - f(\mu, y_\mu)\|.$$

Comme f est continue par rapport à λ , à μ fixé,

$$f(\lambda, y_\mu) \rightarrow f(\mu, y_\mu)$$

quand $\lambda \rightarrow \mu$. Ainsi

$$\|y_\lambda - y_\mu\| \rightarrow 0$$

et Λ est continue. □

 5.2.3. *Théorème d'inversion locale : cas particulier.* —

Théorème 5.7. — Soit Ω un ouvert d'un espace vectoriel de dimension finie E et

$$f : \Omega \rightarrow E$$

une application de classe \mathcal{C}^1 telle que $D_0 f = Id$ et $f(0) = 0$. Alors il existe un voisinage ouvert \mathcal{V} de 0, un ouvert \mathcal{U} inclus dans Ω et une application $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que pour tout $x \in \mathcal{V}$, $f(\varphi(x)) = x$.

Démonstration. — Posons

$$\Phi_y : x \mapsto y + x - f(x).$$

Il est clair que Φ_y est de classe \mathcal{C}^1 et que $D_0 \Phi_y = 0$. L'application $x \mapsto D_x \Phi_y$ étant continue, il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $x \in B'(0, \lambda)$,

$$N_{\parallel}(D_x \Phi_y) \frac{1}{2},$$

N_{\parallel} désignant la norme subordonnée et $B'(0, \lambda)$ la boule fermée de centre 0 et de rayon λ . L'inégalité des accroissements finis donne alors pour tout $x \in B'(0, \lambda)$,

$$\|\Phi_y(x) - \Phi_y(0)\| \leq \frac{1}{2} \|x\|.$$

Ainsi, si $y \in B'(0, \lambda/2)$, Φ_y stabilise $B'(0, \lambda)$ et sa restriction à $B'(0, \lambda)$ est 1/2-contractante. La boule $B'(0, \lambda)$ étant fermée dans l'espace E , elle est complète et, d'après le théorème de Picard à paramètre appliqué à Φ_y , on a pour tout $y \in B'(0, \lambda/2)$ un unique $x \in B'(0, r)$ tel que $f(x) = y$. De plus, l'application $\tilde{\varphi} : y \mapsto x$ est continue. On pose désormais

$$\mathcal{A} = \tilde{\varphi}(B'(0, \lambda/2)) \text{ et } \mathcal{B} = \tilde{\varphi}^{-1}(\mathcal{A}).$$

Il reste à montrer que cet inverse est de classe \mathcal{C}^1 sur un sous-ouvert non vide de \mathcal{A} . Soient $y_1 \in \mathcal{A}$ et $x_1 = \tilde{\varphi}(y_1)$. Soient $y \in \mathcal{A}$ et $x = \tilde{\varphi}(y)$. On peut alors écrire

$$\|\tilde{\varphi}(y) - \tilde{\varphi}(y_1) - (D_{x_1}f)^{-1}(y - y_1)\| = \|x - x_1 - (D_{x_1}f)^{-1}(f(x) - f(x_1))\|.$$

Comme f est différentiable en x_1 , il existe $\alpha > 0$ et une fonction ε négligeable devant x tels que pour tout $x \in \mathcal{U} = B(x_1, \alpha)$,

$$f(x) - f(x_1) = D_{x_1}f(x - x_1) + \varepsilon(x - x_1).$$

En remplaçant dans l'égalité précédente pour $y \in \mathcal{V} = \tilde{\varphi}^{-1}(\mathcal{U})$, on obtient

$$\|\tilde{\varphi}(y) - \tilde{\varphi}(y_1) - (D_{x_1}f)^{-1}(y - y_1)\| = \|(D_{x_1}f)^{-1}(\varepsilon(x - x_1))\|.$$

Notons Θ la norme subordonnée de $(D_{x_1}f)^{-1}$. On sait que $\|x - x_1\| \leq 2\|y - y_1\|$, on peut donc écrire

$$\|(D_{x_1}f)^{-1}(\varepsilon(x - x_1))\| \leq 2\Theta\varepsilon(y - y_1) = o(y - y_1).$$

Ainsi, en notant φ la restriction de $\tilde{\varphi}$ à \mathcal{V} , φ est différentiable en y_1 et

$$D_{y_1}\varphi = (D_{f^{-1}(y_1)}f)^{-1}.$$

Donc φ est un inverse local de classe \mathcal{C}^1 de f . □

5.2.4. Théorème d'inversion locale : cas général. — On généralise le théorème précédent de la façon suivante.

Théorème 5.8. — *Soit Ω un ouvert d'un espace vectoriel de dimension finie E_1 , E_2 un espace vectoriel de dimension finie égale à celle de E_1 et*

$$f : \Omega \rightarrow E_2$$

une application de classe \mathcal{C}^1 . Soit $x_0 \in \Omega$ tel que $D_{x_0}f$ soit inversible. Alors il existe un voisinage ouvert \mathcal{V} de x_0 , un ouvert \mathcal{U} inclus dans Ω et une application $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $\forall x \in \mathcal{V}$, $f(\varphi(x)) = x$.

Démonstration. — En posant

$$g = (D_{x_0}f)^{-1} \circ f,$$

on se ramène au cas où $D_{x_0}g = Id$ puis par une translation, on se ramène au cas $x_0 = 0$ traité ci-dessus. □

5.3. Stabilité d'un point fixe. —

5.3.1. Un lemme. —

Lemme 5.9. — Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $\lambda \in \text{Sp}(M)$, $\Re(\lambda) > 0$. Alors, il existe un produit scalaire sur \mathbb{R}^n , noté (\cdot, \cdot) , et une constante $\alpha > 0$ tels que pour tout X dans \mathbb{R}^n ,

$$(MX|X) \geq \alpha \|X\|^2.$$

Démonstration. — Soit

$$\mu = \{\inf\{\Re(\lambda), \lambda \in \text{Sp}(f)\} > 0$$

et soit $\varepsilon > 0$. On fixe une base $\mathcal{B} = (X_1, \dots, X_n)$ qui réalise une triangulation ε -adaptée de M (tous les coefficients non diagonaux de M dans cette base sont de module inférieur à ε) avec des coefficients non diagonaux $t_{i,j}$. Soit $\varphi(\cdot, \cdot)$ le produit scalaire canonique relativement à la base B , φ est défini par

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i X_i, \sum_{i=1}^n y_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i.$$

Posons maintenant $(x|y) = \Re(\varphi(x, y))$. On numérote les valeurs propres de M de 1 à n (plusieurs d'entre elles pouvant être égales). Pour $X = \sum_{i=1}^n x_i X_i$, on a

$$(MX|X) = \sum_{i=1}^n \Re(\bar{\lambda}_i) |x_i|^2 + \Re\left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^{i-1} t_{k,i} x_k\right) \bar{x}_i\right).$$

Or

$$\left| \Re\left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^{i-1} t_{k,i} x_k\right) \bar{x}_i\right) \right| \leq \sqrt{n\varepsilon} \|X\|^2,$$

donc $(MX|X) \geq (\mu - n\varepsilon) \|X\|^2$. Il ne reste plus qu'à poser

$$\varepsilon = \frac{\mu}{2n} \text{ et } \alpha = \frac{\mu}{2}$$

pour avoir l'inégalité souhaitée. □

Nous allons pouvoir donner, grâce à ce lemme, un critère pour déterminer si un point fixe est répulsif. On remarquera que si toutes les parties réelles des valeurs propres de M avaient été strictement négatives, on aurait pu trouver un produit scalaire qui majore $(MX|X)$ par une constante que multiplie $\|X\|$. Ce produit scalaire, en adaptant la preuve suivante, donnerait alors une condition suffisante d'attractivité d'un point fixe.

5.3.2. Condition suffisante de répulsivité d'un point fixe. —

Proposition 5.10. — Soit l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(x)$$

avec f de classe \mathcal{C}^1 . Supposons que 0 est un équilibre et que la jacobienne $\mathcal{J}_f(0)$ a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement positive. Alors le point fixe est répulsif, c'est à dire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que toute solution maximale qui entre dans $B(0, \lambda)$ en sort au bout d'un temps fini.

Démonstration. — Soit $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire défini à partir de $\mathcal{J}_f(0)$ et vérifiant la propriété du lemme précédente. Soit X une solution maximale définie sur un intervalle $]a, b[$, on a

$$\frac{d\|X\|^2}{dt}(t) = 2(X'(t)|X(t)) = 2(\mathcal{J}_f(0)X(t) + \|X(t)\|\varepsilon(X(t))|X(t)) \geq 2(\alpha - \|\varepsilon(X(t))\|)\|X(t)\|^2.$$

Soit $\lambda > 0$ tel que

$$X(t) \in B(0, \lambda) \Rightarrow \|\varepsilon(X(t))\| \leq \frac{\alpha}{2}.$$

Alors, si $X(t) \in B(0, \lambda)$, on a l'inégalité

$$\frac{d\|X\|^2}{dt}(t) \geq \alpha\|X(t)\|^2$$

et $\|X\|$ est croissante. Supposons que X entre dans $B(0, \lambda)$ à un instant t_0 et n'en sorte plus. Alors $t \mapsto X(t)$ est bornée au voisinage de b et, f étant continue, X' sera également bornée au voisinage de b . Donc, si $b < \infty$, on pourra prolonger X sur $]a, b]$ et ce ne sera pas une solution maximale. Si $b = +\infty$, comme on a

$$\frac{D\|X\|^2}{Dt}(t) \geq \alpha\|X(t_0)\|^2 > 0,$$

$\|X(t)\| \rightarrow +\infty$, et X ne reste pas dans la boule. Le point fixe est donc répulsif. \square

Ce résultat se généralise par translation à tout point d'équilibre où la jacobienne du champ a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement positive.

5.4. Modélisation du Bruxellateur sur Maple. — Les dessins ont été réalisés en utilisant la fonction `plots[odeplot]` de *Maple*. Les paramètres choisis sont $a = 1$ et $b = 3$ qui vérifient bien la condition de répulsivité du point fixe. Les tracés représentent les solutions pour différentes conditions initiales (x_0, y_0) . On observe que toutes les solutions tendent vers un cycle limite, et que ce cycle est le même pour toutes les solutions. Cette étude laisse donc penser que ce cycle est unique et qu'il « attire » toutes les solutions.

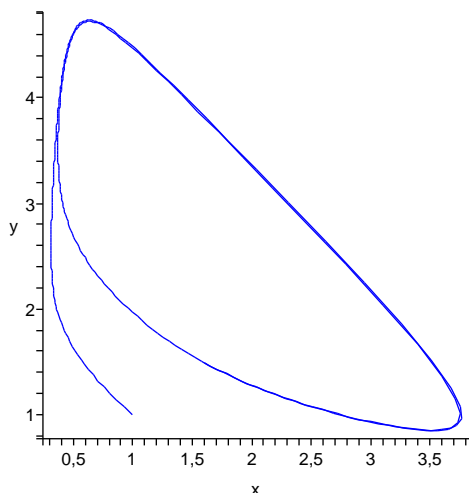


FIGURE 4. Condition initiale : $(x_0, y_0) = (1, 1)$

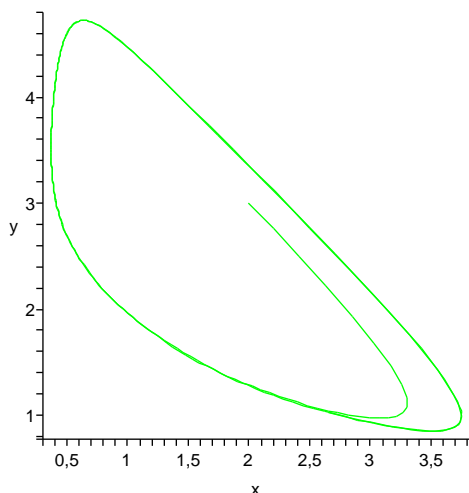


FIGURE 5. Condition initiale : $(x_0, y_0) = (2, 3)$

5.5. Relevé conductimétrique de l'expérience de Belousov-Zabotinsky. —

Références

- [Can95] S. CANTAT – « Le théorème de Poincaré-Bendixson », *Journal de maths des élèves (ENS Lyon)* 1 (1995), no. 3.
- [CCM00] G. CHRISTOL, G. COT & C. MARLE – *Topologie second cycle*, Ellipses, 2000.

- [EMG00] R. ENNS & G. MC GUINE – *Nonlinear physics with maple for scientists and engineers*, Birkhäuser, 2000.
- [HS74] M. HIRSCH & S. SMALE – *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*, vol. 60, Academic press, 1974.
- [Lau00] F. LAUDENBACH – *Calcul différentiel et intégral*, Éditions École Polytechnique, 2000.
- [LBCR77] S. LANG, J. BRAEMER, C. CHARRETTON & D. RICHARD – *Analyse réelle*, InterEditions, 1977.
- [LP65] R. LEFEVER & I. PRIGOGINE – «Symmetry Breaking Instabilities in Dissipative Systems. II», *J. Chem. Phys.* **48** (1965), p. 1695–1700.
- [Sch81] L. SCHWARTZ – *Cours d'analyse*, vol. 1, Hermann, 1981.