

Introduction à la théorie des courants. Examen.

Les questions avec (*) sont plus difficiles. Les exercices ne sont pas complètement indépendants.

- Exercice 1.**
1. Soit $\psi : [-\infty, \infty[\rightarrow [-\infty, \infty[$ une fonction non constante. Rappeler une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $\psi(\log r)$ soit sousharmonique sur $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ où $r = |z|$.
 2. Montrer que si $\varphi(z) = \psi(\log r)$ est sousharmonique non constante alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $\varphi - \epsilon \log^+ |z|$ n'est pas bornée supérieurement.
 3. Soit φ une fonction psh non constante sur \mathbb{C}^N . Posons $\psi(z) = \sup_x \varphi(x)$ avec $\|x\| = \|z\|$. Montrer que ψ est psh non constante.
 4. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\varphi - \epsilon \log^+ \|z\|$ n'est pas bornée supérieurement.

- Exercice 2.**
1. Soit T un 0-courant fermé sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^N$. Montrer que T est défini par une fonction constante. Indication : utiliser une régularisation.
 2. Trouver un courant F dans \mathbb{R}^N défini par une demi-droite tel que $dF = \delta_0$.
 3. Rappeler la définition de convolution de deux courants.
 4. Soit T un p -courant fermé à support compact dans \mathbb{R}^N . Montrer que $d(F * T) = T$.
 5. Soit T le 2-courant d'intégration sur un disque de \mathbb{R}^2 . Déterminer dT . Soit S un 2-courant d'intégration sur une couronne dans \mathbb{R}^2 . Déterminer dS .
 6. Soit $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\}$ où a, b sont deux points distincts de \mathbb{R}^2 . Définissons

$$H_c^1(X) := \frac{\{T : \text{1-courant fermé à support compact dans } X\}}{\{dS, S : \text{0-courant à support compact dans } X\}}.$$

Soient C_a et C_b deux petits cercles de centre a et b , respectivement, orientés dans le sens positif. Montrer que la classe du courant $[C_a]$ (resp. $[C_b]$) dans $H_c^1(X)$ ne dépend pas du choix de C_a (resp. C_b). Indication : utiliser 5.

7. Soit T un 1-courant fermé à support compact dans X . Posons $S = F * T$. Soit D_a un petit disque de centre a , D_b un petit disque de centre b et D un grand disque de centre 0. Montrer qu'il existe des constantes $\lambda, \lambda_a, \lambda_b$ telles que $S = \lambda_a$ sur D_a , $S = \lambda_b$ sur D_b et $S = \lambda$ hors de \overline{D} .
8. Posons $S' = S - \lambda[\mathbb{R}^2 \setminus D] - \lambda_a[D_a] - \lambda_b[D_b]$. Déterminer $dd^c S'$.
9. Montrer qu'il existe des constantes $\lambda, \lambda_a, \lambda_b$ telles que T soit cohomologue à $\lambda[C] + \lambda_a[C_a] + \lambda_b[C_b]$.
10. Montrer que les classes de $[C], [C_a], [C_b]$ sont dépendantes.
11. En déduire la dimension de $H_c^1(X)$.
12. (*) Déterminer $\dim H_c^{N-1}(X)$ lorsque $X = \mathbb{R}^N \setminus \{a, b\}$, $N \geq 3$.

Exercice 3. Soit T un $(1, 1)$ -courant dans $X \subset \mathbb{C}^2$. Soient K un compact de X et χ une fonction lisse à support compact dans X égale à 1 au voisinage de K .

1. Supposons que T est à support compact. Calculer $\langle dd^c T, 1 \rangle$. Montrer que si $dd^c T \leq 0$ ou si $dd^c T \geq 0$, on a $dd^c T = 0$.
2. Supposons que T est positif à support compact et $dd^c T = 0$. Calculer $\langle T, dd^c \|z\|^2 \rangle$. Montrer que $T = 0$.
3. Supposons que T est positif et $dd^c T \leq 0$. Montrer que $\|T\|_K \leq c_K \|T\|_{X \setminus K}$ où $c_K > 0$ est indépendante de T . On peut calculer $\langle T, dd^c(\chi \|z\|^2) \rangle$.
4. (*) Supposons que T est positif et $dd^c T \geq 0$. Montrer que $\|T\|_K \leq c_K \|T\|_{X \setminus K}$ où $c_K > 0$ est indépendante de T .

Exercice 4. Soit T un $(1, 1)$ -courant positif fermé sur \mathbb{C}^3 . Supposons $\text{supp}(T) \subset \{|z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$. On veut montrer en particulier que $T = 0$. Pour les questions 1., 2., on suppose que T est **lisse**.

1. Montrer que la restriction de T à tout hyperplan d'équation $z_3 = az_1 + bz_2 + c$ est nulle.
2. Montrer que $T = 0$.
3. Montrer que $T = 0$ dans le cas général.
4. Généraliser ceci aux courants positifs T avec $dd^c T$ positif ou négatif.
5. Déterminer les fonctions psh sur \mathbb{C}^3 à support dans $\{|z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$.

Exercice 5. (Théorème du support de Federer)

Soient H l'hyperplan $\{x_1 = 0\}$ de \mathbb{R}^N et $i : H \rightarrow \mathbb{R}^N$ l'inclusion canonique. Soit T un p -courant d'ordre 0 sur \mathbb{R}^N à support dans H .

1. Trouver un exemple d'un courant T tel que $T \neq i_*(S)$ pour tout courant S sur H (ici on considère H comme une variété indépendante de \mathbb{R}^N).

Supposons que dT est d'ordre 0. On veut montrer que, si $p \geq 1$, il existe un courant S sur H tel que $T = i_*(S)$.

2. Montrer l'existence du courant S dans le cas où $p = N$.
3. Supposons que $p < N$. Montrer que $x_1 T = 0$ et $x_1 dT = 0$.
4. En développant $d(x_1 T)$ montrer que $dx_1 \wedge T = 0$.
5. Si $p = 0$, montrer que $T = 0$.
6. Supposons que $p \geq 1$. En écrivant T comme forme à "coefficients mesures", montrer qu'il existe un courant R tel que $T = dx_1 \wedge R$.
7. Montrer l'existence du courant S .
8. Généraliser le résultat pour une sous-variété H de dimension quelconque.
9. (*) Soit T un (p, p) -courant d'ordre 0 sur \mathbb{C}^N . Supposons que $dd^c T$ est d'ordre 0 et que $\text{supp}(T)$ est contenu dans une sous-variété complexe H de dimension m . Montrer que $T = 0$ si $m < N - p$. Si $m \geq N - p$, montrer qu'il existe un courant S sur H tel que $T = i_*(S)$ où $i : H \rightarrow \mathbb{C}^N$ est l'inclusion canonique.

Exercice 6. Soit D un domaine strictement convexe, non nécessairement borné de \mathbb{C}^2 . Soit T un $(1, 1)$ -courant positif fermé à support dans le bord de D . On veut montrer que $T = 0$. Supposons que $T \neq 0$.

1. Montrer qu'on peut trouver un système de coordonnées tel que $0 \in \text{supp}(T)$ et $D \subset \{\text{Re}z_1 < 0\}$.
2. Soit $\pi(z) = z_1$. Montrer que $\pi_*(T)$ est bien défini et est un $(0, 0)$ -courant positif fermé.
3. Montrer que $\pi_*(T) = 0$. En déduire $T \wedge dd^c|z_1|^2 = 0$.
4. Montrer que $\pi_*^\epsilon(T) = 0$ où $\pi^\epsilon(z) = z_1 + \epsilon z_2$, ϵ petit.
5. Conclure.
6. Montrer que tout $(1, 1)$ -courant positif fermé à support dans \overline{D} est nul.

Exercice 7. On considère sur \mathbb{C}^2 les coordonnées (z, w) , $w = u + it$. On se propose de décrire les $(1, 1)$ -courants positifs fermés à support dans $H = \{u = 0\}$. On définit $\sigma : H \rightarrow \mathbb{R}$ par $\sigma(z, w) = t$. Soit $i : H \rightarrow \mathbb{C}^2$ l'inclusion canonique.

1. Soit μ une mesure positive localement finie sur \mathbb{R} . Posons $S = \int[\sigma^{-1}(t)]d\mu(t)$. Montrer que $T = i_*(S)$ est un $(1, 1)$ -courant positif fermé.
2. On veut montrer la réciproque. Soit T un $(1, 1)$ -courant positif fermé à support dans H . Montrer qu'il existe un courant S sur H tel que $i_*(S) = T$. Quel est le degré de S ?
3. (*) Vérifier que $S = \sigma^*(\mu)$ où μ est une mesure positive localement finie sur \mathbb{R} .
4. Trouver tous les $(1, 1)$ -courants positifs fermés T à support dans H qui sont extrémaux, c.-à-d. que si T' est positif fermé, $T' \leq T$, alors $T' = cT$ où c est une constante.

Exercice 8. (Théorème d'Oka-Fornæss-Sibony)

Soit D le polydisque de \mathbb{C}^2 défini par

$$D = \{|z_1| < 1, |z_2| < 1\}.$$

Soit H une figure d'Hartogs dans \mathbb{C}^2 définie par

$$H = \{|z_1| < \delta_1, |z_2| < 1\} \cup \{|z_1| < 1, 1 - \delta_2 < |z_2| < 1\} \quad \text{avec } 0 < \delta_1, \delta_2 < 1.$$

Considérons un compact K de D et un $(1, 1)$ -courant positif T sur D vérifiant $dd^c T \leq 0$.

1. Montrer que la fonction $|z_1|^{-2} + |z_1 + \epsilon z_2|^{-2} - 2 - \epsilon'$ avec $0 < \epsilon \ll \epsilon' \ll 1$, est strictement psh au voisinage de $D \setminus H$, strictement positive au voisinage de $K \setminus H$ et strictement négative sur $\{|z_1| = 1\} \cap \overline{D}$.
2. (*) Montrer qu'il existe une fonction $\chi \geq 0$, lisse, à support compact dans D , psh au voisinage de $D \setminus H$, et strictement psh au voisinage de $K \setminus H$. Indication : utiliser 1. pour construire d'abord une fonction continue.
3. Montrer que $\|T\|_{K \setminus H} \leq c_K \|T\|_H$ où $c_K > 0$ est indépendante de T . Indication : utiliser $dd^c \chi \wedge T$.
4. Montrer que $\|T\|_K \leq c'_K \|T\|_H$ où $c'_K > 0$ est indépendante de T .
5. Montrer que toute sous-variété de dimension 1 de D rencontre H .
6. (*) Soit φ une fonction psh sur D localement bornée sur H . Soit S un $(1, 1)$ -courant positif fermé sur D . Montrer que $dd^c \varphi \wedge S$ est bien défini sur D et est une mesure positive.
7. (*) Généraliser les résultats aux courants de bidegré quelconque sur un polydisque de \mathbb{C}^N .