LM256 **Examen - Janvier 2006**

Exercice I.

1. Utilisant les coordonnées polaires $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, puis le théorème de Fubini, on obtient

$$A = \int_0^{\sqrt{2}} dr \int_0^{2\pi} r^3 d\theta = 2\pi.$$

2. On a

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

3. La formule de changement de variables donne

$$B = \iint_{D_1} (2u^2 + 2v^2)\frac{4}{\sqrt{3}} du dv = \frac{8}{\sqrt{3}} A.$$

4. On en déduit

$$B = \frac{16\pi}{\sqrt{3}}.$$

Exercice II.

1. On utilise la paramétrisation

$$x = 2\cos\theta, \quad y = 4\sin\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi[.$$

On obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} (4\sin\theta + 16\sin^2\theta) d(2\cos\theta) + 8\cos^2\theta d(4\sin\theta) \\ &= \int_0^{2\pi} (-8\sin^2\theta - 32\sin^3\theta + 32\cos^3\theta) d\theta = -8\pi. \end{aligned}$$

2. La formule de Green-Riemann nous donne

$$I = \iint_D (-1 - 2y + 4x) dx dy$$

où D est le domaine limité par C. Utilisant le changement de variables

$$x = 2r\cos\theta, \quad y = 4r\sin\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

et le théorème de Fubini, on obtient

$$I = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} (-1 - 8r\sin\theta + 8r\cos\theta) 8r d\theta = -8\pi.$$

Exercice III.

1. On a $d\omega = 0$, donc $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{V} = 0$. On a $\mathrm{div}\overrightarrow{V} = -y^2 \sin x + 2\sin x + 6xz$.

2. Oui. On a

$$f = y^2 \sin x + xz^3 - 4y + 2z + \text{constante}.$$

On a $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \overrightarrow{V}$.

3. Oui. Quand $t = 0$ et $t = 1$ on obtient le même point.

4. La circulation est égale à 0 car $\overrightarrow{V}$ est un champ de gradients et γ est fermée.

5. Elle est égale à $f(\pi, 1, 2) - f(0, 0, 0) = 8\pi$.

Exercice IV. 1. On utilise les coordonnées sphériques

$$x = r \sin\varphi \cos\theta, \quad y = r \sin\varphi \sin\theta, \quad z = r\cos\theta.$$

Si R l'ensemble des points (r, θ, φ) vérifiant

$$1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2$$

on a

$$\begin{aligned} D &= \iiint_R r^3 \sin^2\varphi(\cos\theta + \sin\theta)e^{-r^4} dr d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^2 \sin^2\varphi(\cos\theta + \sin\theta) r^3 e^{-r^4} dr \\ &= (e^{-1} - e^{-16})\pi/8 \end{aligned}$$

2. Si Δ est le disque unité, la demi-sphère unité est le graphe de la fonction $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ au-dessus de Δ. On a

$$\iint_S x^2 z d\sigma = \iint_\Delta x^2 \sqrt{1 - x^2 - y^2} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \iint_\Delta x^2 dx dy = \pi/4.$$

La dernière intégrale se calcule en utilisant les coordonnées polaires.