LM256 **Examen - Septembre 2006**
(2h, documents et calculatrices interdits)

Question. a) Rappeler les formules de Stokes-Ampère et d'Ostrogradsky en précisant les notations utilisées.

b) Donner une formule qui permet de calculer le volume d'un domaine D dans $\mathbf{R}^3$ en utilisant une intégrale sur son bord.

c) Calculer le volume de la boule B de centre 0 et de rayon r de $\mathbf{R}^3$.

Exercice I. Soit N l'intégrale double définie par

$$N = \iint_D \frac{1}{1+e^{-x^2-y^2}} dxdy$$

où D désigne l'ensemble

$$D = \big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad x^2 + y^2 < 16, \quad x > 0, \quad y > 0\big\}.$$

1. Dessiner l'ensemble D.

2. A l'aide d'un changement de variables, montrer que

$$N = \frac{\pi}{2} \int_0^4 \frac{x}{1+e^{-x^2}} dx.$$

3. En remarquant que

$$\frac{x}{1+e^{-x^2}} = \frac{xe^{x^2}}{1+e^{x^2}}$$

calculer N.

Exercice II. Soient D le domaine de $\mathbf{R}^2$ défini par

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ (x-2)^2 + \frac{y^2}{4} < 1\right\}$$

et C le bord de D orientée dans le sens direct. Soit I l'intégrale

$$I = \int_C (y^2 + x - y)dx - 3x^2 dy.$$

1. Calculer I en utilisant **une paramétrisation** de C.

2. Calculer I en utilisant **la formule de Green-Riemann**.

Exercice III. Soit ω la 1-forme définie sur $\mathbf{R}^3$ par

$$\omega = (yz - e^{-x-y})dx + (xz - e^{-x-y})dy + (xy - \sin z + 4z^3)dz.$$

Soit $\overrightarrow{V}$ le champ de vecteurs dans $\mathbf{R}^3$ de composantes

$$yz - e^{-x-y}, \quad xz - e^{-x-y}, \quad xy - \sin z + 4z^3.$$

1. Calculer $d\omega$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{V}$, $\mathrm{div}\overrightarrow{V}$.

2. Existe-t-il une fonction f sur $\mathbf{R}^3$ telle que $df = \omega$? Si oui déterminer toutes les fonctions f vérifiant cette propriété. Calculer $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f$.

3. Soit γ la courbe paramétrée par

$$x = \cos(2\pi t) + 2t, \qquad y = t - t^2 - t^3, \quad z = \sin 2t - \sin 2t^2, \qquad t \in [0,1].$$

Est-t-elle fermée ?

4. Calculer la circulation de $\overrightarrow{V}$ le long de la courbe γ.

5. Calculer la circulation de $\overrightarrow{V}$ le long d'une courbe C joignant 2 points $(0,0,0)$ et $(2,2,\pi)$.

Exercice IV. 1. Calculer l'intégrale triple

$$\iiint_D e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}\,dxdydz$$

où a, b, c sont strictement positifs et D est défini par

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 < 0\right\}.$$

2. Calculer l'intégrale de surface

$$\iint_S (x^2 z - 2xyz)\,d\sigma$$

où S est la demi-sphère unité supérieure.