

Théorie géométrique des groupes quantiques discrets

Amaury Freslon

Institut de Mathématiques de Jussieu – Université Paris VII

Université Blaise Pascal

8 février 2012

C^* -algèbres et topologie non-commutative

Définition

Une C^* -algèbre est une algèbre de Banach involutive A satisfaisant $\|x^*x\| = \|x\|^2$.

Exemple : X espace topologique localement compact $\implies C_0(X)$ C^* -algèbre commutative pour les opérations ponctuelles et la conjugaison complexe.

Théorème (Gel'fand, Naimark)

A C^* -algèbre commutative $\iff A \simeq C_0(X)$.

C^* -algèbres et topologie non-commutative

Définition

Une C^* -algèbre est une algèbre de Banach involutive A satisfaisant $\|x^*x\| = \|x\|^2$.

Exemple : X espace topologique localement compact $\implies C_0(X)$ C^* -algèbre commutative pour les opérations ponctuelles et la conjugaison complexe.

Théorème (Gel'fand, Naimark)

A C^* -algèbre commutative $\iff A \simeq C_0(X)$.

C^* -algèbres et topologie non-commutative

Définition

Une C^* -algèbre est une algèbre de Banach involutive A satisfaisant $\|x^*x\| = \|x\|^2$.

Exemple : X espace topologique localement compact $\implies C_0(X)$ C^* -algèbre commutative pour les opérations ponctuelles et la conjugaison complexe.

Théorème (Gel'fand, Naimark)

A C^* -algèbre commutative $\iff A \simeq C_0(X)$.

Groupes quantiques compacts de Woronowicz

Définition (S.L. Woronowicz)

Une *groupe quantique compact* est un couple (A, Δ) , A C^* -algèbre unifère et $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$ $*$ -homomorphisme (coproduit) tel que :

$$\underline{(\Delta \otimes \iota) \circ \Delta = (\iota \otimes \Delta) \circ \Delta} \text{ (coassociativité)}$$

$$\Delta(A)(1 \otimes A) = A \otimes A = \Delta(A)(A \otimes 1) \text{ (bisimplifiabilité).}$$

Exemple : G groupe compact et $\Delta_G : C(G) \rightarrow C(G \times G) \simeq C(G) \otimes C(G)$ induit par le produit. Tout groupe quantique compact commutatif est isomorphe à un (G, Δ_G) .

Exemple : Γ un groupe discret et $\Delta_\Gamma : C_r^*(\Gamma) \rightarrow C_r^*(\Gamma) \otimes C_r^*(\Gamma)$ application diagonale. Tout groupe quantique cocommutatif est (presque) isomorphe à un $(C_r^*(\Gamma), \Delta_\Gamma)$.

Groupes quantiques compacts de Woronowicz

Définition (S.L. Woronowicz)

Une *groupe quantique compact* est un couple (A, Δ) , A C^* -algèbre unifère et $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$ $*$ -homomorphisme (coproduit) tel que :

$$\underline{(\Delta \otimes \iota) \circ \Delta = (\iota \otimes \Delta) \circ \Delta} \text{ (coassociativité)}$$

$$\Delta(A)(1 \otimes A) = A \otimes A = \Delta(A)(A \otimes 1) \text{ (bisimplifiabilité).}$$

Exemple : G groupe compact et $\Delta_G : C(G) \rightarrow C(G \times G) \simeq C(G) \otimes C(G)$ induit par le produit. Tout groupe quantique compact commutatif est isomorphe à un (G, Δ_G) .

Exemple : Γ un groupe discret et $\Delta_\Gamma : C_r^*(\Gamma) \rightarrow C_r^*(\Gamma) \otimes C_r^*(\Gamma)$ application diagonale. Tout groupe quantique cocommutatif est (presque) isomorphe à un $(C_r^*(\Gamma), \Delta_\Gamma)$.

Groupes quantiques compacts de Woronowicz

Définition (S.L. Woronowicz)

Une *groupe quantique compact* est un couple (A, Δ) , A C^* -algèbre unifère et $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$ $*$ -homomorphisme (coproduit) tel que :

$$\underline{(\Delta \otimes \iota) \circ \Delta = (\iota \otimes \Delta) \circ \Delta} \text{ (coassociativité)}$$

$$\Delta(A)(1 \otimes A) = A \otimes A = \Delta(A)(A \otimes 1) \text{ (bisimplifiabilité).}$$

Exemple : G groupe compact et $\Delta_G : C(G) \rightarrow C(G \times G) \simeq C(G) \otimes C(G)$ induit par le produit. Tout groupe quantique compact commutatif est isomorphe à un (G, Δ_G) .

Exemple : Γ un groupe discret et $\Delta_\Gamma : C_r^*(\Gamma) \rightarrow C_r^*(\Gamma) \otimes C_r^*(\Gamma)$ application diagonale. Tout groupe quantique cocommutatif est (presque) isomorphe à un $(C_r^*(\Gamma), \Delta_\Gamma)$.

Quelques notions élémentaires (S.L. Woronowicz)

Soit $\mathbb{G} = (C(\mathbb{G}), \Delta)$ un groupe quantique compact.

- ① Il existe un unique *état de Haar* h sur $C(\mathbb{G})$ vérifiant

$$(h \otimes \iota) \circ \Delta(x) = h(x)1 = (\iota \otimes h) \circ \Delta(x).$$

- ② Une *représentation de dimension finie* U est une matrice unitaire $(U_{i,j})$ à coefficients dans $C(\mathbb{G})$ telle que

$$\Delta(U_{i,j}) = \sum_k U_{i,k} \otimes U_{k,j}.$$

- ③ Il existe une sous- $*$ -algèbre de Hopf dense canonique $(\mathcal{A}, \Delta, \varepsilon, S)$ linéairement engendrée par les coefficients des représentations de dimension finie.

Quelques notions élémentaires (S.L. Woronowicz)

Soit $\mathbb{G} = (C(\mathbb{G}), \Delta)$ un groupe quantique compact.

- 1 Il existe un unique *état de Haar* h sur $C(\mathbb{G})$ vérifiant

$$(h \otimes \iota) \circ \Delta(x) = h(x)1 = (\iota \otimes h) \circ \Delta(x).$$

- 2 Une *représentation de dimension finie* U est une matrice unitaire $(U_{i,j})$ à coefficients dans $C(\mathbb{G})$ telle que

$$\Delta(U_{i,j}) = \sum_k U_{i,k} \otimes U_{k,j}.$$

- 3 Il existe une sous- $*$ -algèbre de Hopf dense canonique $(\mathcal{A}, \Delta, \varepsilon, S)$ linéairement engendrée par les coefficients des représentations de dimension finie.

Quelques notions élémentaires (S.L. Woronowicz)

Soit $\mathbb{G} = (C(\mathbb{G}), \Delta)$ un groupe quantique compact.

- 1 Il existe un unique *état de Haar* h sur $C(\mathbb{G})$ vérifiant

$$(h \otimes \iota) \circ \Delta(x) = h(x)1 = (\iota \otimes h) \circ \Delta(x).$$

- 2 Une *représentation de dimension finie* U est une matrice unitaire $(U_{i,j})$ à coefficients dans $C(\mathbb{G})$ telle que

$$\Delta(U_{i,j}) = \sum_k U_{i,k} \otimes U_{k,j}.$$

- 3 Il existe une sous- $*$ -algèbre de Hopf dense canonique $(\mathcal{A}, \Delta, \varepsilon, S)$ linéairement engendrée par les coefficients des représentations de dimension finie.

Quelques notions élémentaires (S.L. Woronowicz)

Soit $\mathbb{G} = (C(\mathbb{G}), \Delta)$ un groupe quantique compact.

- 1 Il existe un unique *état de Haar* h sur $C(\mathbb{G})$ vérifiant

$$(h \otimes \iota) \circ \Delta(x) = h(x)1 = (\iota \otimes h) \circ \Delta(x).$$

- 2 Une *représentation de dimension finie* U est une matrice unitaire $(U_{i,j})$ à coefficients dans $C(\mathbb{G})$ telle que

$$\Delta(U_{i,j}) = \sum_k U_{i,k} \otimes U_{k,j}.$$

- 3 Il existe une sous- $*$ -algèbre de Hopf dense canonique $(\mathcal{A}, \Delta, \varepsilon, S)$ linéairement engendrée par les coefficients des représentations de dimension finie.

Dualité et groupes quantiques discrets

Soit \mathbb{G} un groupe quantique compact. Il possède un *groupe quantique discret dual*. Soit $Irr(\mathbb{G})$ l'ensemble des classes d'équivalences de représentations irréductibles.

$$C_0(\widehat{\mathbb{G}}) = \bigoplus_{\alpha \in Irr(\mathbb{G})} B(H_\alpha)$$

$$\widehat{\Delta}(a)T = Ta$$

Pour $a \in B(H_\alpha)$ et $T \in \text{Mor}(\alpha, \beta \otimes \gamma)$.
→ *dualité de Pontryagin* !

Dualité et groupes quantiques discrets

Soit \mathbb{G} un groupe quantique compact. Il possède un *groupe quantique discret dual*. Soit $Irr(\mathbb{G})$ l'ensemble des classes d'équivalences de représentations irréductibles.

$$C_0(\widehat{\mathbb{G}}) = \bigoplus_{\alpha \in Irr(\mathbb{G})} B(H_\alpha)$$

$$\widehat{\Delta}(a)T = Ta$$

Pour $a \in B(H_\alpha)$ et $T \in \text{Mor}(\alpha, \beta \otimes \gamma)$.
→ *dualité de Pontryagin!*

Dualité et groupes quantiques discrets

Soit \mathbb{G} un groupe quantique compact. Il possède un *groupe quantique discret dual*. Soit $Irr(\mathbb{G})$ l'ensemble des classes d'équivalences de représentations irréductibles.

$$C_0(\widehat{\mathbb{G}}) = \bigoplus_{\alpha \in Irr(\mathbb{G})} B(H_\alpha)$$

$$\widehat{\Delta}(a)T = Ta$$

Pour $a \in B(H_\alpha)$ et $T \in \text{Mor}(\alpha, \beta \otimes \gamma)$.
→ *dualité de Pontryagin* !

Dualité et groupes quantiques discrets

Soit \mathbb{G} un groupe quantique compact. Il possède un *groupe quantique discret dual*. Soit $Irr(\mathbb{G})$ l'ensemble des classes d'équivalences de représentations irréductibles.

$$C_0(\widehat{\mathbb{G}}) = \bigoplus_{\alpha \in Irr(\mathbb{G})} B(H_\alpha)$$

$$\widehat{\Delta}(a)T = Ta$$

Pour $a \in B(H_\alpha)$ et $T \in \text{Mor}(\alpha, \beta \otimes \gamma)$.

→ *dualité de Pontryagin* !

Dualité et groupes quantiques discrets

Soit \mathbb{G} un groupe quantique compact. Il possède un *groupe quantique discret dual*. Soit $Irr(\mathbb{G})$ l'ensemble des classes d'équivalences de représentations irréductibles.

$$C_0(\widehat{\mathbb{G}}) = \bigoplus_{\alpha \in Irr(\mathbb{G})} B(H_\alpha)$$

$$\widehat{\Delta}(a)T = Ta$$

Pour $a \in B(H_\alpha)$ et $T \in \text{Mor}(\alpha, \beta \otimes \gamma)$.
→ *dualité de Pontryagin* !

Groupes et C^* -algèbres exacts

Théorème (E. Kircherg, S. Wassermann)

Soit Γ un groupe discret. Le foncteur $\rtimes_r \Gamma$ est exact si et seulement si le foncteur $\otimes_{\min} C_r^(\Gamma)$ est exact.*

Soit \mathbb{G} un groupe quantique compact et π_h la représentation GNS associée à l'état de Haar.

$$\begin{aligned}\pi_h(\mathbb{G}) &= C_{red}(\mathbb{G}) \rightsquigarrow C_r^*(\widehat{\mathbb{G}}) \\ \pi_h(\mathbb{G})'' &= L^\infty(\mathbb{G}) \rightsquigarrow L\widehat{\mathbb{G}}.\end{aligned}$$

Le théorème précédent reste valable pour des groupes quantiques discrets.

Groupes et C^* -algèbres exacts

Théorème (E. Kircherg, S. Wassermann)

Soit Γ un groupe discret. Le foncteur $\rtimes_r \Gamma$ est exact si et seulement si le foncteur $\otimes_{\min} C_r^(\Gamma)$ est exact.*

Soit \mathbb{G} un groupe quantique compact et π_h la représentation GNS associée à l'état de Haar.

$$\begin{aligned}\pi_h(\mathbb{G}) &= C_{red}(\mathbb{G}) \rightsquigarrow C_r^*(\widehat{\mathbb{G}}) \\ \pi_h(\mathbb{G})'' &= L^\infty(\mathbb{G}) \rightsquigarrow L\widehat{\mathbb{G}}.\end{aligned}$$

Le théorème précédent reste valable pour des groupes quantiques discrets.

Groupes et C^* -algèbres exacts

Théorème (E. Kircherg, S. Wassermann)

Soit Γ un groupe discret. Le foncteur $\rtimes_r \Gamma$ est exact si et seulement si le foncteur $\otimes_{\min} C_r^(\Gamma)$ est exact.*

Soit \mathbb{G} un groupe quantique compact et π_h la représentation GNS associée à l'état de Haar.

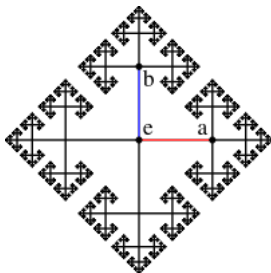
$$\begin{aligned}\pi_h(\mathbb{G}) &= C_{red}(\mathbb{G}) \rightsquigarrow C_r^*(\widehat{\mathbb{G}}) \\ \pi_h(\mathbb{G})'' &= L^\infty(\mathbb{G}) \rightsquigarrow L\widehat{\mathbb{G}}.\end{aligned}$$

Le théorème précédent reste valable pour des groupes quantiques discrets.

Exemple des groupes libres (cf. N.P. Brown, N. Ozawa)

Le groupe libre \mathbb{F}_n sur n générateurs est exact.

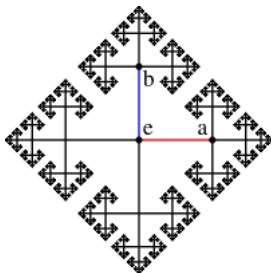
- Γ exact $\iff \Gamma$ possède une action moyennable sur un espace compact
- \mathbb{F}_n agit de façon moyennable sur ses "bords infinis" (frontière de Gromov)



Exemple des groupes libres (cf. N.P. Brown, N. Ozawa)

Le groupe libre \mathbb{F}_n sur n générateurs est exact.

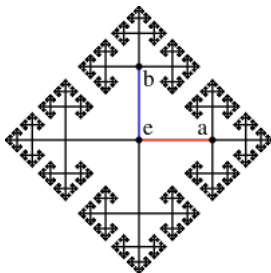
- Γ exact $\iff \Gamma$ possède une *action moyennable* sur un espace compact.
- \mathbb{F}_n agit de façon moyennable sur ses "mots infinis" (frontière de Gromov).



Exemple des groupes libres (cf. N.P. Brown, N. Ozawa)

Le groupe libre \mathbb{F}_n sur n générateurs est exact.

- Γ exact $\iff \Gamma$ possède une *action moyennable* sur un espace compact.
- \mathbb{F}_n agit de façon moyennable sur ses "mots infinis" (frontière de Gromov).



Les groupes quantiques libres (S. Wang)

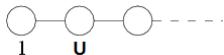
On part de versions "libres" des groupes unitaires et orthogonaux.

$$A_u(N) = C^*((u_{ij})_{1 \leq i, j \leq N} | [u_{ij}] \text{ unitaire})$$

$$A_o(N) = C^*((u_{ij})_{1 \leq i, j \leq N} | u_{ij}^* = u_{ij} \text{ et } [u_{ij}] \text{ unitaire})$$

donnent des groupes quantiques compacts U_N^+ et O_N^+ . Représentations de O_N^+ : monoïde \mathbb{N} avec les règles de fusion

$$k \otimes r = (|k - r|) \oplus (|k - r| + 2) \oplus \dots \oplus (k + r).$$



Les groupes quantiques libres (S. Wang)

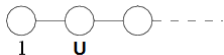
On part de versions "libres" des groupes unitaires et orthogonaux.

$$A_u(N) = C^*((u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N} | [u_{i,j}] \text{ unitaire})$$

$$A_o(N) = C^*((u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N} | u_{i,j}^* = u_{i,j} \text{ et } [u_{i,j}] \text{ unitaire})$$

donnent des groupes quantiques compacts U_N^+ et O_N^+ . Représentations de O_N^+ : monoïde \mathbb{N} avec les règles de fusion

$$k \otimes r = (|k-r|) \oplus (|k-r|+2) \oplus \dots \oplus (k+r).$$



Les groupes quantiques libres (S. Wang)

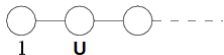
On part de versions "libres" des groupes unitaires et orthogonaux.

$$A_u(N) = C^*((u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N} | [u_{i,j}] \text{ unitaire})$$

$$A_o(N) = C^*((u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N} | u_{i,j}^* = u_{i,j} \text{ et } [u_{i,j}] \text{ unitaire})$$

donnent des groupes quantiques compacts U_N^+ et O_N^+ . Représentations de O_N^+ : monoïde \mathbb{N} avec les règles de fusion

$$k \otimes r = (|k - r|) \oplus (|k - r| + 2) \oplus \cdots \oplus (k + r).$$



Stratégie pour O_N^+ (S. Vaes et R. Vergnioux)

Contrairement au cas des groupes libres, la preuve est extrêmement technique !

- Soit $V_k : H_{k+1} \rightarrow H_k \otimes H_1$ un opérateur d'entrelacement isométrique. On plonge $B(H_k)$ dans $B(H_{k+1})$ par $a \mapsto V_k^*(a \otimes 1)V_k$ et on construit une "limite inductive" B .
- B est une "compactification" : $C_0(\widehat{O_N^+}) \subset B \subset M(C_0(\widehat{O_N^+}))$.
- L'action de O_N^+ sur lui-même s'étend en une action moyennable sur le "compact" $B/C_0(\widehat{O_N^+})$.
- On en déduit l'exactitude et la propriété d'Akemann-Ostrand.

Remarque

La preuve permet de dégager une notion d'action moyennable pour les groupes quantiques.

Stratégie pour O_N^+ (S. Vaes et R. Vergnioux)

Contrairement au cas des groupes libres, la preuve est extrêmement technique !

- Soit $V_k : H_{k+1} \rightarrow H_k \otimes H_1$ un opérateur d'entrelacement isométrique. On plonge $B(H_k)$ dans $B(H_{k+1})$ par $a \mapsto V_k^*(a \otimes 1)V_k$ et on construit une "limite inductive" B .
- B est une "compactification" : $C_0(\widehat{O_N^+}) \subset B \subset M(C_0(\widehat{O_N^+}))$.
- L'action de O_N^+ sur lui-même s'étend en une action moyennable sur le "compact" $B/C_0(\widehat{O_N^+})$.
- On en déduit l'exactitude et la propriété d'Akemann-Ostrand.

Remarque

La preuve permet de dégager une notion d'action moyennable pour les groupes quantiques.

Stratégie pour O_N^+ (S. Vaes et R. Vergnioux)

Contrairement au cas des groupes libres, la preuve est extrêmement technique !

- Soit $V_k : H_{k+1} \rightarrow H_k \otimes H_1$ un opérateur d'entrelacement isométrique. On plonge $B(H_k)$ dans $B(H_{k+1})$ par $a \mapsto V_k^*(a \otimes 1)V_k$ et on construit une "limite inductive" B .
- B est une "compactification" : $C_0(\widehat{O_N^+}) \subset B \subset M(C_0(\widehat{O_N^+}))$.
- L'action de O_N^+ sur lui-même s'étend en une action moyennable sur le "compact" $B/C_0(\widehat{O_N^+})$.
- On en déduit l'exactitude et la propriété d'Akemann-Ostrand.

Remarque

La preuve permet de dégager une notion d'action moyennable pour les groupes quantiques.

Stratégie pour O_N^+ (S. Vaes et R. Vergnioux)

Contrairement au cas des groupes libres, la preuve est extrêmement technique !

- Soit $V_k : H_{k+1} \rightarrow H_k \otimes H_1$ un opérateur d'entrelacement isométrique. On plonge $B(H_k)$ dans $B(H_{k+1})$ par $a \mapsto V_k^*(a \otimes 1)V_k$ et on construit une "limite inductive" B .
- B est une "compactification" : $C_0(\widehat{O_N^+}) \subset B \subset M(C_0(\widehat{O_N^+}))$.
- L'action de O_N^+ sur lui-même s'étend en une action moyennable sur le "compact" $B/C_0(\widehat{O_N^+})$.
- On en déduit l'exactitude et la propriété d'Akemann-Ostrand.

Remarque

La preuve permet de dégager une notion d'action moyennable pour les groupes quantiques.

Stratégie pour O_N^+ (S. Vaes et R. Vergnioux)

Contrairement au cas des groupes libres, la preuve est extrêmement technique !

- Soit $V_k : H_{k+1} \rightarrow H_k \otimes H_1$ un opérateur d'entrelacement isométrique. On plonge $B(H_k)$ dans $B(H_{k+1})$ par $a \mapsto V_k^*(a \otimes 1)V_k$ et on construit une "limite inductive" B .
- B est une "compactification" : $C_0(\widehat{O_N^+}) \subset B \subset M(C_0(\widehat{O_N^+}))$.
- L'action de O_N^+ sur lui-même s'étend en une action moyennable sur le "compact" $B/C_0(\widehat{O_N^+})$.
- On en déduit l'exactitude et la propriété d'Akemann-Ostrand.

Remarque

La preuve permet de dégager une notion d'action moyennable pour les groupes quantiques.

Stratégie pour O_N^+ (S. Vaes et R. Vergnioux)

Contrairement au cas des groupes libres, la preuve est extrêmement technique !

- Soit $V_k : H_{k+1} \rightarrow H_k \otimes H_1$ un opérateur d'entrelacement isométrique. On plonge $B(H_k)$ dans $B(H_{k+1})$ par $a \mapsto V_k^*(a \otimes 1)V_k$ et on construit une "limite inductive" B .
- B est une "compactification" : $C_0(\widehat{O_N^+}) \subset B \subset M(C_0(\widehat{O_N^+}))$.
- L'action de O_N^+ sur lui-même s'étend en une action moyennable sur le "compact" $B/C_0(\widehat{O_N^+})$.
- On en déduit l'exactitude et la propriété d'Akemann-Ostrand.

Remarque

La preuve permet de dégager une notion d'action moyennable pour les groupes quantiques.

Multiplicateurs de Herz-Schur

Définition

Le *multiplicateur* associé à $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$ est l'opérateur

$$m_\varphi : \begin{cases} B(\ell^2(G)) & \rightarrow & B(\ell^2(G)) \\ \lambda_g & \mapsto & \varphi(g)\lambda_g \end{cases}$$

Proposition (J. Gilbert)

$\|m_\varphi\|_{cb} < \infty \iff$ il existe H Hilbert et $(\xi_g)_{g \in G}, (\eta_g)_{g \in G} \in H$ tels que $\varphi(st^{-1}) = \langle \eta_t, \xi_s \rangle$.

On dit alors que m_φ est un *multiplicateur de Herz-Schur*.

Multiplicateurs de Herz-Schur

Définition

Le *multiplicateur* associé à $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$ est l'opérateur

$$m_\varphi : \begin{cases} B(\ell^2(G)) & \rightarrow & B(\ell^2(G)) \\ \lambda_g & \mapsto & \varphi(g)\lambda_g \end{cases}$$

Proposition (J. Gilbert)

$\|m_\varphi\|_{cb} < \infty \iff$ il existe H Hilbert et $(\xi_g)_{g \in G}, (\eta_g)_{g \in G} \in H$ tels que $\varphi(st^{-1}) = \langle \eta_t, \xi_s \rangle$.

On dit alors que m_φ est un *multiplicateur de Herz-Schur*.

Multiplicateurs de Herz-Schur

Définition

Le *multiplicateur* associé à $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$ est l'opérateur

$$m_\varphi : \begin{cases} B(\ell^2(G)) & \rightarrow & B(\ell^2(G)) \\ \lambda_g & \mapsto & \varphi(g)\lambda_g \end{cases}$$

Proposition (J. Gilbert)

$\|m_\varphi\|_{cb} < \infty \iff$ il existe H Hilbert et $(\xi_g)_{g \in G}, (\eta_g)_{g \in G} \in H$ tels que $\varphi(st^{-1}) = \langle \eta_t, \xi_s \rangle$.

On dit alors que m_φ est un *multiplicateur de Herz-Schur*.

Moyennabilité faible (M. Cowling, U. Haagerup)

Définition

Un groupe discret G est *faiblement moyennable* s'il existe une suite de fonctions $\varphi_i: G \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

- 1 φ_i est à support fini pour tout i
- 2 $|\varphi_i(g) - 1| \rightarrow 0$ pour tout $g \in G$
- 3 m_{φ_i} est u.c.p. pour tout i
- 4 $\limsup \|m_{\varphi_i}\|_{cb} < \infty$

Exemple : Groupes hyperboliques, $SO(1, n)$, $SU(1, n)$, $Sp(1, n)$.

La moyennabilité faible permet d'utiliser des techniques de déformation/rigidité (cf. Ozawa-Popa, Popa-Vaes).

Moyennabilité faible (M. Cowling, U. Haagerup)

Définition

Un groupe discret G est *faiblement moyennable* s'il existe une suite de fonctions $\varphi_i: G \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

- 1 φ_i est à support fini pour tout i
- 2 $|\varphi_i(g) - 1| \rightarrow 0$ pour tout $g \in G$
- 3 m_{φ_i} est u.c.p. pour tout i
- 4 $\limsup \|m_{\varphi_i}\|_{cb} < \infty$

Exemple : Groupes hyperboliques, $SO(1, n)$, $SU(1, n)$, $Sp(1, n)$.

La moyennabilité faible permet d'utiliser des techniques de déformation/rigidité (cf. Ozawa-Popa, Popa-Vaes).

Moyennabilité faible (M. Cowling, U. Haagerup)

Définition

Un groupe discret G est *faiblement moyennable* s'il existe une suite de fonctions $\varphi_i: G \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

- 1 φ_i est à support fini pour tout i
- 2 $|\varphi_i(g) - 1| \rightarrow 0$ pour tout $g \in G$
- 3 m_{φ_i} est u.c.p. pour tout i
- 4 $\limsup \|m_{\varphi_i}\|_{cb} < \infty$

Exemple : Groupes hyperboliques, $SO(1, n)$, $SU(1, n)$, $Sp(1, n)$.

La moyennabilité faible permet d'utiliser des techniques de déformation/rigidité (cf. Ozawa-Popa, Popa-Vaes).

Moyennabilité faible (M. Cowling, U. Haagerup)

Définition

Un groupe discret G est *faiblement moyennable* s'il existe une suite de fonctions $\varphi_i: G \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

- 1 φ_i est à support fini pour tout i
- 2 $|\varphi_i(g) - 1| \rightarrow 0$ pour tout $g \in G$
- 3 m_{φ_i} est u.c.p. pour tout i
- 4 $\limsup \|m_{\varphi_i}\|_{cb} < \infty$

Exemple : Groupes hyperboliques, $SO(1, n)$, $SU(1, n)$, $Sp(1, n)$.

La moyennabilité faible permet d'utiliser des techniques de déformation/rigidité (cf. Ozawa-Popa, Popa-Vaes).

Moyennabilité faible (M. Cowling, U. Haagerup)

Définition

Un groupe discret G est *faiblement moyennable* s'il existe une suite de fonctions $\varphi_i : G \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

- 1 φ_i est à support fini pour tout i
- 2 $|\varphi_i(g) - 1| \rightarrow 0$ pour tout $g \in G$
- 3 m_{φ_i} est u.c.p. pour tout i
- 4 $\limsup \|m_{\varphi_i}\|_{cb} < \infty$

Exemple : Groupes hyperboliques, $SO(1, n)$, $SU(1, n)$, $Sp(1, n)$.

La moyennabilité faible permet d'utiliser des techniques de déformation/rigidité (cf. Ozawa-Popa, Popa-Vaes).

Moyennabilité faible (M. Cowling, U. Haagerup)

Définition

Un groupe discret G est *faiblement moyennable* s'il existe une suite de fonctions $\varphi_i : G \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

- 1 φ_i est à support fini pour tout i
- 2 $|\varphi_i(g) - 1| \rightarrow 0$ pour tout $g \in G$
- 3 m_{φ_i} est u.c.p. pour tout i
- 4 $\limsup \|m_{\varphi_i}\|_{cb} < \infty$

Exemple : Groupes hyperboliques, $SO(1, n)$, $SU(1, n)$, $Sp(1, n)$.

La moyennabilité faible permet d'utiliser des techniques de déformation/rigidité (cf. Ozawa-Popa, Popa-Vaes).

Moyennabilité faible (M. Cowling, U. Haagerup)

Définition

Un groupe discret G est *faiblement moyennable* s'il existe une suite de fonctions $\varphi_i : G \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

- 1 φ_i est à support fini pour tout i
- 2 $|\varphi_i(g) - 1| \rightarrow 0$ pour tout $g \in G$
- 3 m_{φ_i} est u.c.p. pour tout i
- 4 $\limsup \|m_{\varphi_i}\|_{cb} < \infty$

Exemple : Groupes hyperboliques, $SO(1, n)$, $SU(1, n)$, $Sp(1, n)$.

La moyennabilité faible permet d'utiliser des techniques de déformation/rigidité (cf. Ozawa-Popa, Popa-Vaes).

Moyennabilité faible (M. Cowling, U. Haagerup)

Définition

Un groupe discret G est *faiblement moyennable* s'il existe une suite de fonctions $\varphi_i : G \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

- 1 φ_i est à support fini pour tout i
- 2 $|\varphi_i(g) - 1| \rightarrow 0$ pour tout $g \in G$
- 3 m_{φ_i} est u.c.p. pour tout i
- 4 $\limsup \|m_{\varphi_i}\|_{cb} < \infty$

Exemple : Groupes hyperboliques, $SO(1, n)$, $SU(1, n)$, $Sp(1, n)$.

La moyennabilité faible permet d'utiliser des techniques de déformation/rigidité (cf. Ozawa-Popa, Popa-Vaes).

Cas quantique

Définition

Le *multiplicateur* associé à un élément $a \in \ell^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$ est l'opérateur sur $C(\mathbb{G})$ défini par $(id \otimes m_a)(u^\alpha) = (ap_\alpha \otimes 1)u^\alpha$.

Proposition (M. Daws)

$\|m_a\|_{cb} < \infty \iff$ il existe H Hilbert et $\xi, \eta : \ell^2(\mathbb{G}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{G}) \otimes H$ tels que $(1 \otimes \eta^*)(u_{12}^\alpha)^*(1 \otimes \xi)u^\alpha = ap_\alpha \otimes 1$ pour tout $\alpha \in Irr(\mathbb{G})$.

Cas quantique

Définition

Le *multiplicateur* associé à un élément $a \in \ell^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$ est l'opérateur sur $C(\mathbb{G})$ défini par $(id \otimes m_a)(u^\alpha) = (ap_\alpha \otimes 1)u^\alpha$.

Proposition (M. Daws)

$\|m_a\|_{cb} < \infty \iff$ il existe H Hilbert et $\xi, \eta : \ell^2(\mathbb{G}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{G}) \otimes H$ tels que $(1 \otimes \eta^*)(u_{12}^\alpha)^*(1 \otimes \xi)u^\alpha = ap_\alpha \otimes 1$ pour tout $\alpha \in Irr(\mathbb{G})$.

Moyennabilité faible et produits libres

Théorème (E. Ricard, Q. Xu)

*Soient G, H des groupes faiblement moyennables avec $\limsup \|m_{\varphi_i}\|_{cb} = 1$, alors $G * H$ vérifie la même propriété.*

Théorème (A. F.)

Le théorème précédent est également vrai avec des groupes quantiques discrets.

Stratégie : on approche les multiplicateurs de Herz-Schur par des *multiplicateurs de Schur* u.c.p. pour pouvoir définir des applications sur le produit libre.

Moyennabilité faible et produits libres

Théorème (E. Ricard, Q. Xu)

*Soient G, H des groupes faiblement moyennables avec $\limsup \|m_{\varphi_i}\|_{cb} = 1$, alors $G * H$ vérifie la même propriété.*

Théorème (A. F.)

Le théorème précédent est également vrai avec des groupes quantiques discrets.

Stratégie : on approche les multiplicateurs de Herz-Schur par des *multiplicateurs de Schur* u.c.p. pour pouvoir définir des applications sur le produit libre.

Moyennabilité faible et produits libres

Théorème (E. Ricard, Q. Xu)

*Soient G, H des groupes faiblement moyennables avec $\limsup \|m_{\varphi_i}\|_{cb} = 1$, alors $G * H$ vérifie la même propriété.*

Théorème (A. F.)

Le théorème précédent est également vrai avec des groupes quantiques discrets.

Stratégie : on approche les multiplicateurs de Herz-Schur par des *multiplicateurs de Schur* u.c.p. pour pouvoir définir des applications sur le produit libre.

$L\widehat{O}_N^+ \simeq LF_N$? (T. Banica, M. Brannan, P. Fima, S. Vaes, R. Vergnioux, C. Voigt)

Comparons les propriétés connues pour les deux familles d'algèbres d'opérateurs.

- Facteurs pleins, premiers, solides, avec la propriété d'Akemann-Ostrand, non-moyennables, sans la propriété (T) de Kazhdan et avec la propriété de Haagerup.
- C^* -algèbres réduites simples, exactes, sans projection.
- K -moyennables, satisfaisant la propriété de décroissance rapide et la conjecture de Baum-Connes.
- $K_0(C_r^*(\widehat{O}_N^+)) = \mathbb{Z} = K_0(C_r^*(\mathbb{F}_N))$
 $K_1(C_r^*(\widehat{O}_N^+)) = \mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}^N = K_1(C_r^*(\mathbb{F}_N)).$
- $\beta_1^{(2)}(\widehat{O}_N^+) = 0 \neq N - 1 = \beta_1^{(2)}(\mathbb{F}_N).$

$L\widehat{O}_N^+ \simeq LF_N$? (T. Banica, M. Brannan, P. Fima, S. Vaes, R. Vergnioux, C. Voigt)

Comparons les propriétés connues pour les deux familles d'algèbres d'opérateurs.

- Facteurs pleins, premiers, solides, avec la propriété d'Akemann-Ostrand, non-moyennables, sans la propriété (T) de Kazhdan et avec la propriété de Haagerup.
- C^* -algèbres réduites simples, exactes, sans projection.
- K -moyennables, satisfaisant la propriété de décroissance rapide et la conjecture de Baum-Connes.
- $K_0(C_r^*(\widehat{O}_N^+)) = \mathbb{Z} = K_0(C_r^*(\mathbb{F}_N))$
 $K_1(C_r^*(\widehat{O}_N^+)) = \mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}^N = K_1(C_r^*(\mathbb{F}_N))$.
- $\beta_1^{(2)}(\widehat{O}_N^+) = 0 \neq N-1 = \beta_1^{(2)}(\mathbb{F}_N)$.

$L\widehat{O}_N^+ \simeq LF_N$? (T. Banica, M. Brannan, P. Fima, S. Vaes, R. Vergnioux, C. Voigt)

Comparons les propriétés connues pour les deux familles d'algèbres d'opérateurs.

- Facteurs pleins, premiers, solides, avec la propriété d'Akemann-Ostrand, non-moyennables, sans la propriété (T) de Kazhdan et avec la propriété de Haagerup.
- C^* -algèbres réduites simples, exactes, sans projection.
- K -moyennables, satisfaisant la propriété de décroissance rapide et la conjecture de Baum-Connes.
- $K_0(C_r^*(\widehat{O}_N^+)) = \mathbb{Z} = K_0(C_r^*(\mathbb{F}_N))$
 $K_1(C_r^*(\widehat{O}_N^+)) = \mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}^N = K_1(C_r^*(\mathbb{F}_N))$.
- $\beta_1^{(2)}(\widehat{O}_N^+) = 0 \neq N-1 = \beta_1^{(2)}(\mathbb{F}_N)$.

$L\widehat{O}_N^+ \simeq LF_N$? (T. Banica, M. Brannan, P. Fima, S. Vaes, R. Vergnioux, C. Voigt)

Comparons les propriétés connues pour les deux familles d'algèbres d'opérateurs.

- Facteurs pleins, premiers, solides, avec la propriété d'Akemann-Ostrand, non-moyennables, sans la propriété (T) de Kazhdan et avec la propriété de Haagerup.
- C*-algèbres réduites simples, exactes, sans projection.
- K-moyennables, satisfaisant la propriété de décroissance rapide et la conjecture de Baum-Connes.
- $K_0(C_r^*(\widehat{O}_N^+)) = \mathbb{Z} = K_0(C_r^*(\mathbb{F}_N))$
 $K_1(C_r^*(\widehat{O}_N^+)) = \mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}^N = K_1(C_r^*(\mathbb{F}_N)).$
- $\beta_1^{(2)}(\widehat{O}_N^+) = 0 \neq N - 1 = \beta_1^{(2)}(\mathbb{F}_N).$

$L\widehat{O}_N^+ \simeq LF_N$? (T. Banica, M. Brannan, P. Fima, S. Vaes, R. Vergnioux, C. Voigt)

Comparons les propriétés connues pour les deux familles d'algèbres d'opérateurs.

- Facteurs pleins, premiers, solides, avec la propriété d'Akemann-Ostrand, non-moyennables, sans la propriété (T) de Kazhdan et avec la propriété de Haagerup.
- C^* -algèbres réduites simples, exactes, sans projection.
- K -moyennables, satisfaisant la propriété de décroissance rapide et la conjecture de Baum-Connes.
- $K_0(C_r^*(\widehat{O}_N^+)) = \mathbb{Z} = K_0(C_r^*(\mathbb{F}_N))$
 $K_1(C_r^*(\widehat{O}_N^+)) = \mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}^N = K_1(C_r^*(\mathbb{F}_N)).$
- $\beta_1^{(2)}(\widehat{O}_N^+) = 0 \neq N - 1 = \beta_1^{(2)}(\mathbb{F}_N).$

$L\widehat{O}_N^+ \simeq LF_N$? (T. Banica, M. Brannan, P. Fima, S. Vaes, R. Vergnioux, C. Voigt)

Comparons les propriétés connues pour les deux familles d'algèbres d'opérateurs.

- Facteurs pleins, premiers, solides, avec la propriété d'Akemann-Ostrand, non-moyennables, sans la propriété (T) de Kazhdan et avec la propriété de Haagerup.
- C^* -algèbres réduites simples, exactes, sans projection.
- K -moyennables, satisfaisant la propriété de décroissance rapide et la conjecture de Baum-Connes.
- $K_0(C_r^*(\widehat{O}_N^+)) = \mathbb{Z} = K_0(C_r^*(\mathbb{F}_N))$
 $K_1(C_r^*(\widehat{O}_N^+)) = \mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}^N = K_1(C_r^*(\mathbb{F}_N)).$
- $\beta_1^{(2)}(\widehat{O}_N^+) = 0 \neq N - 1 = \beta_1^{(2)}(\mathbb{F}_N).$