

## Licence, Deuxième année, LM256

## Devoir 2

esquisse de corrigé

EXERCICE 1– a) avec le changement de variables  $x = r \cdot \cos \theta$ ,  $y = \frac{r}{2} \cdot \sin \theta$ , le domaine  $D$  est transformé en  $[0, 1] \times [0, 2\pi]$  et l'on obtient

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 r^3 dr \left( \int_0^{2\pi} \left( \cos(\theta)^2 - \frac{1}{4} \sin(\theta)^2 \right) d\theta \right) .$$

Comme  $\cos(\theta)^2 - \frac{1}{4} \sin(\theta)^2 = 3/8(1 + \cos(2\theta))$ , on a  $I = \frac{3\pi}{8} \int_0^1 r^3 dr = \frac{3\pi}{32}$ .

b) On pose  $\omega = \frac{1}{3}(x^3 dy + y^3 dx)$ . Par la formule de Green-Riemann,  $\int_{\partial D} \omega = \iint_D d\omega$ . Mais,  $d\omega = (x^2 - y^2)dx \wedge dy$ . Donc,  $I = \int_{\partial D} \omega$ . Par ailleurs, le bord de  $D$  se paramètre par  $\theta \mapsto (\cos \theta, \frac{\sin \theta}{2})$ , où  $\theta$  parcourt  $[0, 2\pi]$ . Donc,

$$I = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} \cos^3(\theta) \cdot \cos \theta + \frac{\sin^3 \theta}{8} \cdot (-\sin(\theta)) \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left( \frac{\cos^4 \theta}{6} - \frac{\sin^4 \theta}{24} \right) d\theta .$$

L'intégrale voulue vaut donc  $36I$ , soit  $27\pi/8$ .

EXERCICE 2– On utilise le théorème de Fubini, et  $I$  s'écrit

$$I = \int_0^1 x dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 \frac{y dy}{1+x^2+y^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 x dx \left[ \log(1+x^2+y^2) \right]_{\sqrt{1-x^2}}^1 = \frac{1}{2} \int_0^1 x \log \left( 1 + \frac{x^2}{2} \right) dx .$$

Un changement de variables  $u = x^2/2$  donne ensuite:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \log(1+u) = \left( \frac{3}{4} \log(3/2) - \frac{1}{4} \right) .$$

EXERCICE 3– Tout d'abord, on pose  $D = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0\}$ . Par le théorème de Fubini, l'intégrale successive demandée est

$$\iiint_D \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} .$$

On passe en coordonnées sphériques (par l'application<sup>1</sup>  $(r, \theta, \varphi) \mapsto (x, y, z)$ ) avec  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi \cos \theta$ ,  $z = r \sin \varphi \sin \theta$ . La valeur absolue du déterminant de la jacobienne de la transformation est  $r^2 |\sin \varphi|$ . Par la formule de changement de variables, le domaine d'intégration transformé est :  $[0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi/2]$ . Sur l'intervalle  $[0, \pi/2]$ ,  $\sin(\varphi)$  est  $\geq 0$  et l'on peut enlever la valeur absolue. On obtient donc:

$$I = \int_0^1 dr \left( \int_0^{2\pi} d\theta \left( \int_0^{\pi/2} \frac{r^2 \sin \varphi d\varphi}{r} \right) \right) = \int_0^1 r dr \left( \int_0^{2\pi} d\theta [-\cos \varphi]_0^{\pi/2} \right) = 2\pi \int_0^1 r dr = \pi .$$

EXERCICE 4– 1) il suffit de considérer l'application  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $\gamma(\theta) = \left( \frac{\cos \theta}{3}, \frac{\sin \theta}{2} \right)$ .

2)a) On effectue le changement de variables  $x = \frac{r \cos \theta}{3}$ ,  $y = \frac{r \sin \theta}{2}$ . L'intégrale  $I$  à calculer vaut donc

$$I = \frac{1}{6} \iint_{[0,1] \times [0,2\pi]} f'(r^2) r dr d\theta = \frac{\pi}{3} \int_0^1 r f'(r^2) dr = \frac{\pi}{6} (f(1) - f(0)) .$$

2)b) Pour l'aire, on pose  $f(x) = x$ , d'où  $f'(x) = 1$ , et on obtient  $A(K) = \frac{\pi}{6}$ . Pour la deuxième intégrale, on pose  $f(x) = x^3/3$ . D'où

$$\iint_K (9x^2 + 4y^2)^2 dx dy = \frac{\pi}{18} .$$

<sup>1</sup>On notera que la normalisation diffère légèrement de celle donnée dans le cours; cela ne change toutefois nullement la valeur absolue du déterminant de la jacobienne.