RESEAUX DES GROUPES DE LIE DANS LE GROUPE DE CREMONA

<u>But</u> : expliquer le théorème suivant

<u>Théorème (D.)</u> $\Gamma \subset SL_3(\mathbb{Z})$ d'indice fini ; $\rho : \Gamma \hookrightarrow Bir(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$.
Alors, à conjugaison birationnelle près, $\rho =$ plongement canonique ou contragrédiente ($u \mapsto {}^t u^{-1}$)

<u>Corollaire</u> $\Gamma \subset SL_n(\mathbb{Z})$ d'indice fini ; dès que $n \geq 4$, $\Gamma \not\hookrightarrow Bir(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$.

En appliquant le théorème à $\Gamma = SL_3(\mathbb{Z})$ on retrouve le résultat suivant déjà obtenu en étudiant les sous-groupes abéliens maximaux non dénombrables du groupe de CREMONA :

<u>Théorème (D.)</u> $Out(Bir(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})))$ s'identifie au groupe des automorphismes du corps $\mathbb{C}$ que nous noterons $Aut(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Suite à une question d'E. GHYS on a décrit à partir du théorème (toujours appliqué à $\Gamma = SL_3(\mathbb{Z})$) le semi-groupe des endomorphismes de $Bir(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$:

Théorème (D.) Soit φ un endomorphisme de $Bir(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. Alors il existe un plongement de corps τ de $\mathbb{C}$ dans lui-même tels que

$$\varphi(f) = \tau(\psi f \psi^{-1}).$$

En particulier le groupe de CREMONA est hopfien : tout endomorphisme surjectif de $Bir(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ est bijectif.

<u>Plan</u>
* $SL_3(\mathbb{Z})$
* Groupes de HEISENBERG
* Dynamique de l'image d'un groupe de congruence
* Fibration invariante
* Factorisation dans un groupe d'automorphismes.

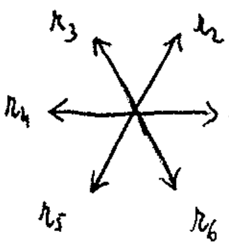
• $SL_3(\mathbb{Z})$

Notons δ_{ij} la matrice de KRONECKER et $e_{ij} = \delta_{ij} + id$.

Proposition $SL_3(\mathbb{Z})$ a pour présentation

$$\langle e_{ij},\ i\neq j \mid [e_{il}, e_{kj}] = \begin{cases} id & \text{si } i\neq j,\ l\neq k \\ e_{ij} & \text{si } l=k,\ i\neq j \\ e_{lk}^{-1} & \text{si } i=j,\ l\neq k \end{cases},\ (e_{12}e_{21}^{-1}e_{12})^4 = id \rangle$$

Système de racines



- On ne dit rien sur $r_i + r_{i+3}$
- $r_1 + r_3 = r_2 \iff [e_{12}, e_{23}] = e_{13}$
- $r_1 + r_2 \notin \{r_i,\ i = 1, \dots, 6\} \iff [r_1, r_2] = id$.

Pour tout entier q introduisons le morphisme

$$\Theta_q : SL_3(\mathbb{Z}) \to SL_3(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$$
$$M \mapsto \text{réduite de } M \text{ modulo } q$$

$\Gamma_q := \ker \Theta_q$, $\tilde{\Gamma}_q := \Theta_q^{-1}$(gpe diagonal de $SL_n(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$)

Γ_q = sous-groupe distingué de $SL_3(\mathbb{Z})$ appelé sous-groupe de congruence ; les Γ_q sont engendrés par les e_{ij}^q qui vérifient des relations "similaires" aux e_{ij} (seule la relation $(e_{12}e_{21}^{-1}e_{12})^4 = id$ n'a pas d'analogue). Les e_{ij}^q sont les générateurs standards de Γ_q.

Théorème (BASS, MILNOR, SERRE...)

$\Gamma \subset SL_3(\mathbb{Z})$

Si Γ est d'indice fini, il existe un entier q tel que $\Gamma_q \subset \Gamma \subset \tilde{\Gamma}_q$.

Si Γ est d'indice infini, Γ est fini.

On s'intéressera donc désormais à la restriction de f à Γ_q.

- Groupes de HEISENBERG

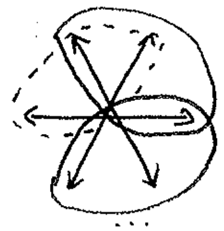
<u>Définition</u> Soit k un entier. Nous appelons <u>k-groupe de HEISENBERG</u> un groupe qui a pour présentation

$$\mathcal{H}_k = \langle f, g, h \mid [f,g] = h^k,\ [f,h] = [g,h] = id \rangle$$

$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$ = groupe de HEISENBERG

f, g, h sont les <u>générateurs standards</u> de $\mathcal{H}_k$.

Dans Γ_q il y a beaucoup de k-groupes de HEISENBERG



- Dynamique de l'image d'un groupe de congruence

<u>Définition</u> G groupe finiment engendré, S partie génératrice symétrique de G, $f \in G$.

- $|f|_S = \inf \{ k \mid \exists\, \sigma_1, \dots, \sigma_k \in G,\ \prod \sigma_i = f \}$;
- f est <u>distordu</u> si $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{|f^n|_S}{n} = 0$.

Lemme La puissance k-ième du générateur standard h de $\mathcal{H}_k$ est distordu.

Les générateurs standards d'un sous-groupe de congruence Γ_q sont distordus.

<u>Démonstration</u> $\left.\begin{array}{l} [f,g] = h^k \\ [f,h] = [g,h] = id \end{array}\right\} \Rightarrow [f^n, g^m] = h^{knm}$

$$\Rightarrow h^{kn^2} = [f^n, g^n] \Rightarrow \frac{|h^{kn^2}|}{n^2} = \frac{|[f^n, g^n]|}{n^2} \leq \frac{4n}{n^2} = \frac{4}{n}.$$

Puisque tout générateur standard d'un Γ_q est le h d'un q-groupe de HEISENBERG on a le résultat annoncé. ∎

Rappel $f \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$, 1^{er} degré dynamique de $f = \lambda(f) = \lim_{n \to +\infty} (\deg f^n)^{\frac{1}{n}}$.

Lemme Soient G un groupe de type fini, $f \in G$ distordu & $\rho : G \hookrightarrow \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$.
Alors $\lambda(\rho(f)) = 1$.

Démonstration. Soit $\{a_1, \dots, a_m\}$ une partie génératrice de G. On a

$$1 \leq \lambda(\rho(f))^n \leq \deg \rho(f)^n \leq \max \deg \rho(a_i)^{|f^n|}$$

$$\Rightarrow 0 \leq n \log \lambda(\rho(f)) \leq |f^n| \log \max \deg \rho(a_i)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \log \lambda(\rho(f)) \leq \underbrace{\frac{|f^n|}{n}}_{\downarrow n \to +\infty \; 0} \log \max \deg \rho(a_i)). \quad \blacksquare$$

Les deux lemmes qui précèdent assurent que $\lambda(\rho(e_{ij})^q) = 1$.

Rappel DILLER-FAVRE

$\lambda(f) > 1$

$\lambda(f) = 1$

$|(f^n)^*| = O(1)$: f^n est à conj bir près un automorphisme isotope à l'identité pour un certain entier n ;
on dira que f est virtuellement isotope à l'identité

$|(f^n)^*| \sim n$ ou n^2 : f préserve une unique fibration rationnelle ou elliptique.

En tenant compte des relations satisfaites par les e_{ij}^q on a donc l'alternative suivante

1) l'un des $\rho(e_{ij}^q)$ préserve une unique fibration elliptique ou rationnelle ;
2) tous les $\rho(e_{ij}^q)$ sont virtuellement isotopes à l'identité.

- Fibration invariante

<u>Lemme</u> Soient Γ un groupe finiment engendré ayant la propriété (T) & $\rho : \Gamma \to PGL_2(\mathbb{C})$ (resp. $PGL_2(\mathbb{C}(y))$). Alors $\mathrm{im}\,\rho$ est finie.

<u>Démonstration</u> Notons γ_i les générateurs de Γ & $\begin{pmatrix} a_i(y) & c_i(y) \\ b_i(y) & d_i(y) \end{pmatrix}$ leur image par ρ. Un $\mathbb{Q}$-groupe de type fini est isomorphe à un sous corps de $\mathbb{C}$ donc $\mathbb{Q}(a_i(y), b_i(y), c_i(y), d_i(y))$ est isomorphe à un sous-corps de $\mathbb{C}$ & nous pouvons supposer que ρ est à valeurs dans $PGL_2(\mathbb{C}) = \mathrm{Isom}(\mathbb{H}_3)$.

Comme Γ est de KAZHDAN toute action de Γ par isométries d'un espace hyperbolique réel ou complexe admet un point fixe ; par suite $\mathrm{im}\,\rho$ est à conjugaison près contenu dans $SO_3(\mathbb{R})$. D'après un théorème de ZIMMER, $\mathrm{im}\,\rho$ est finie. ■

<u>Proposition</u> $\tau : \Gamma_q \to Bir(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. Si l'un des $\tau(e_{ij}^q)$ préserve une unique fibration alors l'image de τ est finie.

<u>Remarque</u> Comme ρ est injective on est dans la 2^de éventualité de l'alternative.

<u>Démonstration</u> Posons $\tilde{e}_{ij} := \tau(e_{ij}^q)$. Les relations satisfaites par les générateurs standards assurent que si l'image de l'un d'eux par τ préservent une unique fibration $\mathcal{F}$ alors tous laissent $\mathcal{F}$ invariante.

Ainsi pour tout $\tilde{e}_{ij}$ il existe h_{ij} dans $PGL_2(\mathbb{C})$ & $F : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \to Aut(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ définissant $\mathcal{F}$ tels que $F \circ \tilde{e}_{ij} = h_{ij} \circ F$. Soit ξ le morphisme défini par

$$\xi : \Gamma_3(q^2) \to PGL_2(\mathbb{C})$$
$$e_{ij}^{q^2} \longmapsto h_{ij}$$

Puisque $\Gamma_3(q^2)$ est de KAZHDAN on a (Lemme précédent) : $\tilde{\Gamma} := \ker \xi$ est d'indice fini donc $\tilde{\Gamma}$ est de KAZHDAN.

Si $\mathcal{F}$ est rationnelle on peut supposer que $\mathcal{F} = (y = cte)$ où y est une coordonnée dans une carte affine de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Comme le groupe des transformations birationnelles qui préservent la fibration $y = cte$ s'identifie à $PGL_2(\mathbb{C}(y)) \rtimes PGL_2(\mathbb{C})$ on a

$$\tau_{|\tilde{\Gamma}} : \tilde{\Gamma} \to PGL_2(\mathbb{C}(y))$$

D'après le lemme précédent $\tau(\widetilde{\Gamma})$ est fini ; par suite $\tau(\Gamma_{q^2})$ et $\tau(\Gamma_q)$ aussi.

La fibration $\mathcal{F}$ ne peut être elliptique : le groupe des transformations birationnelles qui préservent une fibration elliptique fibre à fibre est métabélien et un sous-groupe d'indice fini de Γ_q ne peut l'être. ∎

- Factorisation dans un groupe d'automorphismes

L'image de chaque générateur standard est virtuellement isotope à l'identité le problème étant : pas nécessairement sur la même surface.

On peut montrer à conjugaison birationnelle près que le q-groupe de HEISENBERG

$$< \rho(e_{12}^q), \rho(e_{13}^q), \rho(e_{23}^q) >$$

est inclus dans $\mathrm{Aut}_0(S)$, S surface.

Remarque Tout automorphisme f d'une surface S isotope à l'identité fixe chaque courbe d'auto-intersection négative ; pour toute suite de contractions Ψ de S vers un modèle minimal $\tilde{S}$ de S l'élément $\Psi f \Psi^{-1} \in \mathrm{Aut}_0(\tilde{S})$.

Par suite à conjugaison birationnelle près

$$< \rho(e_{12}^q), \rho(e_{13}^q), \rho(e_{23}^q) > \subset \mathrm{Aut}_0(S) \quad \text{avec } S = \text{surface minimale} = \mathbb{P}^2, \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1, \mathbb{F}_m$$

Il n'y a pas de représentation injective de $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$ dans $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1)$ $\Rightarrow$ $S = \mathbb{P}^2$ ou $\mathbb{F}_m$.

Si à conjugaison près on a $< \rho(e_{12}^q), \rho(e_{13}^q), \rho(e_{23}^q) > \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_m)$ alors $\rho(\Gamma_{q^2}) \subset \mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$

En utilisant un résultat de CANTAT & LAMY on obtient que $\rho(\Gamma_{q^2}) \subset \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$.

Si $< \rho(e_{12}^q), \rho(e_{13}^q), \rho(e_{23}^q) > \subset \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ alors $\rho(\Gamma_{q^2}) \subset \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$.

Finalement $\rho(\Gamma_{q^2}) \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2) = \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$.

- Conclusion

La restriction de ρ à Γ_q se prolonge en un morphisme de groupes de LIE de $PGL_3(\mathbb{C})$ dans lui-même (MARGULIS, STEINBERG) ; par simplicité de $PGL_3(\mathbb{C})$ ce morphisme est injectif donc surjectif. Or les automorphismes lisses de $PGL_3(\mathbb{C})$ s'obtiennent à partir des automorphismes intérieurs & de la contragrédiente. Ainsi à conjugaison linéaire près

$$\rho_{|\Gamma_q} = \text{plongement canonique ou contragrédiente.}$$

Soit f un élément de $\rho(\Gamma) \setminus \rho(\Gamma_q)$ qui contracte au moins une courbe $\mathcal{C} = \mathrm{Exc}(f)$. Le groupe Γ_q est distingué dans Γ la courbe $\mathcal{C}$ est donc invariante par tous les éléments de $\rho(\Gamma_q)$ donc par tous ceux de $\overline{\rho(\Gamma_q)} = PGL_3(\mathbb{C})$ ce qui est impossible. Donc $f \in PGL_3(\mathbb{C})$ et $\rho(\Gamma) \subset PGL_3(\mathbb{C})$.