Déformations d'espaces non-commutatifs et classification

Amaury Freslon
sous la direction de
Etienne Blanchard (IMJ)

Introduction au domaine de recherche

3ème année de la FIMFA
École Normale Supérieure, Paris

1. Introduction

Ce document est une introduction à certains aspects du *programme d'Elliott*, c'est-à-dire l'étude de la classification des espaces topologiques non-commutatifs par la K-théorie. Nous commencerons donc par expliquer les origines de la topologie non-commutative et les idées générales de la K-théorie des C*-algèbres afin de pouvoir introduire quelques approches actuelles du programme d'Elliott. Enfin, nous définirons les déformations de C*-algèbres ou *champs continus de C*-algèbres* qui fournissent un cadre pour l'étude et la classification de certaines C*-algèbres non simples. Elles font aussi apparaître des questions intéressantes de rigidité que nous exposerons.

Le lecteur intéressé par la théorie des C*-algèbre peut consulter, parmi les nombreux ouvrages disponibles, [2] et [17]. Les bases de la K-théorie sont détaillées dans [20] et [1] contient un exposé complet incluant la KK-théorie. Pour ce qui concerne le programme d'Elliott et les déformations de C*-algèbres, des références sont données directement dans le corps du texte.

2. La topologie non-commutative

Pour définir les espaces topologiques non-commutatifs, nous allons commencer par considérer un espace topologique usuel. Plus précisément, soit X un espace topologique compact (donc séparé). La topologie de X nous permet de définir des fonctions continues, nous allons donc nous intéresser à l'ensemble C(X) des fonctions continues sur X à valeurs dans $\mathbb{C}$. Muni des opérations ponctuelles, C(X) est une $\mathbb{C}$-algèbre commutative. Muni en plus de la norme $\|f\| := \sup_{x\in X}|f(x)|$, c'est une $\mathbb{C}$-*algèbre de Banach* au sens suivant :

Définition 2.1. Une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach est une $\mathbb{C}$-algèbre normée complète $\mathcal{A}$ telle que $\|x.y\| \leqslant \|x\|.\|y\|$ pour tous $x, y \in \mathcal{A}$.

Nous allons maintenant définir une autre opération sur C(X). Si f est une fonction continue sur X, on définit f^* comme étant la fonction $x \mapsto \overline{f(x)}$ qui est également continue. L'application $f \mapsto f^*$ est une *involution*, c'est-à-dire qu'elle est

- *additive* : pour tous $f, g \in C(X)$, $(f+g)^* = f^* + g^*$.
- *antilinéaire* : pour tout $f \in C(X)$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda f)^* = \overline{\lambda} f^*$.
- *antimultiplicative* : pour tous $f, g \in C(X)$, $(fg)^* = g^* f^*$.

Enfin, on remarque que cette involution est liée à la norme par l'équation

$$\|f^* f\| = \|f\|^2.$$

La structure que nous venons de définir sur C(X) est une structure de *C*-algèbre*.

Définition 2.2. Une C*-algèbre est une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach $\mathcal{A}$ munie d'une involution $*$ telle que pour tout $x \in \mathcal{A}$,

$$\|x^* x\| = \|x\|^2.$$

Plus précisément, C(X) est une C*-algèbre commutative unifère (i.e. avec une unité, le terme unitaire étant réservé aux opérateurs). Si l'espace topologique X est seulement localement compact, on peut à nouveau lui associer une C*-algèbre commutative en se restreignant aux fonctions nulles à l'infini.

Définition 2.3. Soit X un espace topologique localement compact. On dit qu'une fonction $f : X \to \mathbb{C}$ est *nulle à l'infini* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de X telle que $|f(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in X \setminus K$. On note $C_0(X)$ l'ensemble des fonctions continues nulles à l'infini sur X.

Remarque 2.4. Une fonction nulle à l'infini est en fait une fonction dont le prolongement par continuité au compactifié d'Alexandroff vaut 0 sur le point à l'infini.

On peut alors munir, comme dans l'exemple précédent, l'algèbre $C_0(X)$ d'une structure de C*-algèbre commutative (cette fois-ci sans unité si X n'est pas compact).

Les C*-algèbres ont été définies par J. von Neumann dans les années 1940 alors qu'il mettait au point un formalisme mathématique pour la mécanique quantique. Quelques années plus tard, l'étude des C*-algèbres commutatives a mené au théorème suivant.

Théorème 2.5 (Gel'fand–Naimark, première version). *Soit $\mathcal{A}$ une C*-algèbre commutative. Alors il existe un espace topologique localement compact* X *tel que $\mathcal{A}$ soit isomorphe à* $C_0(X)$. *De plus, $\mathcal{A}$ est unifère si et seulement si* X *est compact.*

Ce n'est qu'au bout de plusieurs décennies que ce résultat a été interprété en termes purement topologiques. Avant de l'expliquer, nous allons en donner une version plus forte mais qui nécessite un peu de langage des catégories. On appelle $*$-homomorphisme entre deux C*-algèbres $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ tout morphisme d'algèbres $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tel que $\varphi(a)^* = \varphi(a^*)$ pour tout $a \in \mathcal{A}$.

Remarque 2.6. Un tel morphisme est toujours continu et même contractant.

Théorème 2.7 (Gel'fand–Naimark, deuxième version). *Il existe une* équivalence de catégories *(contravariante) entre la catégories des C*-algèbres commutatives avec les $*$-homomorphismes et la catégorie des espaces topologiques localement compacts avec les applications propres.*

Cet énoncé signifie que l'ensemble de l'information topologique d'un espace localement compact X est « codée » de façon algébrique dans la C*-algèbre $C_0(X)$. On peut donc établir un dictionnaire entre ces deux objets, la liste suivante en est un aperçu.

Espace topologique		**C*-algèbre**
compact	$\longleftrightarrow$	unifère
connexe	$\longleftrightarrow$	sans projecteur (non-trivial)
σ-compact	$\longleftrightarrow$	σ-unifère
à base dénombrable d'ouverts	$\longleftrightarrow$	séparable
ouverts	$\longleftrightarrow$	idéaux bilatères fermés
ouverts denses	$\longleftrightarrow$	idéaux essentiels
fermés	$\longleftrightarrow$	quotients
compactification	$\longleftrightarrow$	unitarisation

Puisque qu'il n'y a pas de différence entre une C*-algèbre commutative et un espace topologique localement compact, nous pouvons désormais dire qu'une C*-algèbre non-commutative est un *espace topologique non-commutatif*, une généralisation de la notion d'espace topologique. L'idée générale est d'utiliser des méthodes de topologie (algébrique) pour étudier ces C*-algèbres non-commutatives en faisant « comme si » elles correspondaient elles aussi à des espaces topologiques.

3. La K-théorie

La formulation fonctorielle du théorème de Gel'fand-Naimark 2.7 suggère d'utiliser des méthodes de topologie algébrique pour étudier les espaces non-commutatifs. Celle qui s'avère la plus utile est la *K-théorie*. La construction de la K-théorie et l'étude de ses propriétés nécessiteraient un livre entier (il en existe d'ailleurs plusieurs). Nous allons simplement décrire de façon informelle la construction des premiers groupes de K-théorie en topologie classique, puis expliquer comment manipuler ces groupes pour obtenir des résultats sur les C*-algèbres.

3.1. **La K-théorie topologique.** Nous allons nous intéresser aux fibrés vectoriels sur un espace topologique compact X, dont nous rappelons la définition.

Définition 3.1. Un *fibré vectoriel* (de dimension finie) sur X est un espace topologique E muni d'une surjection continue $\pi : E \to X$ telle que $\pi^{-1}(\{x\})$ (la *fibre* au-dessus du point x) est munie d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie pour tout $x \in X$. Un fibré vectoriel (E, π) est dit *localement trivial* si pour tout $x \in X$ il existe un ouvert U_x, un entier k_x et un homéomorphisme

$$\varphi_x : U_x \times \mathbb{C}^{k_x} \to \pi^{-1}(U_x)$$

tels que :

(1) pour tout $y \in U_x$, $\pi \circ \varphi_x(y, v) = y$ quel que soit $v \in \mathbb{C}^{k_x}$.

(2) pour tout $y \in U_x$, $\varphi_x(y, .) : \mathbb{C}^{k_x} \to \pi^{-1}(\{y\})$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

On peut définir une opération sur les fibrés vectoriels qui muni l'ensemble des classes d'équivalences des fibrés vectoriels sur X d'une structure de semigroupe abélien.

Définition 3.2. Soient (E, π_E) et (F, π_F) deux fibrés vectoriels sur X. Leur *somme de Whitney*, notée $E \oplus F$, est l'espace topologique

$$E \oplus F := \{(x, y) \in E \times F \mid \pi_E(x) = \pi_F(y)\}$$

muni de la projection induite par π_E (ou π_F).

On utilise ensuite une construction de Grothendieck qui permet d'associer à tout semigroupe abélien un groupe abélien, par un procédé similaire à celui qui permet de construire $\mathbb{Z}$ à partir de $\mathbb{N}$. Le groupe obtenu est noté $K^0(X)$. On construit ensuite un second groupe de K-théorie en appliquant ce qui précède à la *suspension* de X.

Définition 3.3. On appelle suspension de X l'espace $SX := ([0, 1] \times X)/ \sim$ où $(t, x) \sim (u, y)$ si et seulement si $t = u = 0$ ou $t = u = 1$.

3.2. **La K-théorie des espaces non-commutatifs.** La construction précédente peut s'exprimer uniquement en termes de la C*-algèbre C(X) d'une façon que nous ne détaillerons pas. Il est donc ensuite possible de construire la K-théorie sur n'importe quelle C*-algèbre, dont nous détaillons les propriétés essentielles.

À toute C*-algèbre $\mathcal{A}$ on associe deux groupes abéliens, appelés *groupes de K-théorie* et notés $K_0(A)$ et $K_1(A)$. Cette construction est *fonctorielle*, c'est-à-dire que si $\mathcal{B}$ est une autre C*-algèbre, tout $*$-homomorphisme

$$\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$

induit deux morphismes de groupes

$$K_0(\varphi) : K_0(\mathcal{A}) \to K_0(\mathcal{B})$$

et

$$K_1(\varphi) : K_1(\mathcal{A}) \to K_1(\mathcal{B}),$$

De plus, si $\mathcal{C}$ est une autre C*-algèbre et $\psi : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ un $*$-homomorphisme, on a

$$K_i(\psi \circ \varphi) = K_i(\psi) \circ K_i(\varphi)$$

pour $i = 0, 1$. Enfin, $K_i(id_A) = id_{K_i(A)}$ pour $i = 0, 1$.

Remarque 3.4. Il découle de ce qui précède que tout isomorphisme de C*-algèbres induit un isomorphisme en K-théorie, ce qui fournit un premier outil pour montrer que deux C*-algèbres ne sont pas isomorphes : il suffit que leurs groupes de K-théorie ne soient pas isomorphes.

Pour calculer les groupes de K-théorie, il peut être utile de décomposer une C*-algèbre $\mathcal{A}$ à l'aide d'un idéal et du quotient de cette algèbre par l'idéal en question. Plus précisément, si $\mathcal{A}$ est une C*-algèbre et si $\mathcal{I}$ est un idéal bilatère fermé de $\mathcal{A}$, on dispose d'une injection

$$\imath : \mathcal{I} \hookrightarrow \mathcal{A}$$

et d'une surjection sur le quotient

$$\pi : \mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I}$$

qui sont des $*$-homomorphismes vérifiant $\pi \circ \imath = 0$. Le résultat suivant donne alors les relations qui existent entre les divers groupes de K-théorie et les morphismes induits. Il s'agit du résultat central de la K-théorie.

Théorème 3.5 (Périodicité de Bott). *Soit $\mathcal{A}$ une C*-algèbre et $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ un idéal bilatère fermé, alors il existe des morphismes*

$$\delta : K_0(\mathcal{A}/\mathcal{I}) \longrightarrow K_1(\mathcal{I})$$

$$\beta : K_1(\mathcal{A}/\mathcal{I}) \longrightarrow K_0(\mathcal{I})$$

tels que la suite cyclique

$$\begin{tikzcd}
K_0(\mathcal{I}) \arrow[r, "K_0(\imath)"] & K_0(\mathcal{A}) \arrow[r, "K_0(\pi)"] & K_0(\mathcal{A}/\mathcal{I}) \arrow[d, "\delta"] \\
K_1(\mathcal{A}/\mathcal{I}) \arrow[u, "\beta"] & K_1(\mathcal{A}) \arrow[l, "K_1(\pi)"] & K_1(\mathcal{I}) \arrow[l, "K_1(\imath)"]
\end{tikzcd}$$

soit exacte.

4. Le programme d'Elliott

Classifier les C*-algèbres signifie leur associer un objet « simple », appelé *invariant*, de sorte que deux C*-algèbres soient isomorphes si et seulement si leurs invariants respectifs sont isomorphes. Il est bien sûr impossible de classifier toutes les C*-algèbres. Le programme d'Elliott consiste donc d'abord à se restreindre à une classe de C*-algèbre puis à essayer de construire un invariant sur cette classe. Nous donnons d'abord quelques définitions pour décrire ces classes.

Définition 4.1. Soit $\mathcal{A}$ une C*-algèbre, on dit que $\mathcal{A}$ est
- *simple* si $\mathcal{A} \neq 0$ et n'a pas d'idéal bilatère non trivial.
- *séparable* si elle possède une partie dénombrable dense.

- *nucléaire* si pour toute C*-algèbre $\mathcal{B}$, le produit tensoriel algébrique (sur $\mathbb{C}$) $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ n'a qu'une complétion qui soit une C*-algèbre.
- *stable* si $\mathcal{A} \otimes \mathcal{K} \cong \mathcal{A}$, où $\mathcal{K}$ est la C*-algèbre des opérateurs compacts sur l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$.
- *de rang réel 0* si tout élément positif est limite en norme d'une suite d'éléments de spectre fini.
- *de rang stable 1* si l'ensemble de ses éléments inversibles est dense.

C'est en 1989, dans [11], que George Elliott a suggéré, s'appuyant sur la classification qu'il donnait des A$\mathbb{T}$-algèbres de rang réel 0, la conjecture suivante :

Conjecture 4.2 (Elliott, première version). *Les C*-algèbres qui sont séparables, nucléaires, de rang réel* 0, *de rang stable* 1 *et dont la K-théorie est sans torsion sont classifiées par leur K-théorie.*

Dans les années suivantes, de nouvelles C*-algèbres sont venues enrichir la classe étudiée par Elliott. Avec le temps, la classe de C*-algèbres considérée a été modifiée, et la nécessité d'inclure d'autres invariants, liés aux traces, a mené à une nouvelle conjecture :

Conjecture 4.3 (Elliott, deuxième version). *Les C*-algèbres qui sont séparables, simples et nucléaires sont classifiées par leur invariant d'Elliott, c'est-à-dire par leur K-théorie et leurs traces.*

Il y a aujourd'hui beaucoup de littérature concernant la conjecture d'Elliott (voir [21] pour un aperçu assez complet du domaine) même si un grand nombre de questions restent ouvertes. L'utilisation de la KK-théorie a permis la démonstration de résultats spectaculaires. L'un des plus remarquables dans ce domaine est le théorème de classification des C*-algèbres de Kirchberg par E. Kirchberg ([16]) et N.C. Phillips ([18]) obtenue en 1994.

Définition 4.4. Une C*-algèbre de Kirchberg est une C*-algèbre simple, séparable, nucléaire non-isomorphe à $\mathbb{C}$ telle que pour tout couple (a, b) d'éléments positifs non nuls de $\mathcal{A}$, il existe $x \in \mathcal{A}$ tel que $b = x^*ax$.

Remarque 4.5. Une C*-algèbre simple non-isomorphe à $\mathbb{C}$ vérifiant la dernière propriété est dite *purement infinie*.

Théorème 4.6 (Kirchberg, Phillips). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des C*-algèbres de Kirchberg vérifiant la formule des coefficients universels,*

(1) Supposons que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ soient stables. Alors $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont isomorphes si et seulement s'il existe des isomorphismes

$$\alpha_0 : \mathrm{K}_0(\mathcal{A}) \to \mathrm{K}_0(\mathcal{B}) \quad et \quad \alpha_1 : \mathrm{K}_1(\mathcal{A}) \to \mathrm{K}_1(\mathcal{B}).$$

De plus, il existe alors un $*$-isomorphisme de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ induisant α_0 et α_1.

(2) Supposons que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ soient unifères. Alors $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont isomorphes si et seulement s'il existe des isomorphismes

$$\alpha_0 : \mathrm{K}_0(\mathcal{A}) \to \mathrm{K}_0(\mathcal{B}) \quad et \quad \alpha_1 : \mathrm{K}_1(\mathcal{A}) \to \mathrm{K}_1(\mathcal{B})$$

avec $\alpha_0([1_{\mathcal{A}}]_0) = [1_{\mathcal{B}}]_0$. De plus, il existe alors un $*$-isomorphisme unifère de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ induisant α_0 et α_1.

Toutefois, M. Rørdam a construit en 2003 dans [19] une C*-algèbre simple nucléaire possédant à la fois des projecteurs finis (non nuls) et infinis, fournissant ainsi un contre-exemple à la conjecture d'Elliott.

Les recherches concernant la conjecture d'Elliott suivent aujourd'hui plusieurs directions. On cherche d'une part à identifier la classe exacte des C*-algèbres qui sont classifiées par les invariants d'Elliott, cette classe semblant liée à des propriétés d'absorption (tensorielle) de certaines C*-algèbres dites *fortement auto-absorbantes* introduites par W. Winter et A. Toms dans [22].

Définition 4.7. Une C*-algèbre nucléaire et unifère $\mathcal{A}$ est dite fortement auto-absorbante si elle n'est pas isomorphe à $\mathbb{C}$ et s'il existe un $*$-isomorphisme $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ et une suite (v_n) d'unitaires de $\mathcal{A}$ tels que pour tout $x \in \mathcal{A}$, $\|v_n^* \varphi(x) v_n - 1_{\mathcal{A}} \otimes x\| \to 0$.

On cherche également une façon d'aborder le cas des C*-algèbres *stablement finies* en faisant des parallèles avec les méthodes permettant de traiter le cas des C*-algèbres purement infinies.

Définition 4.8. Une C*-algèbre $\mathcal{A}$ est dite *stablement finie* si quels que soient p et q des projecteurs dans $\mathcal{A} \otimes \mathcal{K}$ (où $\mathcal{K}$ est la C*-algèbre des opérateurs compacts sur l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$) tels que $p - q$ est positif et qu'il existe $v \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{K}$ tel que $v^*v = p$ et $vv^* = q$, on a $p = q$.

Enfin, on s'intéresse aux C*-algèbres non simples. La notion de déformation ou de champ de C*-algèbres permet d'aborder cette dernière question.

5. Déformations, classification et rigidité

5.1. **Champs continus de C*-algèbres.** C'est dans les années 1960 que J. Dixmier, J.M.G. Fell et J. Tomiyama se sont intéressés aux déformations de C*-algèbres. Leur recherche d'un formalisme approprié les a conduits à définir la notion de *champ continu de C*-algèbres*. G.G. Kasparov en a ensuite donné dans [15] une reformulation plus adaptée à certaines situations, c'est celle que nous utiliserons.

Définition 5.1. Une C(X)-*algèbre* est la donnée d'une C*-algèbre $\mathcal{A}$ et d'un $*$-homomorphisme unifère de C(X) dans le centre de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. On dit aussi que $\mathcal{A}$ est un *champ de C*-algèbres sur* X. On appelle *morphisme de champ* (ou C(X)-*morphisme*) de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ tout $*$-homomorphisme de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ commutant aux actions de C(X) sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

Remarque 5.2. Dans l'énoncé précédent, $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ désigne l'algèbre des multiplicateurs de $\mathcal{A}$, l'équivalent non-commutatif du compactifié de Stone-Čech. Nous ne détaillons pas cette notion car dans le cas où $\mathcal{A}$ est unifère, qui est celui qui va nous intéresser, on a $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

Soit $\mathcal{A}$ une C(X)-algèbre et Y un fermé de X. On note $C_Y(X)$ l'ensemble des fonctions de C(X) nulles sur Y. Alors, d'après le théorème de factorisation de Cohen, $C_Y(X).\mathcal{A}$ est un idéal bilatère fermé de $\mathcal{A}$ et on peut définir

$$\mathcal{A}(Y) := \mathcal{A}/C_Y(X).\mathcal{A}.$$

Il est clair que $\mathcal{A}(Y)$ est une C(Y)-algèbre. On l'appelle *restriction* de $\mathcal{A}$ à Y. On note π_Y la surjection canonique sur le quotient. Si Z est un fermé de Y, on a également une application de restriction

$$\pi_Z^Y : \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{A}(Z)$$

et on vérifie aisément que

$$\pi_Z = \pi_Z^Y \circ \pi_Y.$$

Si Y est un singleton $\{x\}$, on notera $\mathcal{A}_x$ ou $\mathcal{A}(x)$ au lieu de $\mathcal{A}(\{x\})$. La C*-algèbre $\mathcal{A}_x$ est appelée la *fibre* de $\mathcal{A}$ au point x. Si $a \in \mathcal{A}$, on note a_x son image dans $\mathcal{A}_x$.

La propriété suivante suggère une notion de continuité pour les champs de C*-algèbres.

Proposition 5.3. *L'application $x \mapsto \|a_x\|$ est semi-continue supérieurement pour tout $a \in \mathcal{A}$.*

Démonstration. On sait que

$$\|a_x\| = \inf\{\|a + (f - f(x))b\|, f \in C(X), b \in \mathcal{A}\}.$$

Ainsi l'application $x \mapsto \|a_x\|$ est la borne inférieure d'une famille de fonctions continues positives et est par conséquent semi-continue supérieurement. □

Définition 5.4. Un champs de C*-algèbres $\mathcal{A}$ est dit *continu* si pour tout $a \in \mathcal{A}$ l'application $x \mapsto \|a_x\|$ est continue.

Remarque 5.5. La notion la plus intuitive de déformation d'une C*-algèbre est celle d'*homotopie* (qui se définit comme pour les espaces topologiques). On vérifie aisément qu'une homotopie est un champ continu sur le segment $[0,1]$. Cependant, l'approche des C(X)-algèbres est beaucoup plus générale, tant parce qu'elle donne un point de vue global sur la déformation que parce qu'elle permet de déformer suivant n'importe quel espace topologique compact.

Remarque 5.6. Les champs continus de C*-algèbres apparaissent naturellement dans l'étude des C*-algèbres. En effet, J.M.G. Fell a montré que toute C*-algèbre séparable dont le spectre primitif $\mathrm{Prim}(\mathcal{A})$ (c'est-à-dire l'ensemble de ses idéaux primitifs muni de la topologie de Jacobson) est séparé est isomorphe à l'algèbre des sections d'un champ continu sur $\mathrm{Prim}(\mathcal{A})$ dont toutes les fibres sont simples (voir [12]).

Nous allons maintenant définir un exemple important de champ continu de C*-algèbres.

Définition 5.7. On appelle champ trivial sur X de fibre $\mathcal{B}$ la C*-algèbre $C(X) \otimes \mathcal{B}$ munie de l'action triviale de C(X).

Remarque 5.8. On peut montrer que $C(X) \otimes \mathcal{B} \cong C(X, \mathcal{B})$.

Il est évident qu'un champ trivial est un champ continu de C*-algèbres sur X et que sa fibre en tout point est égale à $\mathcal{B}$. De plus, nous pouvons maintenant définir la notion de trivialité (resp. trivialité locale) pour un champ de C*-algèbres.

Définition 5.9. Soit $\mathcal{A}$ un champ continu de C*-algèbres sur X. On dit que $\mathcal{A}$ est *trivialisable* s'il est isomorphe (en tant que champ) à un champ trivial. Si $x \in X$, on dit que $\mathcal{A}$ est *trivialisable au voisinage de x* s'il existe un voisinage fermé V de x tel que $\mathcal{A}(V)$ soit un champ trivialisable. On dit que $\mathcal{A}$ est *localement trivialisable* s'il est trivialisable au voisinage de chacun des points de X.

Par abus de langage, nous parlerons d'un champ *localement trivial* pour désigner un champ *localement trivialisable*.

Remarque 5.10. Il n'y a pas, dans la définition d'un champ continu de C*-algèbres, de condition de trivialité locale. De fait, un tel champ peut très bien n'être trivial au voisinage d'aucun point (voir [8, ex 8.4]).

5.2. **Classification.** Pour classifier ces champs de C*-algèbres, il faut tout d'abord savoir en classifier les fibres. Il faut ensuite trouver un invariant qui prenne en compte la structure de l'espace topologique X. Une méthode possible, introduite par M. Dădărlat et G. Elliott dans [8], est d'utiliser un *faisceau* de K-théorie. Deux problèmes apparaissent.

Le premier problème est que les préfaisceaux naturels de K-théorie, définis ci-après, ne sont pas en général des faisceaux (nous ne rappelons pas ici les définitions d'un préfaisceau et d'un faisceau).

Définition 5.11. Soit $\mathcal{A}$ un champ continu de C*-algèbres sur X. On définit, pour $i = 0, 1$, le préfaisceau de K_i-théorie de $\mathcal{A}$, noté $\mathbb{K}_i$, par

$$\mathbb{K}_i(\mathcal{A})(\mathrm{U}) = \mathrm{K}_i(\mathcal{A}(\mathrm{U})) \quad \text{et} \quad r_{\mathrm{V}}^{\mathrm{U}} = \mathrm{K}_i(\pi_{\mathrm{V}}^{\mathrm{U}})$$

pour tous fermés U et V de X avec $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ ($r_{\mathrm{V}}^{\mathrm{U}}$ désignant les applications de restriction du préfaisceau).

Le second problème est que la complexité de l'espace topologique de X intervient de façon critique, on ne sait donc actuellement classifier que des champs sur des segments, comme l'illustre le théorème suivant ([8, Thm 8.2]).

Théorème 5.12 (Dădărlat, Eliott). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des champs séparables unifères de C*-algèbres sur* $[0, 1]$ *dont toutes les fibres sont des C*-algèbres de Kirchberg, vérifiant la formule des coefficients universels, dont le* K_0*-groupe est sans torsion et dont le* K_1*-groupe est nul. Alors leurs préfaisceaux de K-théorie sont des faisceaux. De plus, s'il existe un isomorphisme de faisceaux*

$$\alpha : \mathbb{K}_0(\mathcal{A}) \to \mathbb{K}_0(\mathcal{B})$$

tel que

$$\alpha([1_{\mathcal{A}}]_0) = [1_{\mathcal{B}}]_0,$$

alors $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Mais il peut exister d'autres approches. M. Dădărlat a par exemple, à partir d'une étude fine des champs continus de C*-algèbres associés à des fibrés vectoriels localement triviaux, obtenu le théorème de classification suivant ([7, Thm 1.6]) pour les champs dont les fibres sont des C*-algèbres très particulières appelées *C*-algèbres de Cuntz* et introduites dans [3].

Définition 5.13 (C*-algèbres de Cuntz). Soit $n \geq 2$ un entier. Considérons l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} := \bigoplus_{i=1}^{n} \ell^2(\mathbb{N}).$$

Il est séparable, donc isomorphe à $\ell^2(\mathbb{N})$. On peut alors construire pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ un opérateur isométrique s_i de $\mathcal{H}$ dans sa i-ème composante. Vus comme des opérateurs sur $\mathcal{H}$, les s_i sont des isométries et vérifient la relation dite *relation de Cuntz* :

$$\sum_{i=1}^{n} s_i s_i^* = s_1 s_1^* + \ldots + s_n s_n^* = 1.$$

On note $\mathcal{O}_n$ la C*-algèbre engendrée par les s_i.

Considérons maintenant

$$\mathcal{H} := \bigoplus_{i=1}^{\infty} \ell^2(\mathbb{N}),$$

qui est toujours séparable donc isomorphe à chacun de ses facteurs. On obtient alors une famille $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'isométries vérifiant la relation, toujours appelée relation de Cuntz,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{n} s_i s_i^* = s_1 s_1^* + \ldots + s_n s_n^* \leqslant 1.$$

On note $\mathcal{O}_\infty$ la C*-algèbre engendrée par les s_i.

Théorème 5.14 (Dădărlat). *Soit* X *un CW-complexe fini de dimension d et $m \geqslant \lceil (d-3)/2 \rceil$ un entier tel que* $\mathrm{Tor}(\mathrm{H}^*(\mathrm{X},\mathbb{Z}),\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = 0$. *On note $\mathcal{O}_{m+1}(\mathrm{X})$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de champs continus de C*-algèbres sur* X *dont toutes les fibres sont isomorphes à l'algèbre de Cuntz $\mathcal{O}_{m+1}$. Alors tout représentant d'un élément de $\mathcal{O}_{m+1}(\mathrm{X})$ est la C*-algèbre associée à un fibré vectoriel localement trivial de dimension $m+1$ sur* X. *De plus,*

$$|\mathcal{O}_{m+1}(\mathrm{X})| = |\tilde{\mathrm{K}}^0(\mathrm{X}) \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}| = |\tilde{\mathrm{H}}^{impair}(\mathrm{X},\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})|.$$

5.3. **Rigidité.** Dans [4], J. Dixmier et A. Douady se sont intéressés à la question suivante, posée par R. Godement dans [13] : existe-t-il des espaces topologiques non-triviaux sur lesquels tout fibré en espaces de Hilbert est trivial ?

Leur réponse ([4, Thm 5]) est positive pour une classe assez grande d'espaces. Nous rappelons qu'un espace topologique est dit *paracompact* s'il est séparé et si de tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous-recouvrement localement fini. Nous donnons également la définition de la dimension (de recouvrement) d'un espace topologique.

Définition 5.15. Soit X un espace topologique et n un entier. On dit que X est de dimension inférieure à n et on note $\dim(\mathrm{X}) \leqslant n$ si tout recouvrement ouvert (U_i) de X admet un raffinement (U'_i) tel que tout pour tout $x \in \mathrm{X}$, $\left\{i, x \in \mathrm{U}'_i\right\}$ est de cardinal au plus n. On appelle dimension de X, notée $\dim(\mathrm{X})$, le plus petit entier k tel que $\dim(\mathrm{X}) \leqslant k$.

Théorème 5.16 (Dixmier, Douady). *Soit $\mathcal{E}$ un champ continu d'espaces de Hilbert séparables de dimension infinie sur un espace topologique paracompact de dimension finie. Alors $\mathcal{E}$ trivial.*

Ils se sont ensuite intéressés à la même propriété pour des fibrés en C*-algèbres, ce qui correspond aux champs continus de C*-algèbres. Dans [8], M. Dădărlat et G. Elliott ont reprit cette question sous l'angle de la classification : existe-t-il des C*-algèbres $\mathcal{A}$ telles que tout champ continu sur $[0,1]$ dont toutes les fibres sont isomorphes à $\mathcal{A}$ soit trivial ?

Ils donnent dans [8, Thm 7.3] une réponse faisant à nouveau intervenir les C*-algèbres de Cuntz.

Théorème 5.17 (Dădărlat, Eliott). *Soit $n \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$ fixé. Si $\mathcal{A}$ est un champ continu séparable unifère de C*-algèbres sur un segment dont toutes les fibres sont isomorphes à $\mathcal{O}_n$, alors $\mathcal{A}$ est trivial.*

Déroulement de la preuve. La démonstration se fait en trois étapes.

(1) On prouve le théorème pour des champs dits *élémentaires*, c'est-à-dire ne possédant qu'un nombre fini de singularités en dehors desquelles ils sont triviaux. La démonstration de ce cas est déjà extrêmement délicate.

(2) On utilise une propriété particulière des C*-algèbres simples concernées : elles sont *semiprojectives*. Il s'agit d'une propriété d'approximation qui permet d'écrire n'importe quel champ vérifiant les hypothèses de l'énoncé comme une limite inductive de champs élémentaires.

(3) Il reste maintenant à vérifier qu'une limite inductive de champs triviaux est triviale. On emploie pour cela un argument dû à Elliott et devenu désormais classique dans ce genre de preuve : l'*entrelacement approximatif*.

□

Il s'agit d'un résultat de rigidité puisqu'il affirme qu'aucun champ non-trivial ne peut avoir toutes ses fibres isomorphes à une même algèbre de Cuntz. Dit autrement, il est impossible de déformer une algèbre de Cuntz dans elle-même (sur un segment). M. Dădârlat a ensuite étudié cette question plus en détails dans [9], [5] et [6] parvenant à des résultats qui seront finalement dépassés par le surprenant [10, Thm 0.1] :

Théorème 5.18 (Dădârlat, Winter). *Soit $\mathcal{B}$ une C*-algèbre fortement auto-absorbante et* K_1*-injective. Alors tout champ continu de C*-algèbres sur un espace topologique de dimension finie* X *dont toutes les fibres sont isomorphes à* $\mathcal{B}$ *est trivial.*

Remarque 5.19. Le résultat récent [23, Thm 3.1] de W. Winter affirme que toute C*-algèbre fortement auto-absorbante est K_1-injective. On peut donc retirer du théorème précédent l'hypothèse de K_1-injectivité.

Il est intéressant de remarquer que ce sont à nouveau les C*-algèbres fortement auto-absorbantes, celles là-même qui semblent jouer un rôle important pour la classification des C*-algèbres, qui interviennent dans ces questions de rigidité. Les seules C*-algèbres fortement auto-absorbantes connues sont les algèbres de Cuntz $\mathcal{O}_2$ et $\mathcal{O}_\infty$, l'*algèbre de Jiang-Su* $\mathcal{Z}$, les *UHF-algèbres de type infini* et les produits tensoriels de $\mathcal{O}_\infty$ par ces dernières.

Ce résultat appelle deux questions :

(1) Quelle est la classe exacte des C*-algèbres possèdant cette propriété de trivialité automatique sur les espaces de dimension finie ?

(2) Que se passe-t-il quand l'espace X est de dimension infinie ?

Il n'est pas très difficile d'identifier toutes les C*-algèbres de Kirchberg possédant la propriété de trivialité automatique. En effet cette propriété s'exprime alors en termes de K-théorie et les C*-algèbres de Kirchberg sont classifiées par leur K-théorie. Il n'y a par contre aucun résultat dans le cas stablement fini.

Des contre-exemples sur des espaces de dimension infinie ont étés donnés pour $\mathcal{O}_2$ ([5]) et pour les UHF-algèbres de type infini ([14]). Il n'y a par contre à ce jour aucun contre-exemple pour $\mathcal{O}_\infty$.

Références

1. B. Blackadar, *K-theory for operator algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
2. J. B. Conway, *A course in operator theory*, American Mathematical Society, 2000.
3. J. Cuntz, *Simple C*-algebra generated by isometries*, Communications in mathematical physics **57** (1977), no. 2, 173–185.
4. J. Dixmier and A. Douady, *Champs continus d'espaces hilbertiens et de C*-algèbres*, Bulletin de la Société Mathémathique de France **91** (1963), 227–284.
5. M. Dădărlat, *Fiberwise KK-equivalence of continuous fields of C*-algebras*, Journal of K-theory **3** (2008), no. 2, 205–219.
6. ______, *Continuous fields of C*-algebras over finite dimensional spaces*, Advances in Mathematics **222** (2009), no. 5, 1850–1881.
7. ______, *The C*-algebra of a vector bundle*, à paraître (2010).
8. M. Dădărlat and G.A. Elliott, *One-parameter continuous fields of Kirchberg algebras*, Communications in Mathematical Physics **274** (2007), no. 3, 795–819.
9. M. Dădărlat and C. Pasnicu, *Continuous fields of Kirchberg C*-algebras*, J. Funct. Anal. **226** (2005), no. 2, 229–251.
10. M. Dădărlat and W. Winter, *Trivialization of C(X)-algebras with strongly self-asborbing fibers*, preprint (2007).
11. G. A. Elliott, *On the classification of C*-algebras of real rank zero*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik **443** (1993), 179–219.
12. J. M. G. Fell, *The structure of algebras of operator fields*, Acta Mathematica **106** (1961), no. 3, 233–280.
13. R. Godement, *Sur la théorie des représentations unitaires*, Annals of mathematics **53** (1951), no. 2, 62–124.
14. I. Hirshberg, M. Rørdam, and W. Winter, *$C_0(X)$-algebras, stability and strongly self-absorbing C*-algebras*, Mathematische Annalen **339** (2007), no. 3, 695–732.
15. G. G. Kasparov, *Equivariant KK-theory and the Novikov conjecture*, Invent. Math. **91** (1988), 147–201.
16. E. Kirchberg, *The classification of purely infinite C*-algebras using Kasparov's theory*, Lectures in operator algebras, Fields Institute monographs, American Mathematical Society, 1998.
17. G. Pedersen, *Analysis now*, Springer, 1988.
18. N. C. Phillips, *A classification theorem for nuclear purely infinite simple C*-algebras*, Documenta Mathematica **5** (2000), 49–114.
19. M. Rørdam, *A simple C*-algebra with a finite and an infinite projection*, Acta Mathematica **191** (2003), no. 1, 109–142.
20. M. Rørdam, F. Larsen, and N. Laustsen, *An Introduction to K-theory for C*-algebras*, Cambridge University Press, 2000.
21. M. Rørdam and E. Størmer, *Classification of nuclear C*-algebras. Entropy in operator algebras*, Springer, 2002.
22. A. S. Toms and W. Winter, *Strongly self-absorbing C*-algebras*, Transactions of the american mathematical society **359** (2007), no. 8, 3999–4029.
23. W. Winter, *Strongly self-absorbing C*-algebras are $\mathcal{Z}$-stable*, preprint (2009).

E-mail address: `amaury.freslon@ens.fr`
URL: `http://www.eleves.ens.fr/home/freslon`