

MOYENNABILITÉ FAIBLE POUR LES GROUPES QUANTIQUES DISCRETS

AMAURY FRESLON

RÉSUMÉ. Le but de cet exposé est d'introduire la théorie générale de la moyennabilité faible dans le cadre des groupes quantiques discrets et de discuter quelques résultats de stabilité et quelques exemples.

1. INTRODUCTION

Question 1. Soient $n \neq n'$ des entiers et soient $\Gamma \subset \mathrm{Sp}(n, 1)$ et $\Gamma' \subset \mathrm{Sp}(n', 1)$ des réseaux. Peut-on avoir $L\Gamma \simeq L\Gamma'$?

Définition 1.1 (Cowling-Haagerup, '89). Un groupe discret Γ est dit *faiblement moyennable* s'il existe une suite de fonctions $\varphi_i : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ telles que

- (1) φ_i est à support fini pour tout i
- (2) $|\varphi_i(x) - 1| \rightarrow_i 0$ pour tout $x \in \Gamma$
- (3) $\limsup_i \|m_{\varphi_i}\|_{cb} < \infty$

où $m_{\varphi_i} : \lambda(\Gamma) \rightarrow \lambda(\Gamma)$ envoie $\lambda(g)$ sur $\varphi_i(g)\lambda(g)$ (λ désignant la représentation régulière gauche). La plus petite limsup possible est notée $\Lambda_{cb}(\Gamma)$ et appelée *constante de Cowling-Haagerup* de Γ .

Théorème 1.2 (Cowling-Haagerup, '89). Soit G un groupe de Lie et Γ_1, Γ_2 des réseaux dans G . Alors $\Lambda_{cb}(\Gamma_1) = \Lambda_{cb}(\Gamma_2)$. On notera $\Lambda_{cb}(G)$ cette valeur, encore appelée constante de Cowling-Haagerup de G .

Exemple 1.3. Constantes de Cowling-Haagerup des groupes de Lie simples (i.e. connexes sans sous-groupe normal connexe non-trivial) :

- $\Lambda_{cb}(G) = \infty$ si G est un groupe de Lie de rang réel supérieur ou égal à 2
- $\Lambda_{cb}(\mathrm{SO}(n, 1)) = \Lambda_{cb}(\mathrm{SU}(n, 1)) = 1$
- $\Lambda_{cb}(\mathrm{F}_4(-20)) = 21$
- $\Lambda_{cb}(\mathrm{Sp}(n, 1)) = 2n - 1$

Définition 1.4. Une C^* -algèbre A est *faiblement moyennable* (ou a CBAP¹) s'il existe une suite (T_i) d'applications linéaires de A dans elle-même telles que

2010 *Mathematics Subject Classification.* 46L09, 46L65.

Key words and phrases. Approximation properties, free products, quantum groups, weak amenability.

1. Completely Bounded Approximation Property

- (1) T_i est de rang fini pour tout i
- (2) $\|T_i(x) - x\| \rightarrow_i 0$ pour tout $x \in N$
- (3) $\limsup_i \|T_i\|_{cb} < \infty$

La plus petite limsup possible est notée $\Lambda_{cb}(A)$ et appelée *constante de Cowling-Haagerup* de A .

Une algèbre de von Neumann N est *faiblement moyennable* (ou a W^* CBAP) s'il existe une suite (T_i) d'applications linéaires de N dans elle-même telles que

- (1) T_i est de rang fini pour tout i
- (2) $(T_i(x) - x) \rightarrow_i 0$ ultrafaiblement pour tout $x \in N$
- (3) $\limsup_i \|T_i\|_{cb} < \infty$

La plus petite limsup possible est notée $\Lambda_{cb}(N)$ et appelée *constante de Cowling-Haagerup* de N .

Proposition 1.5. *Soit Γ un groupe discret, alors $\Lambda_{cb}(\Gamma) = \Lambda_{cb}(C_r^*(\Gamma)) = \Lambda_{cb}(L\Gamma)$.*

Remarque 1.6. Cette propriété a en fait un sens pour n'importe quel *espace d'opérateurs*.

Application : (Ozawa-Popa) La moyennabilité faible permet de construire des déformations et d'obtenir des résultats d'absence ou d'unicité de sous-algèbres de Cartan dans des facteurs de type II_1 . Les exemples clefs sont ici $\Lambda_{cb}(\mathbb{Z}^2 \rtimes SL(2, \mathbb{Z})) = \infty$ et $\Lambda_{cb}(\mathbb{F}_n) = 1$.

Remarque 1.7. $\Lambda_{cb}(\mathbb{Z}^2) = 1 = \Lambda_{cb}(SL(2, \mathbb{Z}))$ donc la moyennabilité faible n'est pas préservée par les produits semi-directs.

2. GROUPES QUANTIQUES DISCRETS ET MOYENNABILITÉ FAIBLE

Définition 2.1 (Woronowicz, '87). Un *groupe quantique compact* est un couple (A, Δ) où A est une C^* -algèbre unifère et $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$ (produit tensoriel minimal) est un $*$ -homomorphisme unifère tel que

- (1) $(\Delta \otimes \iota) \circ \Delta = (\iota \otimes \Delta) \circ \Delta$ (coassociativité)
- (2) $\overline{\Delta(A)(1 \otimes A)} = A \otimes A = \overline{\Delta(A)(A \otimes 1)}$ (bisimplifiabilité)

Théorème 2.2 (Woronowicz, '87). *Il existe un unique état h sur A , appelé état de Haar, tel que $(h \otimes \iota) \circ \Delta(x) = h(x).1 = (\iota \otimes h) \circ \Delta(x)$ pour tout $x \in A$.*

Exemple 2.3. Soit G un groupe compact, alors $C(G)$ avec le coproduit induit par la loi de groupe est un groupe quantique compact. Soit Γ un groupe discret, alors $C_r^*(\Gamma)$ avec la comultiplication induite par l'application diagonale est un groupe quantique compact.

Définition 2.4 (Woronowicz, '87). Une représentation de dimension finie est une matrice $u = (u_{i,j}) \in M_n(A)$ telle que $\Delta(u_{i,j}) = \sum_k u_{i,k} \otimes u_{k,j}$. Un *morphisme* de $u \in M_n(A)$ vers $v \in M_m(A)$ est une application linéaire $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ telle que $v(\iota \otimes T) = (\iota \otimes T)u$. Une représentation est dite *irréductible* si ses seuls morphismes vers elle-même sont les homothéties.

Théorème 2.5 (Woronowicz, '87). *Toute représentation irréductible est de dimension finie. Toute représentation est somme directe de sous-représentations irréductibles. L'espace vectoriel engendré par les coefficients des représentations irréductibles est une sous- $*$ -algèbre de Hopf de A dense dans A .*

Notations : La construction GNS associée à l'état de Haar sera notée $(L^2(\mathbb{G}), \xi_h)$ et l'image de A dans cette représentation sera notée $C(\mathbb{G})$. Le bicommutant de $C(\mathbb{G})$ dans cette représentation sera noté $L^\infty(\mathbb{G})$. On note $\text{Irr}(\mathbb{G})$ l'ensemble des classes d'équivalences de représentations irréductibles de \mathbb{G} . Pour $\alpha \in \text{Irr}(\mathbb{G})$, on note u^α un représentant de la classe d'équivalence.

Définition 2.6. Soit \mathbb{G} un groupe quantique compact, on pose $C_0(\widehat{\mathbb{G}}) = \bigoplus_{\alpha \in \text{Irr}(\mathbb{G})} \mathcal{B}(H_\alpha)$ et $\ell^\infty(\widehat{\mathbb{G}}) = \prod_{\alpha \in \text{Irr}(\mathbb{G})} \mathcal{B}(H_\alpha)$. On note p_α la projection centrale minimale correspondant à la composante α . Si $a \in B(H_\alpha)$ et si T est un morphisme de α vers $\beta \otimes \gamma$, on pose $\widehat{\Delta}(a) \circ T = T \circ a$. Le couple $\widehat{\mathbb{G}} = (C_0(\widehat{\mathbb{G}}), \widehat{\Delta})$ est le *groupe quantique discret dual* de \mathbb{G} .

Le définition de la moyennabilité faible pour les groupes quantiques discrets se déduit du dictionnaire suivant :

$$\begin{aligned} \text{Fonction bornée } \varphi &\iff a \in \ell^\infty(\widehat{\mathbb{G}}) \\ \text{Support fini} &\iff ap_\alpha = 0 \text{ sauf pour un nombre fini de } \alpha \\ \varphi(x) \rightarrow 1 &\iff ap_\alpha \rightarrow p_\alpha \\ m_\varphi(\lambda(g)) = \varphi(g)\lambda(g) &\iff (m_a \otimes \iota)(u^\alpha) = (1 \otimes ap_\alpha)u^\alpha \end{aligned}$$

Théorème 2.7 (Gilbert, '?). *Soit Γ un groupe discret et $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$. Alors m_φ est complètement borné si et seulement s'il existe un espace de Hilbert H et deux familles $(\xi_s)_{s \in \Gamma}, (\eta_t)_{t \in \Gamma}$ de vecteurs de H tels que $\varphi(st^{-1}) = \langle \eta_t, \xi_s \rangle$.*

Théorème 2.8 (Daws, '11). *Soit $\widehat{\mathbb{G}}$ un groupe quantique discret et soit $a \in \ell^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$. Alors m_a est complètement borné si et seulement s'il existe un espace de Hilbert H et des opérateurs $\xi, \eta : L^2(\mathbb{G}) \rightarrow L^2(\mathbb{G}) \otimes H$ tels que $(1 \otimes \eta^*)\widehat{W}_{12}^*(1 \otimes \xi)\widehat{W} = a \otimes 1$. De plus, on a alors $m_a(x) = \eta^*(x \otimes 1)\xi$.*

Démonstration. La condition de covariance est bien la même que celle du cas classique une fois remarqué que $\varphi(st^{-1}) = \langle \eta_t, \xi_s \rangle$ est équivalent à $\varphi(s) = \langle \eta_t, \xi_{st} \rangle$. Si m_a est complètement borné et si $Q^* \circ \pi(\cdot) \circ P$ est sa factorisation de Wittstock, il suffit de poser

$$\begin{cases} \xi &= (\iota \otimes \pi)(\widehat{W})^*(1 \otimes P)\widehat{W}(1 \otimes \xi_h) \\ \eta &= (\iota \otimes \pi)(\widehat{W})^*(1 \otimes Q)\widehat{W}(1 \otimes \xi_h) \end{cases}$$

□

Théorème 2.9 (Kraus-Ruan, '99, F, '11). *Soit $\widehat{\mathbb{G}}$ un groupe quantique discret, alors $\Lambda_{cb}(\widehat{\mathbb{G}}) = \Lambda_{cb}(C(\widehat{\mathbb{G}})) = \Lambda_{cb}(L^\infty(\widehat{\mathbb{G}}))$.*

Démonstration. L'application Δ se prolonge en une isométrie de $L^2(\widehat{\mathbb{G}})$ dans $L^2(\widehat{\mathbb{G}}) \otimes L^2(\widehat{\mathbb{G}})$. Soit $T : L^\infty(\widehat{\mathbb{G}}) \rightarrow L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$ et $a = (h \otimes i)((T \otimes i)(W)W^*)$. Alors $m_a = \Delta^* \circ (T \otimes i) \circ \Delta$. \square

3. PROPRIÉTÉS DE STABILITÉ

Proposition 3.1. *On a les propriétés de stabilité suivantes :*

- (1) *Tout groupe quantique discret moyennable est faiblement moyennable avec constante 1.*
- (2) *Soit $\widehat{\mathbb{H}}$ un sous-groupe quantique discret de $\widehat{\mathbb{G}}$, alors $\Lambda_{cb}(\widehat{\mathbb{H}}) \leq \Lambda_{cb}(\widehat{\mathbb{G}})$.*
- (3) *$\Lambda_{cb}(\widehat{\mathbb{H}} \times \widehat{\mathbb{G}}) = \Lambda_{cb}(\widehat{\mathbb{H}})\Lambda_{cb}(\widehat{\mathbb{G}})$ (définition du produit direct par Wang).*
- (4) *Soit $(\widehat{\mathbb{G}}_i)$ un système direct de groupes quantiques discrets avec des applications connectantes injectives, alors $\Lambda_{cb}(\lim_i \widehat{\mathbb{G}}_i) = \lim_i \Lambda_{cb}(\widehat{\mathbb{G}}_i)$.*
- (5) *Soit Γ un sous groupe discret (classique) abélien d'un groupe quantique discret $\widehat{\mathbb{G}}$ et soit σ un bicaractère associé, alors $\Lambda_{cb}(\widehat{\mathbb{G}}) = \Lambda_{cb}(\widehat{\mathbb{G}}_\sigma)$.*

Question 2. *Qu'en est-il pour les produits libres (définition par Wang) ?*

Théorème 3.2 (Bożejko-Picardello, '93). *Soient Γ_1, Γ_2 des groupes discrets moyennables et Γ_3 un sous-groupe fini commun. Alors $\Lambda_{cb}(\Gamma_1 *_{\Gamma_3} \Gamma_2) = 1$.*

Remarque 3.3. Ce résultat est en fait valable pour n'importe quel produit libre dénombrable de groupes localement compacts moyennables amalgamés au-dessus d'un sous-groupe compact ouvert.

Théorème 3.4 (Ricard-Xu, '05). *Soit $(\Gamma_i)_i$ une famille de groupes discrets faiblement moyennables de constante 1, alors $\Lambda_{cb}(*_i \Gamma_i) = 1$.*

Ingrédient principal de la preuve : Soit $(B_i, \psi_i)_{i \in I}$ une famille de C^* -algèbres avec des états (ψ_i) GNS-fidèles. Soient $A_i \subset B_i$ des sous- C^* -algèbres telles que les états $\varphi_i = \psi_i|_{A_i}$ soient aussi GNS-fidèles. On suppose que pour tout i , il existe une suite d'applications de rang fini $(V_{i,j})$ sur A_i convergeant vers l'identité ponctuellement, préservant l'état et tel que $\limsup_j \|V_{i,j}\|_{cb} = 1$. On suppose de plus que pour toute paire (i, j) , il existe une application unifère complètement positive $U_{i,j} : A_i \rightarrow B_i$ préservant l'état et tel que

$$\|V_{i,j} - U_{i,j}\|_{cb} + \|V_{i,j} - U_{i,j}\|_{\mathcal{B}(L^2(A_i, \varphi_i), L^2(B_i, \psi_i))} + \|V_{i,j} - U_{i,j}\|_{\mathcal{B}(L^2(A_i, \varphi_i)^{op}, L^2(B_i, \psi_i)^{op})} \rightarrow 0.$$

Alors, le produit libre réduit des (A_i, φ_i) a une constante de Cowling-Haagerup égale à 1.

Il ne reste alors plus qu'à vérifier que les C^* -algèbres réduites de groupes discrets faiblement moyennables avec constante 1 vérifient ces hypothèses.

Théorème 3.5 (F, '11). *Soit $(\widehat{\mathbb{G}}_i)_i$ une famille de groupes quantiques discrets faiblement moyennables de constante 1, alors $\Lambda_{cb}(*_i \widehat{\mathbb{G}}_i) = 1$.*

Démonstration. Posons $\zeta = (\xi + \eta)/2$ et $\zeta' = (\xi - \eta)/2$. Après polarisation et renormalisation, on a $m_a = m_\zeta - m_{\zeta'}$ et m_ζ est une approximation complètement positive de m_a qu'on peut à son tour approcher par une application complètement positive. Il suffit de vérifier que c'est aussi une approximation par rapport à l'état de Haar. Cela se fait au moyen du calcul suivant : posons $A(T) = (\iota \otimes \pi)(\widehat{W})^*(1 \otimes T)\widehat{W}(\iota \otimes \xi_h)$, alors $A(T)\xi_h = \xi_h \otimes T(\xi_h)$. \square

UNIV. PARIS DIDEROT, SORBONNE PARIS CITÉ, IMJ, UMR 7586, 175 RUE DU CHEVALERET, 75013, PARIS, FRANCE

E-mail address: freslon@math.jussieu.fr