RESEAUX DES GROUPES DE LIE DANS LE GROUPE DE CREMONA

<u>Plan</u>

Exposé 1
I _ Réseaux

II _ Rang & distorsion

III _ Propriété (T) de KAZHDAN

IV _ Programme de ZIMMER

<u>Réf</u>

D. WITTE-MORRIS : Introduction to arithmetic groups

DE LA HARPE & VALETTE : la pté (T) de KAZHDAN pour les gpes loc^t compacts

A.L. ONISHCHIK & E.B. VINBERG : Lie groups & Lie algebras II.

Exposé 2 Expliquer le théorème suivant : soit $\Gamma \subset SL_3(\mathbb{Z})$ un sous-groupe d'indice fini, soit $\rho : \Gamma \hookrightarrow Bir(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$; alors à conjugaison birationnelle près ρ est le plongement canonique ou la contragrédiente.

Corollaire : $\Gamma \subset SL_n(\mathbb{Z})$ sous-groupe d'indice fini ; dès que $n \geq 4$, $\Gamma \not\hookrightarrow Bir(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$

I_ RESEAUX

- G groupe topologique localement compact

  λ_G = mesure de HAAR (invariante à gauche) sur G

  <u>ex</u> $G = Aff(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \right\}$

  $$\lambda_{Aff} = \frac{da\,db}{a^2}$$

  $$M = \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  $$l_M : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ua & ub+v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad l_M^* \lambda_{Aff} = \frac{u\,da\,u\,db}{u^2 a^2} = \frac{da\,db}{a^2} = \lambda_{Aff}$$

  $$r_M : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} au & av+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad r_M^* \lambda_{Aff} = \frac{1}{u} \lambda_{Aff}$$

- $\chi : G \to \mathbb{R}^*$ morphisme défini par $r_g^* \lambda_G = \chi(g) \lambda_G$

  G est <u>unimodulaire</u> si ce morphisme est trivial i.e. si la mesure de HAAR est bi-invariante

- Un *réseau* de G est un sous-groupe discret $\Gamma \subset G$ tq $\Gamma \backslash G$ soit de volume fini pour la mesure de HAAR.

Lemme Si G possède un réseau, alors G est unimodulaire.

Dem $\left.\begin{array}{l} r_g^* \lambda_G = \chi(g)\, \lambda_G \\ r_g \text{ passe au quotient } \Gamma\backslash G \end{array}\right) \Rightarrow \underbrace{r_g^* \lambda_G(\Gamma\backslash G)}_{=\ \lambda_G(\Gamma\backslash G)} = \chi(g)\, \lambda_G(\Gamma\backslash G) \Rightarrow \chi(g) = 1$

ex le gpe affine $Aff(\mathbb{R})$ n'a pas de réseau.

Dans la suite tous les groupes seront des groupes de LIE.

Existence de réseaux

- G gpe de LIE connexe ou # fini de composantes connexes

  G *semi-simple* $\Leftrightarrow$ G n'a pas de sous-groupe distingué résoluble connexe $\neq \{e\}$

- $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ algébrique (déf. par des ég. polynomiales)

  Thm (BOREL, HARISH-CHANDRA)

  G groupe linéaire alg défini sur $\mathbb{Q}$ semi-simple

  Alors $G(\mathbb{Z})$ est un réseau dans $G(\mathbb{R})$.

  ex $G = SL_n(\mathbb{R})$

  $G(\mathbb{Z}) = SL_n(\mathbb{Z})$ est un réseau dans $SL_n(\mathbb{R})$

- Un réseau est dit *uniforme* (ou *cocompact*) si $\Gamma \backslash G$ est compact.

- Critère de compacité

  - tores dans un groupe linéaire :

    $A \subset G$ est un *tore* si A est un sous-groupe de G connexe diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

    G est *réductif* si $\underbrace{G^0(\mathbb{R})}_{\text{composante connexe de } G(\mathbb{R})}$ = tore $\times$ semi-simple

- éléments semi-simples & unipotents

G gpe algébrique semi-simple

$\forall g \in G \quad \exists!\ g_u, g_s \in G \quad , \ g = g_u g_s \quad$ avec $[g_u, g_s] = id$

où g_u est <u>unipotent</u> i.e. toutes les valeurs propres de g_u valent 1 ;

g_s est <u>semi-simple</u> i.e. diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

- <u>Thm (critère de compacité de GODEMENT)</u>

G gpe lin, alg, déf sur $\mathbb{Q}$, réductif

$G(\mathbb{Z})$ est un réseau uniforme <u>ssi</u>

1) tout caractère $\rho : G \to GL(1)$ déf sur $\mathbb{Q}$ est trivial sur G^0 (composante connexe de id) ;

2) tout élément de $G(\mathbb{Q})$ est semi-simple (i.e. il n'y a pas d'élt unipotent $\neq id$) !

- Propriétés des réseaux.

$\Gamma \subset GL_n(\mathbb{C})$ gpe de type fini (<u>ex</u> Γ réseau)

- Γ satisfait l'alternative de TITS i.e :

ou bien Γ contient un gpe libre F_2

ou bien Γ contient un groupe résoluble d'indice fini.

- A indice fini près Γ est sans torsion dit autrement Γ contient un sous-groupe d'indice fini sans torsion.

- Γ est résiduellement fini : $\forall \gamma \in \Gamma \setminus \{id\}$ il existe un morphisme ρ de Γ dans un groupe fini tel que $\rho(\gamma) \neq e$.

$\Rightarrow \Gamma$ est hopfien.

<u>Remarque</u> $Bir(\mathbb{P}^2)$ satisfait l'alternative de TITS (CANTAT)

$Bir(\mathbb{P}^2)$ est hopfien (D.)

II. RANG & DISTORSION

- Rang réel

$G \subset SL_n(\mathbb{R})$ semi-simple, fermé.

Def Tore ds G = gpe connexe diagonalisable sur $\mathbb{C}$

Prop $T \subset G$ est un tore ssi

- T est fermé & connexe;
- T est abélien;
- tout élément de T est semi-simple.

Def Tore déployé ds G = gpe connexe diagonalisable sur $\mathbb{R}$

Prop $T \subset G$ est un tore déployé ssi

- T est fermé & connexe;
- T est abélien;
- tout élément de T est hyperbolique.

FAIT Les tores déployés maximaux pour l'inclusion sont tous conjugués.

Rang réel de G = dimension des tores déployés max pour l'inclusion.

Ex . $SL_n(\mathbb{R}) \supset D = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \;\middle|\; \prod \alpha_i = 1 \right\} \Rightarrow rg_{\mathbb{R}} SL_n(\mathbb{R}) \geq n-1$

Comme D est maximal pour l'inclusion on a $rg_{\mathbb{R}} SL_n(\mathbb{R}) = n-1$.

. $SL_n(\mathbb{C}) \subset SL_{2n}(\mathbb{R})$, $rg_{\mathbb{R}} SL_n(\mathbb{C}) = n-1$.

. $SO(p,q)$

$rg_{\mathbb{R}} SO(p,q) = \min(p,q)$ = dimension des sous-espaces totalement isotropes max.

Thm $rg_{\mathbb{R}} G = 0 \Leftrightarrow G$ compact

Thm $rg_{\mathbb{R}} G = 1 \Leftrightarrow G$ est une copie de $G_0 \times G_1$

où G_0 = gpe compact

$G_1 = SO(1,n)$ pour $n \geq 2$
ou $SU(1,n)$ pour $n \geq 2$
ou $Sp(1,n)$ pour $n \geq 2$
ou $F_{4,2}$ (gpe exceptionnel)

Thm $rg_{\mathbb{R}} G \geq 2 \iff G$ contient une copie de $SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R})$ ou de $SL_3(\mathbb{R})$.
Si de plus G est simple on a

$$rg_{\mathbb{R}} G \geq 2 \iff G \text{ contient une copie de } SL_3(\mathbb{R}) \text{ ou } SO_{2,3}(\mathbb{R}).$$

- **$\mathbb{Q}$-rang**

$G \subset SL_n(\mathbb{R})$ alg, semi-simple, déf sur $\mathbb{Q}$.
Un tore A de G est <u>$\mathbb{Q}$-déployé</u> s'il est diagonalisable sur $\mathbb{Q}$.
Tous les tores $\mathbb{Q}$-déployés maximaux sont conjugués sous $G(\mathbb{Q})$ d'où

<u>$rg_{\mathbb{Q}}(G)$</u> $=$ max dim A, A tore $\mathbb{Q}$-déployé ds G.

Thm $G \subset SL_n(\mathbb{R})$ alg, semi-simple, déf sur $\mathbb{Q}$.
$\Gamma = G(\mathbb{Z})$.
$rg_{\mathbb{Q}} G \geq 2 \Rightarrow \Gamma$ contient une copie d'un sous-groupe d'indice fini de $SL_3(\mathbb{Z})$ ou $SO_{2,3}(\mathbb{Z})$.

- **Distorsion**

- G gpe de type fini
  S partie génératrice finie symétrique de Δ.
  $\gamma \in G$, $|\gamma|_S = \inf \{ n \mid \exists s_1, \dots, s_n \in S, \prod s_i = \gamma \}$
  $\gamma \in G$, γ est <u>distordu</u> si $\lim_n \frac{|\gamma^n|_S}{n} = 0$

- $rg_{\mathbb{Q}} G \geq 2 \Rightarrow \Gamma$ contient des éléments distordus.
  D'après ce qui précède il suffit de le vérifier pour $SL_3(\mathbb{Z})$ & $SO_{2,3}(\mathbb{Z})$.
  Faisons-le pour $SL_3(\mathbb{Z})$:

$$e_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \in SL_3(\mathbb{Z})$$

On constate que $[e_{12}, e_{13}] = [e_{13}, e_{23}] = id$ & $[e_{12}, e_{23}] = e_{13}$
Un calcul élémentaire montre alors que $e_{13}^{nm} = [e_{12}^n, e_{23}^m]$
d'où $e_{13}^{n^2} = [e_{12}^n, e_{23}^n]$
Ainsi $|e_{13}^{n^2}| = |[e_{12}^n, e_{23}^n]| \leq 4n$ & $\frac{|e_{13}^{n^2}|}{n^2} \leq \frac{4}{n}$: e_{13} est un élément distordu

III - PROPRIETE (T) de KAZHDAN

Dans les années 1960 KAZHDAN déf la pté (T) pour les groupes localement compacts & l'utilise pour montrer qu'une large classe de réseaux est de génération finie.

G gpe topologique, loc^t compact.

- <u>représentation unitaire</u> :

  $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ = gpe unitaire d'un HILBERT $\mathcal{H}$.

- vecteur (ε, K) invariant :

  K partie compacte de G, $\varepsilon > 0$

  π a un vecteur <u>(ε, K) - invariant</u> s'il existe $\eta \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ tel que

  $\| \pi(g)\eta - \eta \| \leq \varepsilon \|\eta\| \quad \forall g \in K$.

  π a <u>presque un vecteur invariant</u> si pour tout (ε, K) il existe un vecteur unité (ε, K) - invariant.

- On dit que G a <u>la propriété (T) de KAZHDAN</u> si pour toute représentation unitaire π on a

  π possède presque un vecteur invariant $\Rightarrow$ π possède un vecteur invariant

<u>Ex</u> - tout gpe compact est de KAZHDAN

- $\mathbb{R}$ n'a pas la pté (T) ; + généralem^t tout groupe moyennable non compact ne possède pas la pté (T).

<u>Thm (DELORME & GUICHARDET)</u>

G a la propriété (T) $\Leftrightarrow$ toute action continue de G sur un espace de Hilbert par déplacement unitaire a un point fixe global.

<u>Thm (KAZHDAN, WANG)</u>

G gpe topologique loc^t compact.

$\Gamma \subset G$ réseau

Γ a la pté (T) $\Leftrightarrow$ G a la pté (T)

Thm (KAZHDAN)

G gpe loc^t compact ayant la pté (T). Alors

1) $\exists K \subset G$ compact qui engendre G ;

2) le gpe quotient $G/_{[G,G]}$ est compact.

Corollaire G gpe loc^t compact, ayant la pté (T).

$\Gamma \subset G$ réseau.

Γ est de génération finie & $\Gamma/_{[\Gamma,\Gamma]}$ est fini.

Thm (VASSERSHTEIN, KAZHDAN, BOREL, SERRE, WANG)

G gpe de LIE connexe semi-simple.

G a la pté (T) $\Leftrightarrow$ G n'a pas de facteur simple isomorphe à l'un des groupes $SO(1,n)$ ou $SU(1,n)$.

IV. PROGRAMME DE ZIMMER

Thm (MARGULIS)

G groupe de LIE semi-simple connexe, à centre fini, $rg_{\mathbb{R}} G \geq 2$.

$\Gamma \subset G$ réseau irréductible.

H gpe alg lin simple.

Soit $\rho : \Gamma \to H$ un morphisme dont l'image n'est pas relativement compacte & ZARISKI dense.

Alors il existe $\Gamma' \subset \Gamma$ d'indice fini & $\rho' : G \to H$ morphismes de gpes de LIE tq $\rho'_{|\Gamma'} = \rho_{|\Gamma'}$.

Conséquence   Soit $\Gamma \subset SL_n(\mathbb{R})$ un réseau

Si Γ agit fidèlement & linéairement sur $\mathbb{R}^k$ alors $k \geq rg_{\mathbb{R}} SL_n(\mathbb{R})+1 = n$

Dem $\rho : \Gamma \to GL_k(\mathbb{R})$. A indice fini près il existe $\Gamma' \subset \Gamma$ tel que $\rho : \Gamma' \to SL_k(\mathbb{R})$ (car $\Gamma/_{[\Gamma,\Gamma]}$ est fini). MARGULIS $\Rightarrow$ $\exists \rho' : SL_n(\mathbb{R}) \to SL_k(\mathbb{R})$ qui étend ρ $\Rightarrow$ $\dim SL_n(\mathbb{R}) \leq \dim SL_k(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ $n \leq k$. ∎

Afin de généraliser les travaux de MARGULIS sur les représentations linéaires des réseaux de groupes de LIE réels semi-simples de rg réel > 1 aux représentations non linéaires, ZIMMER propose d'étudier les actions des réseaux sur les variétés compactes. L'une des principales conjectures du programme est la suivante :

<u>CONJECTURE</u> G gpe de LIE réel simple connexe, $\Gamma \subset G$ réseau. S'il existe un morphisme d'image infinie de Γ ds le gpe des difféo d'une variété compacte M, on a $rg_{\mathbb{R}} G \leq \dim M$.