LM256 **Examen - Janvier 2006**

2h, documents et calculatrices interdits

solution disponible sur http://www.math.jussieu.fr/∼dinh

Question. a) Rappeler la formule de Green-Riemann en précisant les notations utilisées. On ne demande pas de la démontrer.

b) Donner une formule qui permet de calculer l'aire d'un domaine D dans $\mathbf{R}^2$ en utilisant une intégrale sur son bord. On ne demande pas de la démontrer.

c) L'appliquer pour calculer l'aire du disque D de centre 0 et de rayon r.

Exercice I. Soit A l'intégrale double définie par

$$A = \iint_{D_1} (x^2 + y^2)dxdy$$

où $D_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 2\}$.

1. Calculer A.

Soit B l'intégrale double définie par

$$B = \iint_{D_2} (x^2 - xy + y^2)dxdy$$

où $D_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2 - xy + y^2 \leq 4\}$. Considérons le changement de variables

$$x = \sqrt{2}\, u - \sqrt{\frac{2}{3}}\, v, \qquad y = \sqrt{2}\, u + \sqrt{\frac{2}{3}}\, v.$$

2. Déterminer le jacobien $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$.

3. Exprimer B en fonction de A.

4. Déduire la valeur de B.

Exercice II. Soient D le domaine de $\mathbf{R}^2$ défini par

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \leq 1\}$$

et C le bord de D orientée dans le sens direct. Soit I l'intégrale

$$I = \int_C (y + y^2)dx + 2x^2dy.$$

1. Calculer I en utilisant une **paramétrisation** de C.

2. Calculer I en utilisant la formule de **Green-Riemann**. **T.S.V.P.**

Exercice III. Soit ω la 1-forme définie sur $\mathbf{R}^3$ par

$$\omega = (y^2 \cos x + z^3)dx + (2y \sin x - 4)dy + (3xz^2 + 2)dz.$$

Soit $\overrightarrow{V}$ le champ de vecteurs dans $\mathbf{R}^3$ de composantes

$$y^2 \cos x + z^3, \quad 2y \sin x - 4, \quad 3xz^2 + 2.$$

1. Calculer $d\omega$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{V}$, $\mathrm{div}\overrightarrow{V}$.

2. Exist-t-il une fonction f sur $\mathbf{R}^3$ telle que $df = \omega$? Si oui déterminer une telle f. Calculer $\overrightarrow{\mathrm{grad}}f$.

3. Soit γ la courbe paramétrée par

$$x = \cos(2\pi t), \qquad y = t^3 - t, \quad z = e^{2t} - e^{2t^2}, \qquad t \in [0, 1].$$

Est-t-elle fermée ?

4. Calculer la circulation de $\overrightarrow{V}$ le long de la courbe γ.

5. Déterminer la circulation de $\overrightarrow{V}$ le long les courbes C joignant les points $(0, 0, 0)$ et $(\pi, 1, 2)$.

Exercice IV. 1. Calculer l'intégrale triple

$$\iiint_D (x + y)e^{-(x^2+y^2+z^2)^2} dxdydz$$

où D est enfermé entre les sphères d'équations $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ dans **le premier octant** (la où les trois coordonnées sont positives).

2. Calculer l'intégrale de surface

$$\iint_S x^2 z d\sigma$$

où S est la demi-sphère unité supérieure.