# Trajectoires divergentes du “vent dans les arbres”

Vincent Delecroix

Institut de Mathématiques de Luminy

RAIM, Perpignan, 7 février 2011

# Un billard infini

Le “vent dans les arbres” (ou windtree) est un billard infini.

# Un billard infini

Le “vent dans les arbres” (ou windtree) est un billard infini.

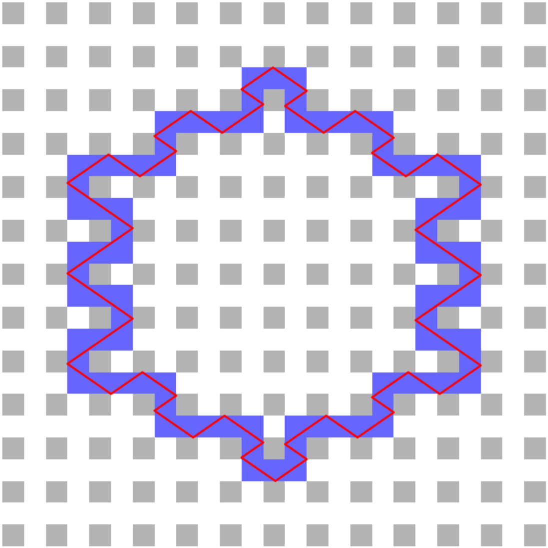
Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ on place un obstacle carré de taille $(1/2, 1/2)$ centré en chaque point de $\mathbb{Z}^2$.

# Un billard infini

Le “vent dans les arbres” (ou windtree) est un billard infini.

Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ on place un obstacle carré de taille $(1/2, 1/2)$ centré en chaque point de $\mathbb{Z}^2$. On lance une boule (identifiée à un point) qui rebondit sur les obstacles avec la loi de reflexion de la lumière.

# Un exemple de trajectoire périodique



# Un théorème de récurrence

**Theorem (Hubert-Lelièvre-Troubetzkoy 2009)**

*Pour presque toute direction $\theta$, pour presque tout point $P \in T$, la boule lancée depuis le point $P$ dans la direction $\theta$ revient infiniement souvent proche du point de départ $P$.*

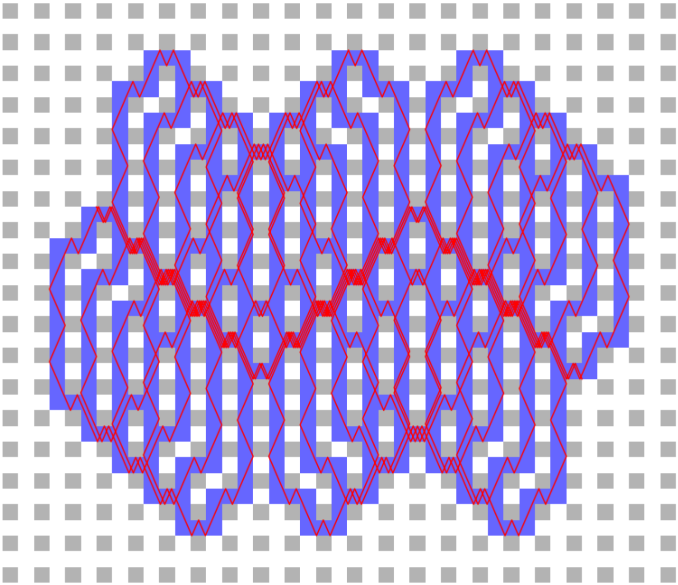
# Un théorème de récurrence

**Theorem (Hubert-Lelièvre-Troubetzkoy 2009)**

*Pour presque toute direction $\theta$, pour presque tout point $P \in T$, la boule lancée depuis le point $P$ dans la direction $\theta$ revient infiniement souvent proche du point de départ $P$.*

Si un angle $\theta$ vérifie la conclusion de ce théorème on dit que le flot dans la direction $\theta$ est *récurrent*.

# Un morceau de trajectoire récurrente



# Un théorème de divergence

**Theorem (D. 2010)**

*Soit $\theta$ un angle tel que la pente associée* $\arctan(\theta)$ *ait un développement en fraction continue ne contenant que des nombres pairs alors pour tout point $P$, une boule lancée depuis $P$ dans la direction $\theta$ s'en va à l'infini.*

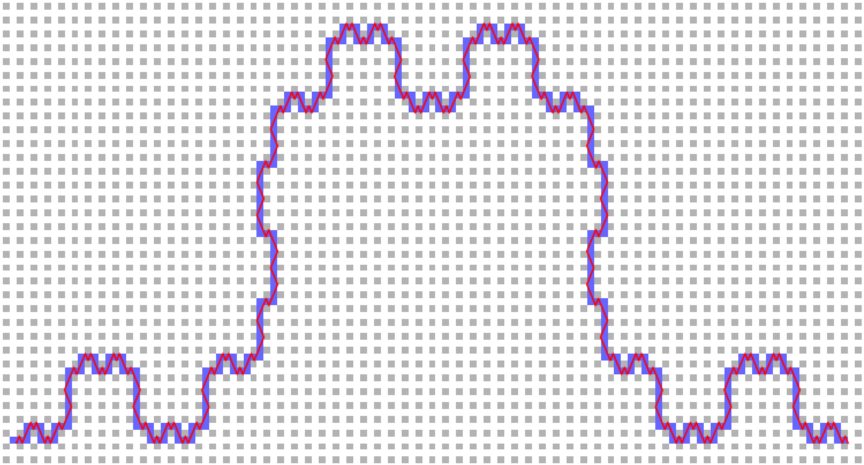
# Un théorème de divergence

**Theorem (D. 2010)**

*Soit $\theta$ un angle tel que la pente associée $\arctan(\theta)$ ait un développement en fraction continue ne contenant que des nombres pairs alors pour tout point $P$, une boule lancée depuis $P$ dans la direction $\theta$ s'en va à l'infini.*

Si un angle $\theta$ vérifie la conclusion de ce théorème on dit que le flot du billard dans la direction $\theta$ est *divergent*.

# Un début de trajectoire divergente



# Un domaine fondamental

Pour étudier les trajectoires on commence par se ramener à une surface finie dans laquelle on va pouvoir coder les géodésiques par des mots.

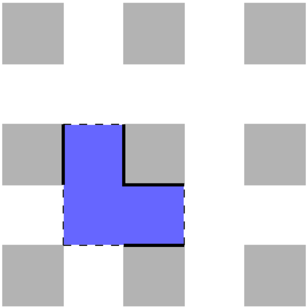
.

# Un domaine fondamental

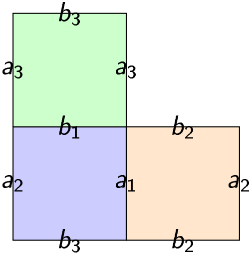
Pour étudier les trajectoires on commence par se ramener à une surface finie dans laquelle on va pouvoir coder les géodésiques par des mots.
On utilise le fait que notre table de billard est $\mathbb{Z}^2$ périodique.

# Un domaine fondamental

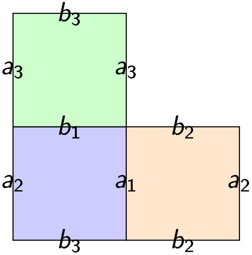
Pour étudier les trajectoires on commence par se ramener à une surface finie dans laquelle on va pouvoir coder les géodésiques par des mots.
On utilise le fait que notre table de billard est $\mathbb{Z}^2$ périodique. On considère alors le domaine fondamental de la figure suivante.



# La surface $L$ à trois carreaux



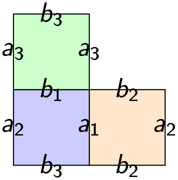
# La surface $L$ à trois carreaux

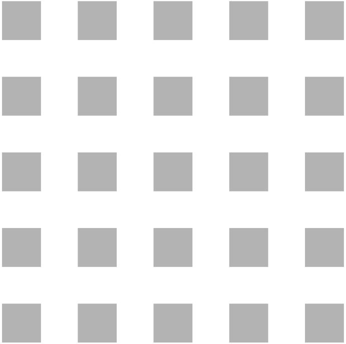



Cette surface correspond à trois carreaux collés selon les permutations

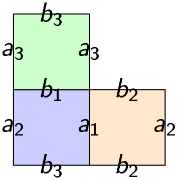
$$\begin{cases} r & = (1,2)(3) \\ u & = (1,3)(2) \end{cases}$$

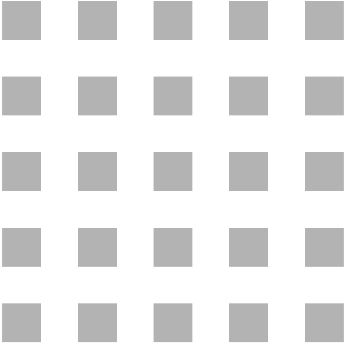
# Géodésique dans le $L$ et trajectoire dans le billard



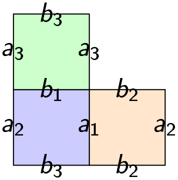
# Géodésique dans le $L$ et trajectoire dans le billard

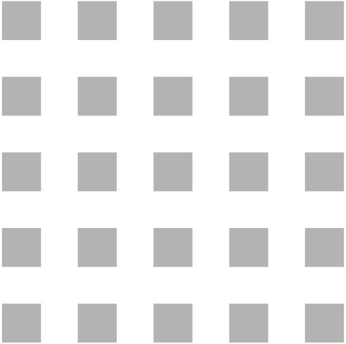


Une géodésique dans le $L$ peut être vue comme une trajectoire du billard.

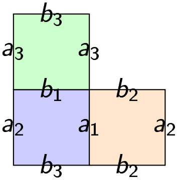
# Géodésique dans le $L$ et trajectoire dans le billard

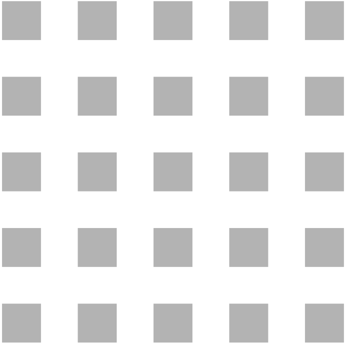


Une géodésique dans le $L$ peut être vue comme une trajectoire du billard. Chaque fois que l'on traverse $b_2$ ou $a_3$ la trajectoire est réfléchie sur un obstacle.

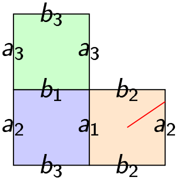
# Géodésique dans le $L$ et trajectoire dans le billard



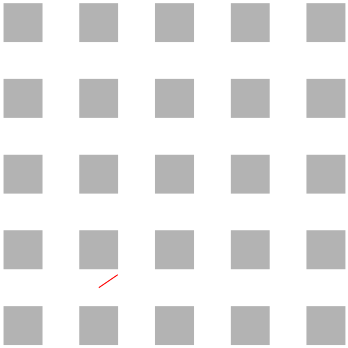



Une géodésique dans le $L$ peut être vue comme une trajectoire du billard. Chaque fois que l'on traverse $b_2$ ou $a_3$ la trajectoire est réfléchie sur un obstacle. Chaque fois que l'on traverse $a_2$ ou $b_3$ on change de niveau.

# Géodésique dans le $L$ et trajectoire dans le billard

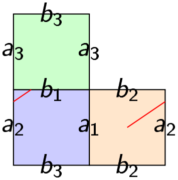



$a_2$

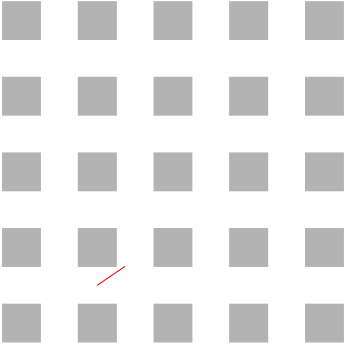


Une géodésique dans le $L$ peut être vue comme une trajectoire du billard. Chaque fois que l'on traverse $b_2$ ou $a_3$ la trajectoire est réfléchie sur un obstacle. Chaque fois que l'on traverse $a_2$ ou $b_3$ on change de niveau.

# Géodésique dans le $L$ et trajectoire dans le billard

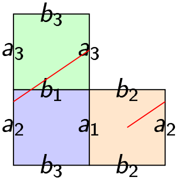



$a_2$ $b_1$

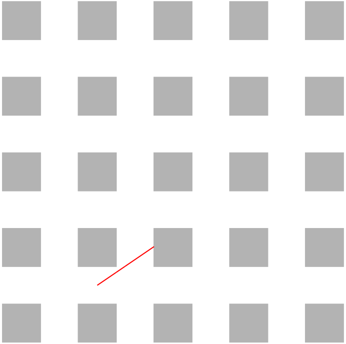


Une géodésique dans le $L$ peut être vue comme une trajectoire du billard. Chaque fois que l'on traverse $b_2$ ou $a_3$ la trajectoire est réfléchie sur un obstacle. Chaque fois que l'on traverse $a_2$ ou $b_3$ on change de niveau.

# Géodésique dans le $L$ et trajectoire dans le billard

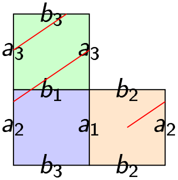



$a_2$ $b_1$ $a_3$

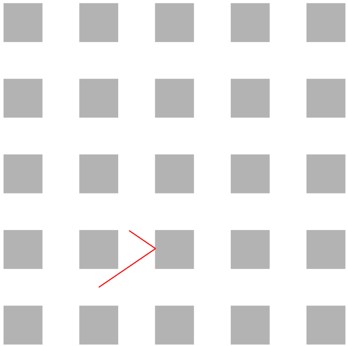


Une géodésique dans le $L$ peut être vue comme une trajectoire du billard. Chaque fois que l'on traverse $b_2$ ou $a_3$ la trajectoire est réfléchie sur un obstacle. Chaque fois que l'on traverse $a_2$ ou $b_3$ on change de niveau.

# Géodésique dans le $L$ et trajectoire dans le billard

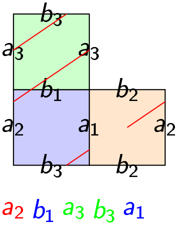


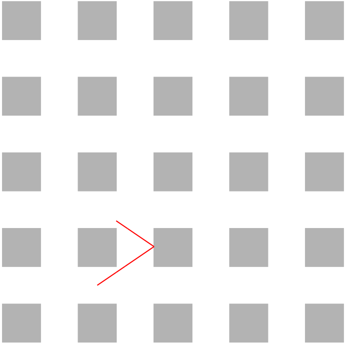

$a_2$ $b_1$ $a_3$ $b_3$



Une géodésique dans le $L$ peut être vue comme une trajectoire du billard. Chaque fois que l'on traverse $b_2$ ou $a_3$ la trajectoire est réfléchie sur un obstacle. Chaque fois que l'on traverse $a_2$ ou $b_3$ on change de niveau.

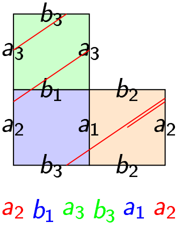
# Géodésique dans le $L$ et trajectoire dans le billard

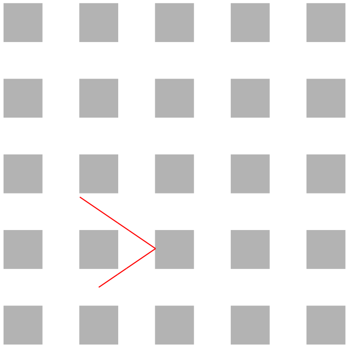


Une géodésique dans le $L$ peut être vue comme une trajectoire du billard. Chaque fois que l'on traverse $b_2$ ou $a_3$ la trajectoire est réfléchie sur un obstacle. Chaque fois que l'on traverse $a_2$ ou $b_3$ on change de niveau.

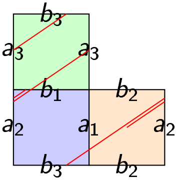
# Géodésique dans le $L$ et trajectoire dans le billard



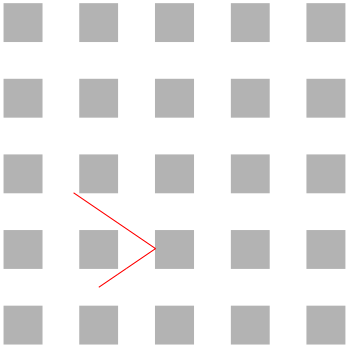



Une géodésique dans le $L$ peut être vue comme une trajectoire du billard. Chaque fois que l'on traverse $b_2$ ou $a_3$ la trajectoire est réfléchie sur un obstacle. Chaque fois que l'on traverse $a_2$ ou $b_3$ on change de niveau.

# Géodésique dans le $L$ et trajectoire dans le billard

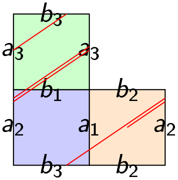



$a_2\ b_1\ a_3\ b_3\ a_1\ a_2\ b_1$

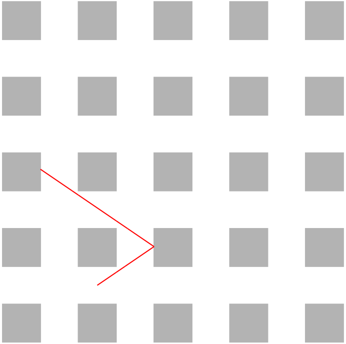


Une géodésique dans le $L$ peut être vue comme une trajectoire du billard. Chaque fois que l'on traverse $b_2$ ou $a_3$ la trajectoire est réfléchie sur un obstacle. Chaque fois que l'on traverse $a_2$ ou $b_3$ on change de niveau.

# Géodésique dans le $L$ et trajectoire dans le billard

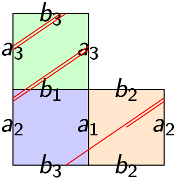



$a_2$ $b_1$ $a_3$ $b_3$ $a_1$ $a_2$ $b_1$ $a_3$

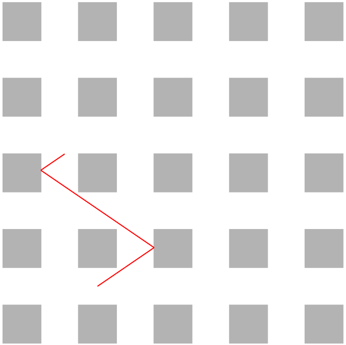


Une géodésique dans le $L$ peut être vue comme une trajectoire du billard. Chaque fois que l'on traverse $b_2$ ou $a_3$ la trajectoire est réfléchie sur un obstacle. Chaque fois que l'on traverse $a_2$ ou $b_3$ on change de niveau.

# Géodésique dans le $L$ et trajectoire dans le billard

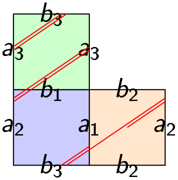



$a_2\ b_1\ a_3\ b_3\ a_1\ a_2\ b_1\ a_3\ b_3$

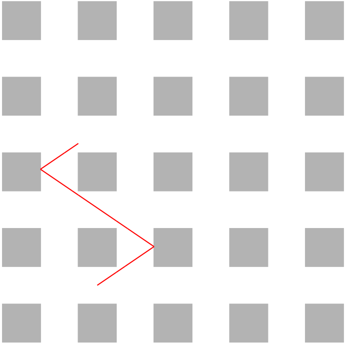


Une géodésique dans le $L$ peut être vue comme une trajectoire du billard. Chaque fois que l'on traverse $b_2$ ou $a_3$ la trajectoire est réfléchie sur un obstacle. Chaque fois que l'on traverse $a_2$ ou $b_3$ on change de niveau.

# Géodésique dans le $L$ et trajectoire dans le billard

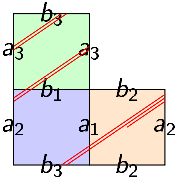



$a_2$ $b_1$ $a_3$ $b_3$ $a_1$ $a_2$ $b_1$ $a_3$ $b_3$ $a_1$



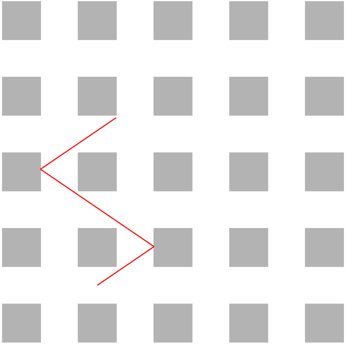
Une géodésique dans le $L$ peut être vue comme une trajectoire du billard. Chaque fois que l'on traverse $b_2$ ou $a_3$ la trajectoire est réfléchie sur un obstacle. Chaque fois que l'on traverse $a_2$ ou $b_3$ on change de niveau.

# Géodésique dans le $L$ et trajectoire dans le billard



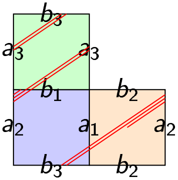

$a_2$ $b_1$ $a_3$ $b_3$ $a_1$ $a_2$ $b_1$ $a_3$ $b_3$ $a_1$

$a_2$



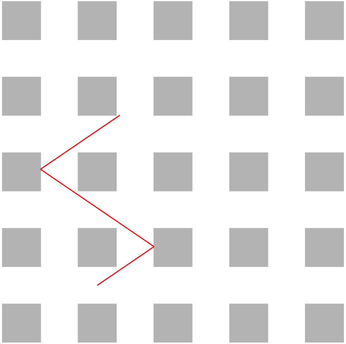
Une géodésique dans le $L$ peut être vue comme une trajectoire du billard. Chaque fois que l'on traverse $b_2$ ou $a_3$ la trajectoire est réfléchie sur un obstacle. Chaque fois que l'on traverse $a_2$ ou $b_3$ on change de niveau.

# Géodésique dans le $L$ et trajectoire dans le billard



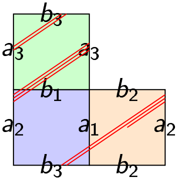

$a_2\ b_1\ a_3\ b_3\ a_1\ a_2\ b_1\ a_3\ b_3\ a_1$

$a_2\ b_1$



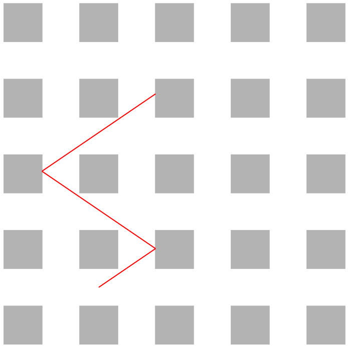
Une géodésique dans le $L$ peut être vue comme une trajectoire du billard. Chaque fois que l'on traverse $b_2$ ou $a_3$ la trajectoire est réfléchie sur un obstacle. Chaque fois que l'on traverse $a_2$ ou $b_3$ on change de niveau.

# Géodésique dans le $L$ et trajectoire dans le billard



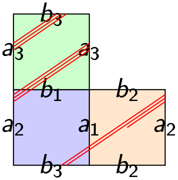

$a_2$ $b_1$ $a_3$ $b_3$ $a_1$ $a_2$ $b_1$ $a_3$ $b_3$ $a_1$

$a_2$ $b_1$ $a_3$



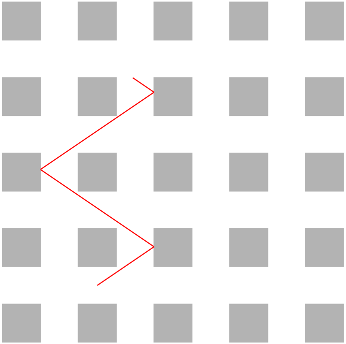
Une géodésique dans le $L$ peut être vue comme une trajectoire du billard. Chaque fois que l'on traverse $b_2$ ou $a_3$ la trajectoire est réfléchie sur un obstacle. Chaque fois que l'on traverse $a_2$ ou $b_3$ on change de niveau.

# Géodésique dans le $L$ et trajectoire dans le billard




$a_2\ b_1\ a_3\ b_3\ a_1\ a_2\ b_1\ a_3\ b_3\ a_1$

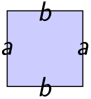
$a_2\ b_1\ a_3\ b_3$



Une géodésique dans le $L$ peut être vue comme une trajectoire du billard. Chaque fois que l'on traverse $b_2$ ou $a_3$ la trajectoire est réfléchie sur un obstacle. Chaque fois que l'on traverse $a_2$ ou $b_3$ on change de niveau.

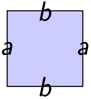
# Les mots du tore

Lorsque l'on considère une surface faite d'un seul carreau, on obtient un tore.



# Les mots du tore

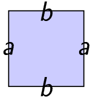
Lorsque l'on considère une surface faite d'un seul carreau, on obtient un tore.




Les codages des géodésiques dans une telle surface sont les *mots sturmiens*.

# Les mots du tore

Lorsque l'on considère une surface faite d'un seul carreau, on obtient un tore.




Les codages des géodésiques dans une telle surface sont les *mots sturmiens*. Ils peuvent être décrits par un processus de collage.

# Les mots du tore

1. On part du couple de mots $(u^{(0)}, v^{(0)}) = (a, b)$

# Les mots du tore

1. On part du couple de mots $(u^{(0)}, v^{(0)}) = (a, b)$
2. A chaque étape, on construit le couple $(u^{(n)}, v^{(n)})$ à partir de $(u^{(n-1)}, v^{(n-1)})$ en posant au choix

$$\begin{cases} (u^{(n)}, v^{(n)}) = (u^{(n-1)} \cdot v^{(n-1)}, v^{(n-1)}) \\ (u^{(n)}, v^{(n)}) = (u^{(n-1)}, v^{(n-1)} \cdot u^{(n-1)}) \end{cases}$$

# Les mots du tore

1. On part du couple de mots $(u^{(0)}, v^{(0)}) = (a, b)$
2. A chaque étape, on construit le couple $(u^{(n)}, v^{(n)})$ à partir de $(u^{(n-1)}, v^{(n-1)})$ en posant au choix

$$\begin{cases} (u^{(n)}, v^{(n)}) = (u^{(n-1)} \cdot v^{(n-1)}, v^{(n-1)}) \\ (u^{(n)}, v^{(n)}) = (u^{(n-1)}, v^{(n-1)} \cdot u^{(n-1)}) \end{cases}$$

Cette suite de couples s'appellent la suite des *n-segments*. Un mot sturmien est un mot infini qui peut être obtenu comme "limite" de n-segments.

# Les mots du tore

1. On part du couple de mots $(u^{(0)}, v^{(0)}) = (a, b)$
2. A chaque étape, on construit le couple $(u^{(n)}, v^{(n)})$ à partir de $(u^{(n-1)}, v^{(n-1)})$ en posant au choix

$$\begin{cases} (u^{(n)}, v^{(n)}) = (u^{(n-1)} \cdot v^{(n-1)}, v^{(n-1)}) \\ (u^{(n)}, v^{(n)}) = (u^{(n-1)}, v^{(n-1)} \cdot u^{(n-1)}) \end{cases}$$

Cette suite de couples s'appellent la suite des *n-segments*. Un mot sturmien est un mot infini qui peut être obtenu comme "limite" de n-segments.

Le choix que l'on fait dans le collage est directement relié aux fractions continues.

# Les mots du tore

1. On part du couple de mots $(u^{(0)}, v^{(0)}) = (a, b)$
2. A chaque étape, on construit le couple $(u^{(n)}, v^{(n)})$ à partir de $(u^{(n-1)}, v^{(n-1)})$ en posant au choix

$$\begin{cases} (u^{(n)}, v^{(n)}) = (u^{(n-1)} \cdot v^{(n-1)}, v^{(n-1)}) \\ (u^{(n)}, v^{(n)}) = (u^{(n-1)}, v^{(n-1)} \cdot u^{(n-1)}) \end{cases}$$

Cette suite de couples s'appellent la suite des *n-segments*. Un mot sturmien est un mot infini qui peut être obtenu comme "limite" de n-segments.

Le choix que l'on fait dans le collage est directement relié aux fractions continues. Si la pente est $[n_0; n_1, n_2, \ldots]$ alors on fait $n_0$ collages du type 1, suivi de $n_1$ collages du type 2, etc

# L'exemple associé à $[2, 2, 2, \dots]$

$$(a, b)$$

# L'exemple associé à $[2, 2, 2, \ldots]$

$$(a, b)$$

$$(a, baa)$$

# L'exemple associé à $[2, 2, 2, \ldots]$

$$(a, b)$$
$$(a, baa)$$
$$(abaabaa, baa)$$

# L'exemple associé à $[2, 2, 2, \ldots]$

$$(a, b)$$
$$(a, baa)$$
$$(abaabaa, baa)$$
$$(abaabaa, baaabaabaaabaabaa)$$

# L'exemple associé à $[2, 2, 2, \ldots]$

$$(a, b)$$
$$(a, baa)$$
$$(abaabaa, baa)$$
$$(abaabaa, baaabaabaaabaabaa)$$
$$(abaabaabaaabaabaaabaabaabaaabaabaaabaabaa, baaabaabaaabaabaa)$$

# L'exemple associé à $[2, 2, 2, \ldots]$

$$(a, b)$$
$$(a, baa)$$
$$(abaabaa, baa)$$
$$(abaabaa, baaabaabaaabaabaa)$$
$$(abaabaabaaabaabaaabaabaabaaabaabaaabaabaa, baaabaabaaabaabaa)$$
$$\ldots$$

# Les mots du $L$

1. Dans le cas de la surface $L$, les mots qui codent les géodésiques sont définis sur l'alphabet produit $\{a, b\} \times \{1, 2, 3\}$.

# Les mots du $L$

1. Dans le cas de la surface $L$, les mots qui codent les géodésiques sont définis sur l'alphabet produit $\{a, b\} \times \{1, 2, 3\}$.
2. Si on oublie la partie $\{1, 2, 3\}$ on retombe sur un mot sturmien.

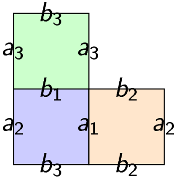
# Les mots du $L$

1. Dans le cas de la surface $L$, les mots qui codent les géodésiques sont définis sur l'alphabet produit $\{a, b\} \times \{1, 2, 3\}$.
2. Si on oublie la partie $\{1, 2, 3\}$ on retombe sur un mot sturmien. C'est un exemple de *produit croisé*.

# Les mots du $L$

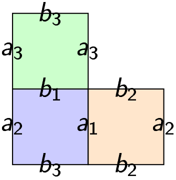
1. Dans le cas de la surface $L$, les mots qui codent les géodésiques sont définis sur l'alphabet produit $\{a, b\} \times \{1, 2, 3\}$.
2. Si on oublie la partie $\{1, 2, 3\}$ on retombe sur un mot sturmien. C'est un exemple de *produit croisé*.
3. On peut encore décrire ces mots par des n-segments... mais cette fois-ci il y a en 6.

# L'exemple associé à $[2, 2, 2, \ldots]$




$$\begin{cases} r = (1,2)(3) \\ u = (1,3)(2) \end{cases}$$

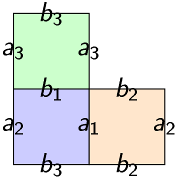
# L'exemple associé à $[2, 2, 2, \ldots]$




$$\left\{ \begin{array}{l} r = (1,2)(3) \\ u = (1,3)(2) \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

# L'exemple associé à $[2, 2, 2, \ldots]$

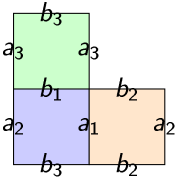



$$\begin{cases} r = (1,2)(3) \\ u = (1,3)(2) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1\,a_3\,a_3 & b_2\,a_2\,a_1 & b_3\,a_1\,a_2 \end{pmatrix}$$

# L'exemple associé à $[2, 2, 2, \ldots]$



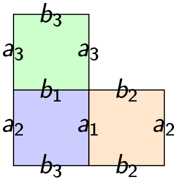

$$\begin{cases} r = (1,2)(3) \\ u = (1,3)(2) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1\, a_3\, a_3 & b_2\, a_2\, a_1 & b_3\, a_1\, a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1\, b_2\, a_2\, a_1\, b_2\, a_2\, a_1 & a_2\, b_1\, a_3\, a_3\, b_3\, a_1\, a_2 & a_3\, b_3\, a_1\, a_2\, b_1\, a_3\, a_2 \\ b_1\, a_3\, a_3 & b_2\, a_2\, a_1 & b_3\, a_1\, a_2 \end{pmatrix}$$

# L'exemple associé à $[2, 2, 2, \ldots]$




$$\begin{cases} r = (1,2)(3) \\ u = (1,3)(2) \end{cases}$$

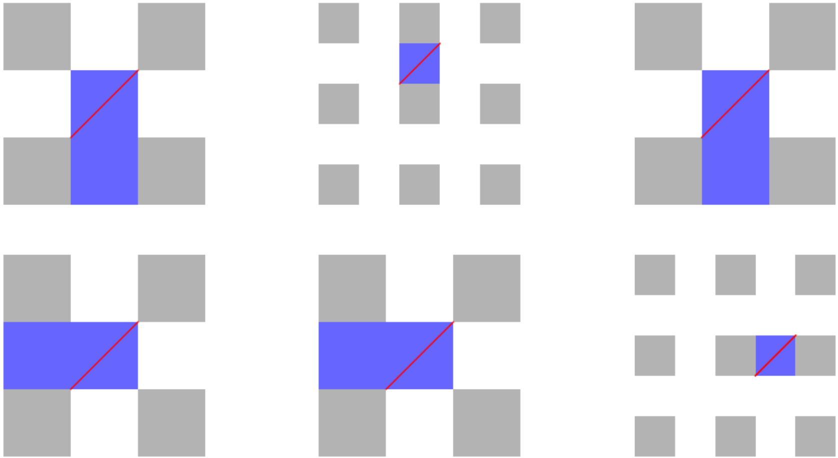
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1\, a_3\, a_3 & b_2\, a_2\, a_1 & b_3\, a_1\, a_2 \end{pmatrix}$$

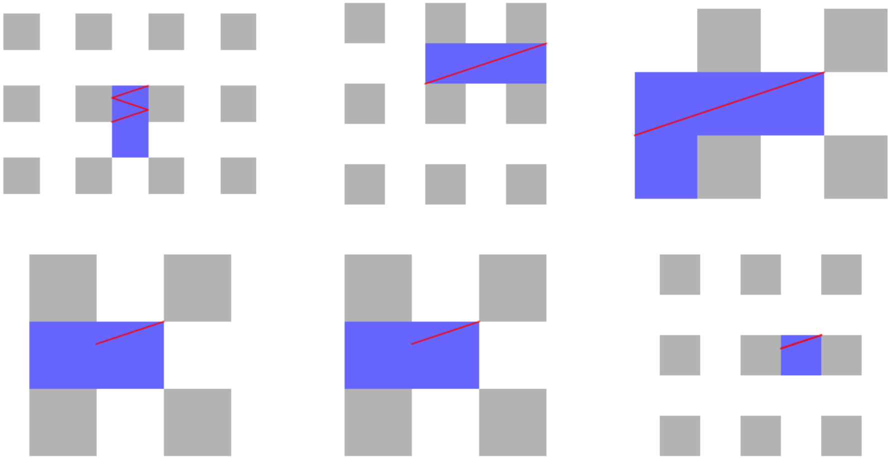
$$\begin{pmatrix} a_1\, b_2\, a_2\, a_1\, b_2\, a_2\, a_1 & a_2\, b_1\, a_3\, a_3\, b_3\, a_1\, a_2 & a_3\, b_3\, a_1\, a_2\, b_1\, a_3\, a_2 \\ b_1\, a_3\, a_3 & b_2\, a_2\, a_1 & b_3\, a_1\, a_2 \end{pmatrix}$$

$$\ldots$$

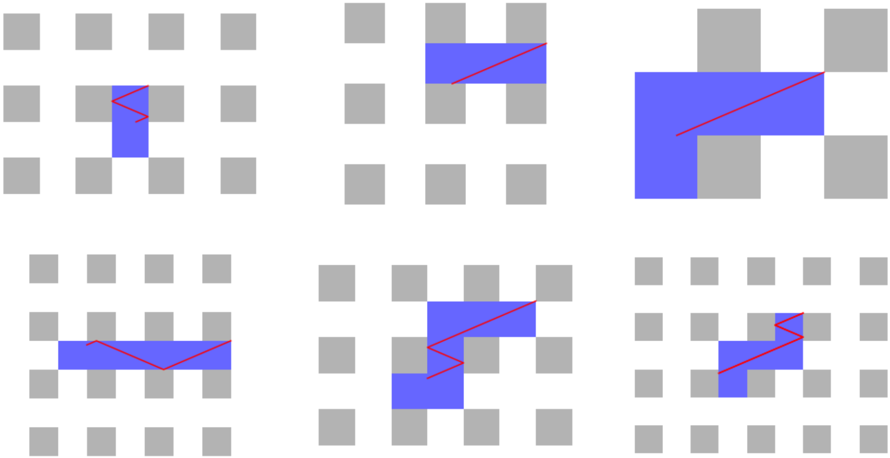
# Construction de la trajectoire de pente $[2, 2, 2, \ldots]$



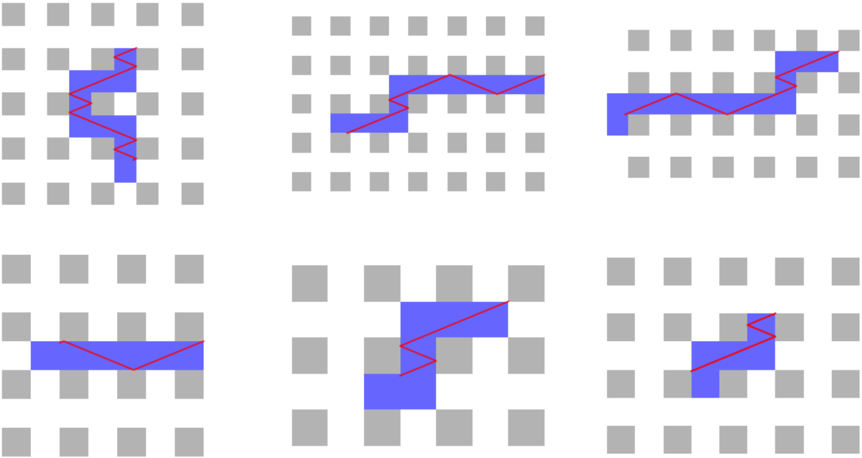
# Construction de la trajectoire de pente $[2, 2, 2, \ldots]$



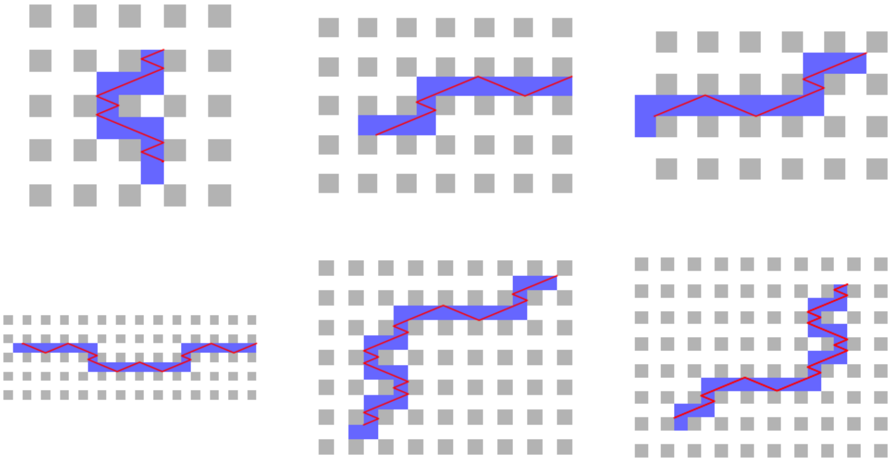
# Construction de la trajectoire de pente $[2, 2, 2, \ldots]$



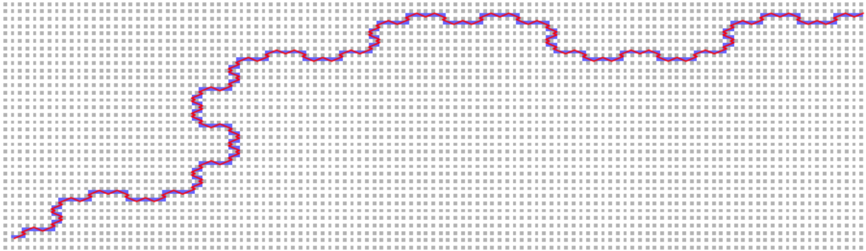
# Construction de la trajectoire de pente $[2, 2, 2, \ldots]$



# Construction de la trajectoire de pente $[2, 2, 2, \ldots]$



# Construction de la trajectoire de pente $[2, 2, 2, \ldots]$



# Construction de la trajectoire de pente $[2, 2, 2, \ldots]$

Cette construction permet de montrer que les n-segments forment des trajectoires qui s'en vont vers l'infini

## Construction de la trajectoire de pente $[2, 2, 2, \ldots]$

Cette construction permet de montrer que les n-segments forment des trajectoires qui s'en vont vers l'infini

Un argument d'approximation permet de montrer que toutes les trajectoires s'en vont vers l'infini.

## Quelques questions ouvertes

1. Existe t'il d'autres trajectoires divergentes ?

# Quelques questions ouvertes

1. Existe t'il d'autres trajectoires divergentes ? oui, $\theta = [1, 1, 1, 1, \ldots]$

# Quelques questions ouvertes

1. Existe t'il d'autres trajectoires divergentes ? oui, $\theta = [1, 1, 1, 1, \ldots]$
2. Peut-on caractériser les trajectoires récurrentes/divergentes ?

# Quelques questions ouvertes

1. Existe t'il d'autres trajectoires divergentes ? oui, $\theta = [1, 1, 1, 1, \ldots]$
2. Peut-on caractériser les trajectoires récurrentes/divergentes ?
3. Que dire pour d'autres paramètres de l'obstacle carré ?