

UNIVERSITÉ DE LA MÉDITERRANÉE
FACULTÉ DES SCIENCES DE LUMINY

Thèse

pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université de la Méditerranée
Aix-Marseille Université
spécialité **Mathématiques**

préparée à l'**Institut Mathématiques de Luminy**
dans le cadre de
l'École Doctorale en Mathématiques et Informatique de Marseille

présentée par **Vincent Delecroix**

le 16 Novembre 2011

Titre :

**Combinatoire et dynamique
du flot de Teichmüller**

Directeur de thèse : Arnaldo Nogueira

Rapporteurs :

William Veech, *Rice University, Houston*
Jean-Cristophe Yoccoz, *Collège de France, Paris*

Jury :

Pierre Arnoux, *Université de la Méditerranée, Marseille*
Pascal Hubert, *Université Paul Cézanne, Marseille*
Arnaldo Nogueira, *Université de la Méditerranée, Marseille*
Jean-Cristophe Yoccoz, *Collège de France, Paris*
Anton Zorich, *Université de Rennes 1*

Remerciements

J'adresse naturellement les premiers remerciements à mon directeur de thèse Arnaldo Nogueira. Je voudrais également exprimer ma reconnaissance à Pascal Hubert qui a largement participé à ce projet, sa curiosité mathématique et son enthousiasme furent très stimulants.

Mes remerciements vont aussi à William Veech et Jean-Cristophe Yoccoz qui ont accepté d'être rapporteurs de ma thèse ainsi qu'à Pierre Arnoux et Anton Zorich qui ont bien voulu être membres du jury.

L'activité mathématique à Marseille fut un cadre particulièrement agréable pour débiter mon activité de recherche. Les nombreux séminaires et groupes de travail (Aldylogie, baby Teich., DAC, Pythéas Fogg, Teich., ...) ainsi que les discussions avec d'autres mathématiciens ont largement participé à générer de nouvelles idées. Je souhaite adresser quelques remerciements particuliers à quelques mathématiciens marseillais d'habitat ou de passage : Anton, Arnaud, Clément, Corentin, Corinna, Elise, Emmanuel, Erwan, Glenn, Ismael, Jean-Cristophe, Jean-Baptiste, Jeff, Jon, Julien, Laurent R., Laurent T., Lionel N., Lionel V., Martin L., Martin M., Martin W., Mathéus, Mathias, Mathieu, Nicolas, Pascal, Peter, Pierre A., Pierre G., Ramzy, Samuel, Sébastien F., Sébastien L., Stepan, Tarek, Thierry C., Thierry M., Thomas S.

Je dois beaucoup à mon entourage. Mes amis, ma famille et ma muse : Ermeline.

Introduction

Ce travail de thèse est une étude dynamique de *billards rationnels* : une particule se déplace dans un polygone dont les angles sont rationnels et rebondit de manière élastique sur ses arêtes. Les *surfaces de translation* ont été introduites pour étudier les billards rationnels et les généralisent. W. Veech (1982) et H. Masur (1982) conçoivent l'ensemble des surfaces de translation comme un espace géométrique sur lequel opère un flot de *renormalisation* (le *flot de Teichmüller*) permettant d'étudier la dynamique à long terme d'une surface de translation. Les versions combinatoires de cette renormalisation, en particulier les inductions de Rauzy (1979) et de Ferenczi-Zamboni (2010), offrent une version concrète de ce flot. La plupart des résultats sur les billards rationnels utilisent le flot de Teichmüller dans sa version géométrique ou combinatoire.

Dans un premier temps, nous nous intéressons à une famille de billards infinis appelée le *vent dans les arbres* introduite par P. et T. Ehrenfest (1912). La version périodique de J. Hardy et J. Weber (1980) qui nous intéresse est un plan (infini) dans lequel des obstacles rectangulaires identiques sont disposés périodiquement. D'une part, nous construisons des familles de *trajectoires divergentes* et donnons ainsi une contrepartie à un théorème de P. Hubert, S. Lelièvre et S. Troubetzkoy. Cette construction repose sur l'algorithme de renormalisation de Ferenczi-Zamboni. D'autre part, nous démontrons que le *taux de diffusion* dans ce billard est génériquement $2/3$: la distance maximale atteinte avant le temps t par une particule se déplaçant à vitesse 1 est de l'ordre de $t^{2/3}$. Ce travail s'appuie sur la renormalisation par le flot de Teichmüller et une généralisation des travaux d'A. Zorich (1996,1997,1999) et G. Forni (2002) sur les déviations des sommes de Birkhoff dans les surfaces de translation.

L'autre type de résultats que nous présentons est de nature combinatoire. Nous étudions la version discrète du flot de Teichmüller donnée par l'induction de Rauzy. Cet algorithme utilise des graphes dont les sommets sont des *permutations irréductibles*. L'ensemble des sommets d'un graphe est une *classe de Rauzy*. En utilisant une interprétation géométrique de ces permutations en terme de surfaces de translation, nous établissons une formule explicite donnant le nombre de permutations dans chaque classe de Rauzy.

Cette thèse est une introduction à la dynamique des surfaces de translation et leur renormalisation par le flot de Teichmüller. Le coeur de notre travail se situe dans trois articles indépendants auxquels nous faisons référence tout au long du texte.

Bibliographie thématique

Cette courte bibliographie thématique donne des pistes aux lecteurs et situe notre travail. Les références complètes sont données à la fin.

Échanges d'intervalles et surfaces de translation

Trois survols introduisent les échanges d'intervalles et les surfaces de translation :

[MT02] H. MASUR, S. TABACHNIKOV *Rational billiards and flat structures.*

[Zor06] A. ZORICH, *Flat surfaces.*

[Via] M. VIANA, *Dynamics of interval exchange maps and Teichmüller flows.*

On pourra également se reporter aux articles fondateurs [KZ75], [Kea75], [Rau79], [Mas82], [Vee82], [KMS86], [Vee89], etc. Pour l'induction de Rauzy on peut consulter l'article original [Rau79] ou les trois ouvrages ci-dessus. Trois articles traitent de l'induction de Ferenczi-Zamboni :

[FZ10] S. FERENCZI, L. ZAMBONI, *Structure of k -interval exchange transformations : induction, trajectories, and distance theorems.*

[FZ11] S. FERENCZI, L. ZAMBONI, *Eigenvalues and simplicity of 4 interval exchange transformations.*

[CFZ] J. CASSAIGNE, S. FERENCZI, L. ZAMBONI, *Combinatorial trees arising in the study of interval exchange transformations.*

Le dernier de ces articles contient une formule pour la cardinalité de certains graphes intervenant dans cette induction. L'article [Dela] traite du même problème pour l'induction de Rauzy.

Déviations des moyennes ergodiques pour le flot linéaire des surfaces de translation

Sur le sujet plus spécifique des déviations de sommes de Birkhoff (ou taux de diffusion), les trois articles d'A. Zorich utilisent la version combinatoire de la renormalisation tandis que celui de Forni développe une approche géométrique.

[Zor96] A. ZORICH, *Finite Gauss measure on the space of interval exchange transformations, Lyapunov exponents.*

[Zor97] A. ZORICH, *Deviation for interval exchange transformations.*

[Zor99] A. ZORICH, *How do the leaves of a closed 1-form wind around a surface.*

[For02] G. FORNI, *Deviation of ergodic averages for area-preserving flows on surfaces of higher genus.*

Dans notre article [DHL], nous généralisons une partie des résultats ci-dessus et l'appliquons au vent dans les arbres.

Dynamique du vent dans les arbres

Les deux articles originaux n'utilisent pas les surfaces de translation, tandis qu'elles sont centrales dans le troisième.

[EE12] P. et T. EHRENFEST, *The conceptual foundations of the statistical approach in mechanics.*

[HW80] J. HARDY, J. WEBER, *Diffusion in a periodic wind-tree model.*

[HLT], P. HUBERT, S. LELIÈVRE, S. TROUBETZKOY, *The Ehrenfest wind-tree model : periodic directions, recurrence, diffusion.*

Nos articles [Delb] et [DHL] prolongent ces études.



Table des matières

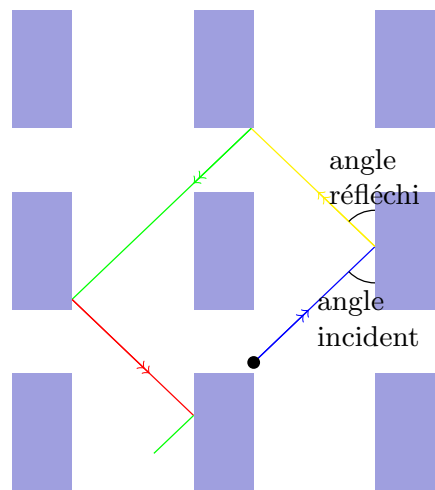
Remerciements	i
Introduction	ii
Bibliographie thématique	iii
1 Le vent dans les arbres	1
1.1 Le flot du vent dans les arbres	2
1.2 Le billard quotient et le cocycle du vent dans les arbres	3
1.3 Passage du billard quotient à la surface de translation $X(a, b)$	4
1.4 Flots linéaires de $X(a, b)$ et échanges d'intervalles	6
1.5 Diffusion et récurrence du vent dans les arbres	8
2 Renormalisation du flot linéaire d'une surface de translation	11
2.1 Flot de Teichmüller et induction de Rauzy	11
2.2 Classes de Rauzy et composantes de strates	16
2.3 Comptage des permutations des classes de Rauzy	19
3 Cocycle de Kontsevich-Zorich	25
3.1 Déviations des sommes de Birkhoff : un exemple	25
3.2 Déviations des sommes de Birkhoff : le cas général	27
3.3 Un point de vue plus géométrique sur le cocycle de Kontsevich-Zorich	29
4 Action de $SL(2, \mathbb{R})$ sur les strates de surfaces de translation	33
4.1 Action de $SL(2, \mathbb{R})$ sur une surface de translation	33
4.2 Adhérence des $SL(2, \mathbb{R})$ -orbites des surfaces $X(a, b)$	34
4.3 Sommes des exposants de Lyapunov	35
4.4 Transversalité des surfaces $X(a, b)$ au flot de Teichmüller	37
Conclusion	39
Bibliographie	42



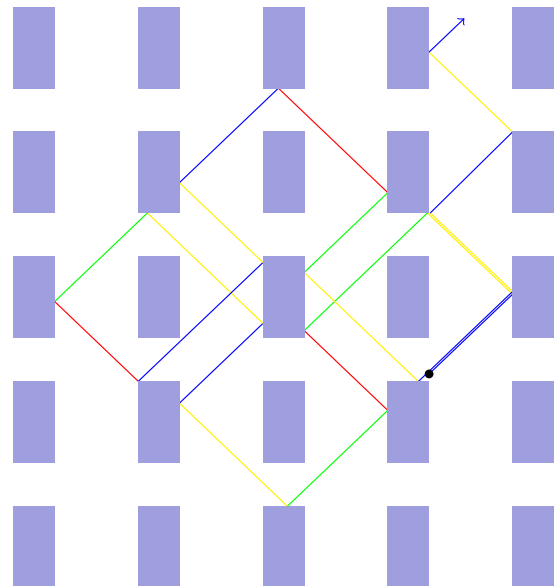
Chapitre 1

Le vent dans les arbres

Nous décrivons dans cette partie une famille de billards appelée le *vent dans les arbres*. L'origine de ce modèle (et son nom traduit de l'anglais *wind-tree*) remonte à P. et T. Ehrenfest [EE12] dans une étude des lois de Boltzmann de la thermodynamique. Leur modèle est une version du gaz de Lorentz dans lequel les obstacles sont des rectangles et non plus des disques (on trouve parfois le nom de *gaz de Lorentz rectangulaire*). En 1980, J. Hardy et J. Weber [HW80] ont introduit le modèle périodique du vent dans les arbres qui nous intéresse ici. Ce dernier est construit de la manière suivante. Considérons le plan \mathbb{R}^2 dans lequel sont placés des obstacles rectangulaires identiques disposés à chaque point de coordonnées entières. Les côtés des rectangles sont supposés horizontaux et verticaux et on appelle respectivement a et b leurs longueurs. Notons $V(a, b)$ le plan \mathbb{R}^2 privé de ces rectangles. Une particule (identifiée à un point) se déplace dans $V(a, b)$ en ligne droite (le *vent*) et rebondit sur les rectangles (les *arbres*) selon la loi de l'optique géométrique : l'angle incident est égal à l'angle réfléchi (voir la figure 1.1).



(a) Les rebonds sur les obstacles rectangulaires du billard infini $V(a, b)$.



(b) Un morceau de trajectoire dans $V(a, b)$ qui prolonge celle de la figure 1.1a.

FIGURE 1.1 – Un morceau de trajectoire dans la table de billard $V(a, b)$ avec $a = 0.33$ et $b = 0.65$.

1.1 Le flot du vent dans les arbres

Nous fixons des paramètres a et b entre 0 et 1 pour toute cette section.

Considérons une particule dans la table de billard $V(a, b)$ et notons $\theta \in S^1$ l'angle de son vecteur vitesse mesuré par rapport à l'horizontale au temps $t = 0$. Comme les rebonds de la particule sur les obstacles se font selon des côtés horizontaux et verticaux, les angles successifs du vecteur vitesse de la particule prennent quatre valeurs distinctes : θ , $-\theta$, $\pi - \theta$ et $\pi + \theta$. Soient $h : \sigma \mapsto -\sigma$ et $v : \sigma \mapsto \pi - \sigma$ les réflexions horizontale et verticale respectivement, et soit $K = \{1, h, v, hv\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ le groupe qu'elles engendrent (voir la figure 1.2).

Fixons un angle θ . Une particule se déplaçant dans le billard $V(a, b)$ avec direction initiale θ est déterminé par deux paramètres :

- sa *position* : un élément de $V(a, b)$;
- sa *direction* relativement à θ : un élément de K .

On appellera un couple position-direction un *état*. Le *flot* dans la direction θ du billard $V(a, b)$ est la fonction ϕ^θ :

$\mathbb{R} \times V(a, b) \times K \rightarrow V(a, b) \times K$ qui à la donnée d'un temps $T \in \mathbb{R}$ et de l'état initial d'une particule $(p, g) \in V(a, b) \times K$ associe son état au temps T . Nous utiliserons la notation $\phi_T^\theta(p, g) = \phi^\theta(T, p, g)$. Comme la loi de déplacement de la particule ne dépend pas du temps, nous avons $\phi_{T+T'}^\theta = \phi_T^\theta \circ \phi_{T'}^\theta$.

Nous menons une étude de la dynamique du billard $V(a, b)$ en essayant de suivre le schéma général suivant :

- « Décrire » les comportements possibles des trajectoires.
- Étant donnée la taille des obstacles rectangulaires $a \times b$, existe-t-il une « trajectoire typique » dans le billard $V(a, b)$ (relativement à l'angle θ et au point de départ p) ?
- Quantifier la taille de l'ensemble des paramètres $(p, \theta) \in V(a, b) \times S^1$ dont la trajectoire associée n'a pas un comportement typique.
- Comment ces résultats dépendent des paramètres a et b ?

Comme la table de billard $V(a, b)$ est \mathbb{Z}^2 périodique, son flot ϕ_T^θ l'est aussi. Nous allons utiliser cette périodicité pour donner une autre description de ϕ_T^θ .

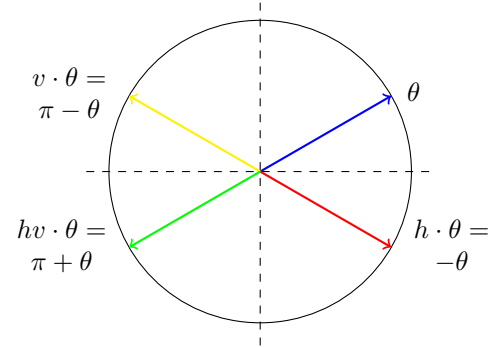


FIGURE 1.2 – Étant donnée une direction initiale θ , une particule du vent dans les arbres prend au plus quatre directions.

1.2 Le billard quotient et le cocycle du vent dans les arbres

Le billard quotient $\bar{V}(a, b) = V(a, b)/\mathbb{Z}^2$ est le quotient de la table de billard par les translations de \mathbb{Z}^2 . Le flot ϕ_T^θ du vent dans les arbres commute avec l'action de \mathbb{Z}^2 et donne un flot $\bar{\phi}_T^\theta$ dans le quotient. Dans cette section, nous construisons un billard pour décrire $\bar{V}(a, b)$ et définissons le *cocycle du vent dans les arbres* qui fait le lien entre la dynamique dans $\bar{V}(a, b)$ et $V(a, b)$.

Considérons le domaine fondamental de l'action de \mathbb{Z}^2 sur $V(a, b)$ donné par le carré dont le coin inférieur gauche est $(a/2, b/2)$ et supérieur droit $(a/2 + 1, b/2 + 1)$ (voir figure 1.3a). Le quotient de la table de billard $V(a, b)$ par \mathbb{Z}^2 s'identifie naturellement à ce domaine fondamental dans lequel on a recollé les côtés dénotés α et β dans la figure 1.3a. Le flot ϕ_T^θ du billard passe aussi au quotient et on obtient un billard dans un domaine d'aire finie (qui a une forme de L sur la figure 1.3b).

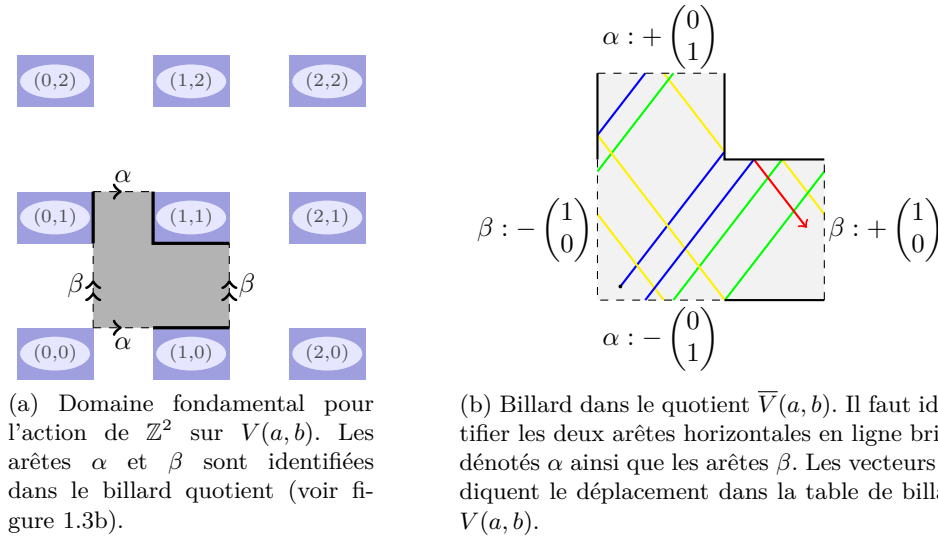


FIGURE 1.3 – Domaine fondamental et billard quotient du vent dans les arbres $V(a, b)$.

Étant donné une trajectoire dans le billard quotient $\bar{V}(a, b)$, il est facile de retrouver la trajectoire du vent dans les arbres qui lui correspond : à chaque fois que la trajectoire traverse le côté dénoté $\beta : + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la figure 1.3a, on se déplace d'un cran vers la droite. Autrement dit on ajoute le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ à la position courante. On fait de même pour les autres côtés. Ainsi, une manière équivalente de voir le flot ϕ_T^θ du billard $V(a, b)$ est de considérer :

- un élément de \mathbb{Z}^2 qui correspond à la copie du domaine fondamental que la particule est en train de visiter (voir la figure 1.3b) ;
- un état position-direction du billard quotient : un élément de $\bar{V}(a, b) \times K$ (voir la figure 1.4).

Le *cocycle du vent dans les arbres* est la procédure qui à une trajectoire dans le billard quotient décrit les déplacements dans \mathbb{Z}^2 à effectuer pour retrouver une trajectoire du vent dans les arbres. Formellement, il s'agit de la suite de fonctions $f^{(T)} : \bar{V}(a, b) \times K \rightarrow \mathbb{Z}^2$, qui à un état $(p, g) \in \bar{V}(a, b)$ associe le vecteur de \mathbb{Z}^2 correspondant au déplacement de domaine fondamental dans $V(a, b)$ effectuée par une particule partant d'un relèvement de (p, g) pendant un temps T . Cette fonction $f^{(T)}$ est discontinue en T : elle fait des sauts chaque fois que la particule passe d'un domaine fondamental

à un autre. En utilisant une application de Poincaré, nous construisons dans la section 1.4, une version discrète de $\overline{\phi}_T^\theta$ donné par un *échange d'intervalles* et du cocycle $f^{(T)}$ qui devient une *somme de Birkhoff*.

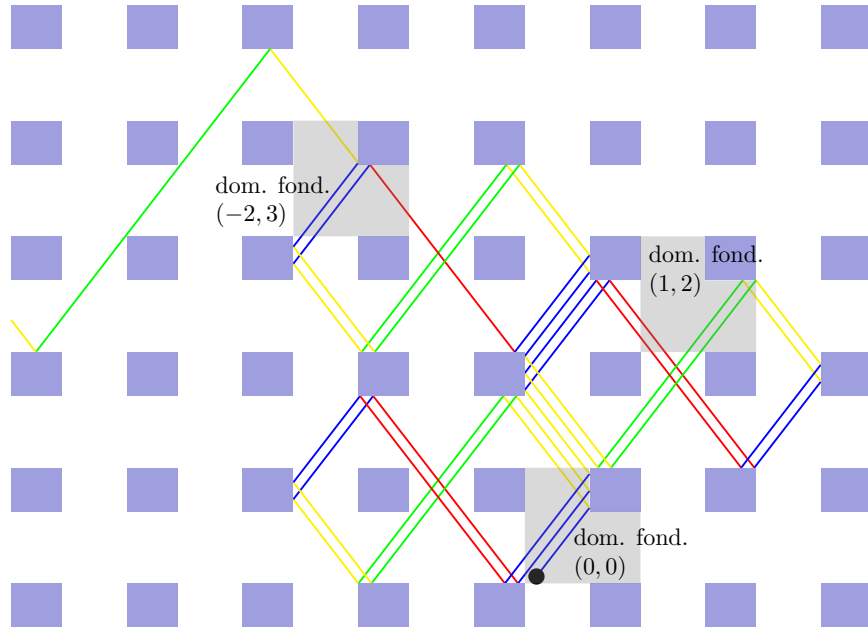


FIGURE 1.4 – La trajectoire de la figure 1.3b relevée dans la table de billard $V(a, b)$ (la trajectoire est ici beaucoup plus longue). Trois translatés du domaine fondamental sont dessinés en gris.

1.3 Passage du billard quotient à la surface de translation $X(a, b)$

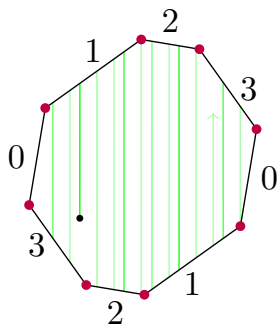


FIGURE 1.5 – Une surface de translation et une orbite de son flot linéaire. Les recollements des arêtes sont indiqués par les nombres 0, 1, 2 et 3.

Une *surface de translation* est un nombre fini de polygones P_1, P_2, \dots, P_n dont on colle deux à deux les côtés en respectant la règle suivante : deux côtés collés doivent avoir la même longueur, la même direction et des vecteurs normaux opposés. Le *flot linéaire dans la direction θ* d'une surface de translation consiste à suivre la direction θ à vitesse 1 (voir l'exemple de la figure 1.5). Lorsqu'on ne précise pas la direction θ , nous considérons qu'il s'agit de la direction verticale $\theta = \pi/2$.

L'intérêt du flot d'une surface de translation par rapport à celui d'un billard est qu'il n'y a plus d'obstacle et donc plus de rebond : les trajectoires vont en ligne de droite. Cette propriété des surfaces de translation permet de *renormaliser le temps* via une action géométrique (voir le chapitre 2) : le flot à vitesse c (imaginer c très grand) dans une surface de translation correspond à un flot à vitesse 1 d'une autre surface de translation. Il est ainsi possible d'étudier la trajectoire d'une particule à de grandes échelles temporelles

et d'en comprendre les phénomènes asymptotiques en étudiant une autre surface. Les résultats que nous présentons dans la section 1.5 proviennent de l'étude de cette renormalisation.

Construisons une surface de translation à partir du billard quotient $\bar{V}(a, b)$ de la section précédente, par une procédure de dépliage dite de *Fox-Kershner* [FK36] ou de *Katok-Zemliakov* [KZ75] (voir [MT02] pour la construction générale). Lorsque la particule rencontre un obstacle elle passe désormais dans une copie réfléchie du billard. Dans le cas du vent dans les arbres, quatre copies du billard initial sont nécessaires et correspondent aux quatre éléments du groupe $K = \{1, h, v, hv\}$ (voir la figure 1.6). Nous nommons cette surface $X(a, b)$. Chaque copie du billard dans la surface $X(a, b)$ correspond à une direction dans le billard initial ; autrement dit, chaque fois que la particule est dans la direction $g(\theta)$ dans le billard $\bar{V}(a, b)$, la trajectoire dépliée dans $X(a, b)$ est dans une même copie (comparer les figures 1.3b et 1.6).

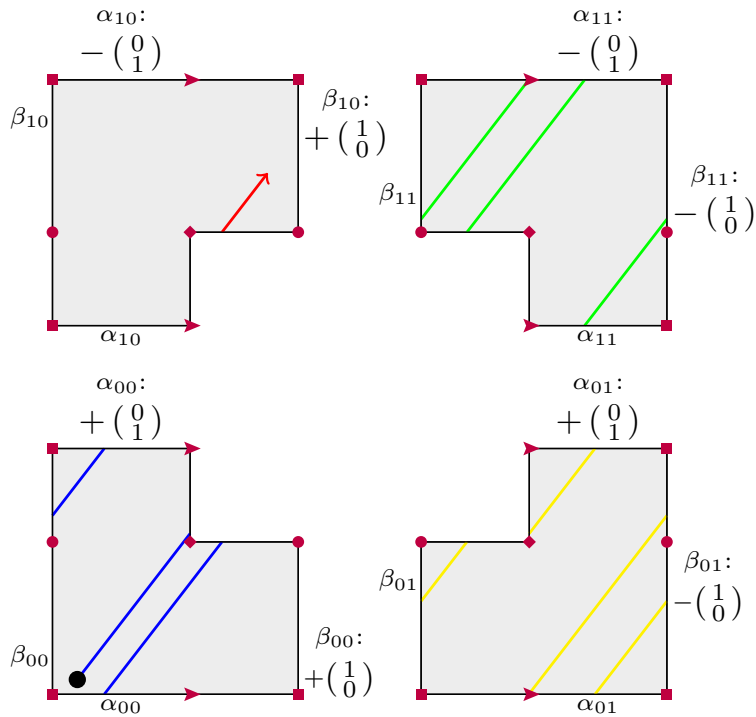


FIGURE 1.6 – Dépliage du billard quotient $\bar{V}(a, b)$ par la procédure de Katok-Zemliakov : la surface de translation $X(a, b)$. Il faut identifier les côtés qui portent les mêmes étiquettes (h_{xy} ou v_{xy}) et ceux qui ont les mêmes sommets à leurs extrémités. Les vecteurs indiquent comment relever la trajectoire dans la table de billard $V(a, b)$ (cocycle du vent dans les arbres). Le morceau de trajectoire tracé sur cette figure est le dépliage de la trajectoire dans le billard de la figure 1.3a.

Remarquons que la procédure de dépliage a fait disparaître les obstacles et apparaître quatre *points singuliers* correspondant à certains sommets du billard quotient (sur la figure 1.6 il s'agit des points violets de différentes formes). Si une particule fait un petit cercle autour d'un de ces points, elle fait trois tours avant que sa trajectoire ne retourne à sa position initiale ! Autrement dit, un cercle de rayon r suffisamment petit autour de ce point a une circonférence de $6\pi r$ et non pas $2\pi r$. Ce sommet est une *singularité conique d'angle 6π* . Tout comme dans le billard quotient dans lequel le rôle des singularités étaient joués par les coins, une trajectoire qui rencontre une singularité conique n'a pas de prolongement.

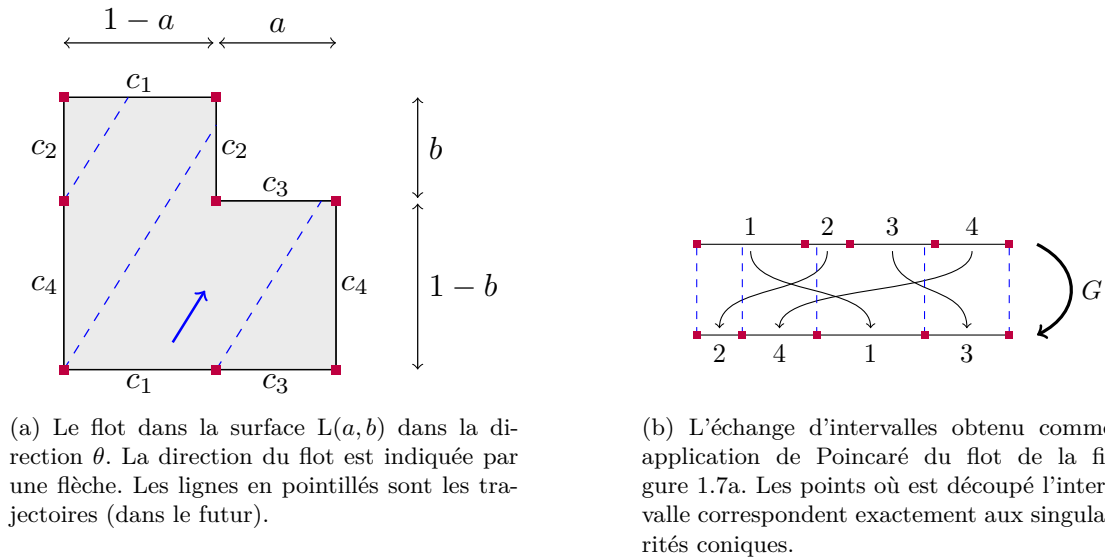
À partir d'une trajectoire dans la surface $X(a, b)$, il est possible de reconstruire la trajectoire

du billard infini $V(a, b)$. Nous appelons encore *cocycle du vent dans les arbres* cette procédure et la notons toujours $f^{(T)}$. Comme dans le billard quotient (figure 1.3a) le cocycle compte les intersections avec certains côtés. Cependant, le lecteur sera attentif aux signes produits par les réflexions du billard en particulier sur la figure 1.6.

1.4 Flots linéaires de $X(a, b)$ et échanges d'intervalles

Dans cette section, nous présentons une discrétisation du flot linéaire de la surface $X(a, b)$: au lieu d'étudier un flot continu nous considérons l'itération d'une fonction G . L'application G que nous obtenons s'appelle un *échange d'intervalles*. Cette discrétisation permet de voir le cocycle du vent dans les arbres comme une *somme de Birkhoff*.

Nous commençons avec la surface $L(a, b)$ afin de simplifier notre propos (voir la figure 1.7).



(a) Le flot dans la surface $L(a, b)$ dans la direction θ . La direction du flot est indiquée par une flèche. Les lignes en pointillés sont les trajectoires (dans le futur).

(b) L'échange d'intervalles obtenu comme application de Poincaré du flot de la figure 1.7a. Les points où est découpé l'intervalle correspondent exactement aux singularités coniques.

FIGURE 1.7 – Le flot de la surface $L(a, b)$ dans une direction θ et l'échange d'intervalles associé.

Discrétisons le flot de la surface $L(a, b)$ dans la direction θ avec une *application de Poincaré*. Il faut choisir un segment transverse au flot ; par exemple la réunion I des côtés c_1 , c_2 , c_3 et c_4 du polygone de la figure 1.7. Étant donné un point p sur ce segment, on note $G(p) = \phi_{T(p)}^\theta$ le point du segment obtenu en suivant le flot linéaire à partir de p et en s'arrêtant lorsqu'on l'on croise à nouveau le segment. Le temps $T(p)$ est le temps nécessaire à la particule p pour traverser le polygone de la figure 1.7 et s'appelle *temps de premier retour*.

L'application $G : I \rightarrow I$ que nous avons construite est un *échange d'intervalles*. En effet, appliquer G revient à découper le segment I et à réorganiser les morceaux (voir la figure 1.7b). Les longueurs qu'il faut attribuer aux côtés pour conserver les longueurs dans la réorganisation sont les *longueurs transverses du flot* qui sont ici :

$$\lambda_1 = (1 - a) \sin \theta \quad \lambda_2 = b \cos \theta \quad \lambda_3 = a \sin \theta \quad \lambda_4 = (1 - b) \cos \theta. \quad (1.1)$$

Pour encoder la réorganisation, il suffit de se donner une permutation, ici

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se donner π et λ suffit à décrire l'application de Poincaré G . Plus généralement étant donné un entier d , un vecteur de longueurs $\lambda \in \mathbb{R}_+^d$ et une permutation $\pi \in S_d$ on associe un échange de d intervalles $G_{\pi,\lambda}$.

Pour construire une application de Poincaré pour le flot linéaire de la surface $X(a,b)$, il vaut mieux utiliser 4 segments transverses plutôt qu'un. Afin de garder plus de symétrie nous décidons de ne pas prendre exactement les côtés des polygones de la figure 1.6. En effet, quitte à découper et recoller quelques morceaux, la surface $X(a,b)$ est constituée de 4 polygones en forme de « L » (voir figure 1.8). Les côtés de ces quatre « L » forment 4 segments dont la réunion est $I = I_{00} \cup I_{01} \cup I_{10} \cup I_{11}$.

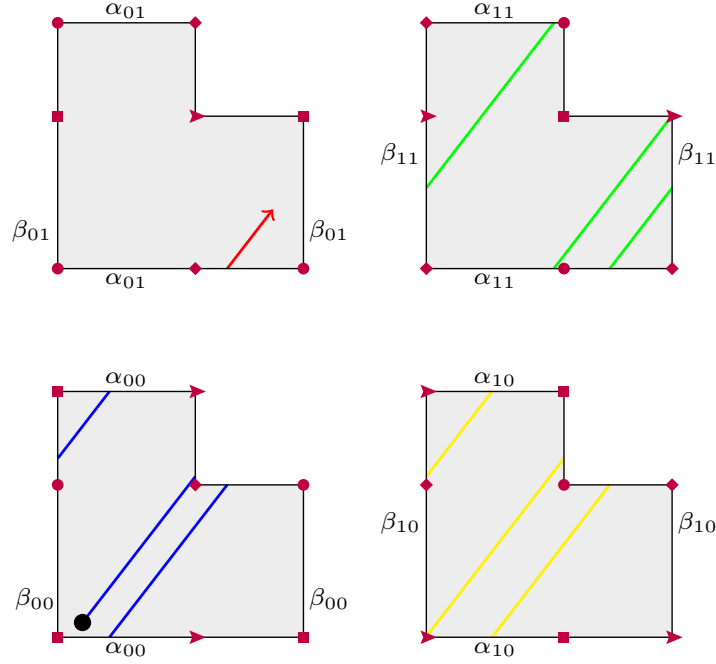


FIGURE 1.8 – La surface $X(a,b)$ (figure 1.6) vue comme 4 copies de la surface $L(a,b)$ (figure 1.7).

L'application de Poincaré du flot linéaire de $X(a,b)$ sur I est un échange d'intervalles. Les quatre permutations qui décrivent le découpage des 4 intervalles sont

$$\pi_{10} = \begin{pmatrix} 1_{10} & 2_{10} & 3_{10} & 4_{10} \\ 2_{11} & 4_{10} & 1_{10} & 3_{00} \end{pmatrix} \quad \pi_{11} = \begin{pmatrix} 1_{11} & 2_{11} & 3_{11} & 4_{11} \\ 2_{10} & 4_{11} & 1_{11} & 3_{01} \end{pmatrix}$$

$$\pi_{00} = \begin{pmatrix} 1_{00} & 2_{00} & 3_{00} & 4_{00} \\ 2_{01} & 4_{00} & 1_{00} & 3_{10} \end{pmatrix} \quad \pi_{01} = \begin{pmatrix} 1_{01} & 2_{01} & 3_{01} & 4_{01} \\ 2_{00} & 4_{01} & 1_{01} & 3_{11} \end{pmatrix}.$$

Les longueurs sont les mêmes que pour la surface $L(a,b)$ (voir (1.1)).

Les sauts effectués par le cocycle du vent dans les arbres, s'identifient à une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{Z}^2$ constante sur chacun des 16 sous-intervalles de cet échange d'intervalles et dont les valeurs sont parmi

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le cocycle du vent dans les arbres correspond alors à la *somme de Birkhoff* de cette fonction. Au temps correspondant au N -ème retour, le domaine fondamental dans lequel se trouve la particule est

$$S_N(f, p) = f(p) + f(G(p)) + \dots + f(G^{N-1}(p)).$$

Remarquons par ailleurs, que le temps de N -ème retour est lui aussi une somme de Birkhoff.

1.5 Diffusion et récurrence du vent dans les arbres

La description du vent dans les arbres est donnée par une somme de Birkhoff le long des orbites d'un échange d'intervalles. Cette description est celle qui sera utilisée dans les chapitres suivants. Dans cette section, nous anticipons sur le développement des techniques relatives aux surfaces de translation et donnons quelques résultats sur la dynamique du vent dans les arbres. Notre travail porte sur les propriétés de *diffusion* et de *récurrence* qui font l'objet des articles [Delb] et [DHL].

Soit a et b deux paramètres réels entre 0 et 1. On note ϕ_T^θ le flot du billard $V(a, b)$ dans la direction θ . La *diffusion* est le terme qui désigne la vitesse à laquelle une particule s'éloigne de sa position initiale. Nous avons vu que la distance d'une particule à son point de départ $d(p, \phi_T^\theta(p))$ s'approche par une somme de Birkhoff $S_N(G, f, p)$ d'une fonction f le long de l'orbite d'un point p pour l'échange d'intervalle G . Ainsi, nous essayons d'estimer la taille d'une somme de Birkhoff. Le premier terme d'approximation de cette quantité est donné par la limite du rapport $d(p, \phi_T^\theta(p))/T$ qui correspond aux *moyennes de Birkhoff* $S_N(G, f, p)/N$. Cette convergence est assurée sous la condition d'*unique ergodicité* qui a été démontrée par S. Kerckhoff, H. Masur et J. Smillie [KMS86]. Plus précisément :

Fixons a et b . Pour un angle θ générique, pour tout point p , on a :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{d(p, \phi_T^\theta(p))}{T} = 0.$$

Ainsi la vitesse à laquelle une particule explore le billard $V(a, b)$ est sous-linéaire. Dans notre article [DHL], nous calculons un exposant qui affine ce résultat.

Pour des paramètres a , b et θ génériques, pour tout point p , on a :

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\log d(p, \phi_T^\theta(p))}{\log T} = 2/3.$$

Ce coefficient $2/3$ est lié à l'action de $SL(2, \mathbb{R})$ sur les surfaces de translation et correspond à la vitesse de renormalisation du cocycle du vent dans les arbres. Plus précisément, il s'agit d'un *exposant de Lyapunov du cocycle de Kontsevich-Zorich* dont nous faisons le calcul explicite dans la section 4.3. Nous finissons par deux remarques :

- notre théorème de diffusion ne s'applique qu'à des paramètres a et b génériques, contrairement au théorème de Birkhoff ;
- dans notre résultat, il s'agit d'une limite supérieure et non pas d'une limite.

La diffusion concernait la taille maximale de la quantité $d(x, \phi_T^\theta(x))$. De manière complémentaire, on cherche à savoir si une particule va revenir arbitrairement proche de son point de départ ou si au contraire elle va s'en aller à l'infini. Dans le premier cas, on dit que la trajectoire est *récurren*te et dans le second *divergente*.

Les seuls résultats que nous obtenons pour la récurrence, concerne des cas où la surface $X(a, b)$ est particulièrement symétrique ; plus précisément lorsque c'est une *surface de Veech* (voir la partie 4 pour une définition précise). Les travaux de K. Calta [Cal04] et C. McMullen [McM03] listent les paramètres a et b pour lesquels cette condition est réalisée :

La surface $X(a, b)$ est une surface de Veech si et seulement si a et b vérifient l'une des deux conditions suivantes :

1. *a et b sont rationnels ;*
2. *il existe x et y deux nombres rationnels et D un entier positif sans facteur carré tel que :*

$$\frac{1}{1-a} = x + y\sqrt{D} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-b} = (1-x) + y\sqrt{D}.$$

P. Hubert, S. Lelièvre et S. Troubetzkoy [HLT] démontrent le théorème suivant :

Pour des paramètres rationnels $a = p/q$ et $b = r/s$ avec p, r impairs et q, s pairs, pour un angle θ générique, le flot ϕ_t^θ est récurrent.

Nous expliquons brièvement la preuve de ce résultat. Remarquons que si a et b sont rationnels alors pour tout angle de la forme $\theta = \arctan(p/q)$ avec $p/q \in \mathbb{Q}$, un phénomène périodique apparaît (les trajectoires sont périodiques dans le billard quotient $\bar{V}(a, b)$). C'est le cas par exemple de la direction horizontale et verticale dans lesquelles une famille de trajectoires fait des rebonds entre deux obstacles et une autre famille diverge à vitesse linéaire (*direction mixte*). Dans la direction $\pi/4$ avec $a = b = 1/2$ toutes les trajectoires sont périodiques dans $V(a, b)$ (*direction périodique*). Les différentes alternatives sur la forme des trajectoires dans les directions rationnelles sont analysées en utilisant la géométrie des surfaces de translation de genre 2. La preuve est composée de trois ingrédients :

- Une direction irrationnelle « bien approchée » par des directions rationnelles périodiques est récurrente.
- Pour les paramètres a et b de l'énoncé il existe « beaucoup » de directions rationnelles périodiques dans $V(a, b)$ et une direction θ générique est bien approchée par les directions périodiques.

En contrepoint à ce théorème et dans un cadre plus général, nous démontrons dans l'article [Delb], l'existence de trajectoires divergentes dans les billards $V(a, b)$:

Pour tout a et b tels que $X(a, b)$ est une surface de Veech, il existe un ensemble $\Lambda \subset S^1$ de dimension de Hausdorff positive tel que, pour tout angle $\theta \in \Lambda$, toute orbite du flot ϕ_T^θ dans est divergente.

La démonstration de notre résultat repose sur l'induction de Ferenczi-Zamboni qui est une version combinatoire du flot de Teichmüller. Elle consiste, comme dans le théorème précédent sur la récurrence, à approcher une pente θ par des pentes rationnelles mais qui sont cette fois de type mixte.

Chapitre 2

Renormalisation du flot linéaire d'une surface de translation

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que les trajectoires d'un billard rationnel pouvaient être vues comme des orbites du flot linéaire d'une surface de translation. Cette description nous a permis de reformuler certains problèmes dynamiques du vent dans les arbres en terme du flot linéaire de la surface $X(a, b)$. Dans ce chapitre, nous introduisons l'action (géométrique) du *flot de Teichmüller* sur une surface de translation qui correspond à une renormalisation (temporelle) de son flot linéaire. Les propriétés de l'orbite d'une surface sous l'action du flot de Teichmüller reflète ses propriétés dynamiques.

G. Rauzy [Rau79] introduit une procédure combinatoire pour renormaliser les échanges d'intervalles qui étendue par W. Veech [Vee82] pour comprendre la dynamique du flot de Teichmüller sur les espaces de surfaces de translation. Cette induction, dite de *Rauzy-Veech*, effectue une suite de découpage-recollage des polygones définissant une surface de manière à compenser les déformations du flot de Teichmüller.

Les sommes de Birkhoff que l'on considère au-dessus des flots linéaires, comptent les intersections d'une orbite avec les côtés. À une nouvelle représentation polygonale est associée un changement de base dans ce comptage appelé *cocycle de Kontsevich-Zorich*. Ce dernier est l'objet d'étude du chapitre 3.

2.1 Flot de Teichmüller et induction de Rauzy

Dans la section 1.4, nous avons vu que les applications de Poincaré du flot linéaire d'une surface de translation sont des échanges d'intervalles. Ces derniers, à une renormalisation près du temps, encodent la dynamique du flot linéaire. Dans cette partie, ils jouent un rôle essentiel : les surfaces de translation vont être vues comme des *suspensions* d'échanges d'intervalles.

Rappelons qu'un échange d'intervalles est déterminée par la donnée d'une permutation π (la façon dont on mélange les intervalles) et un vecteur λ (les longueurs des intervalles découpés). Suivant [MMY05] et [Buf06], afin de pouvoir suivre les intervalles découpés, nous donnons des noms à chacun d'eux. Une *permutation étiquetée* est un couple $\pi_t, \pi_b : \mathcal{A} \rightarrow \{1, 2, \dots, d\}$ de bijections d'un ensemble fini \mathcal{A} appelé *alphabet* que l'on note :

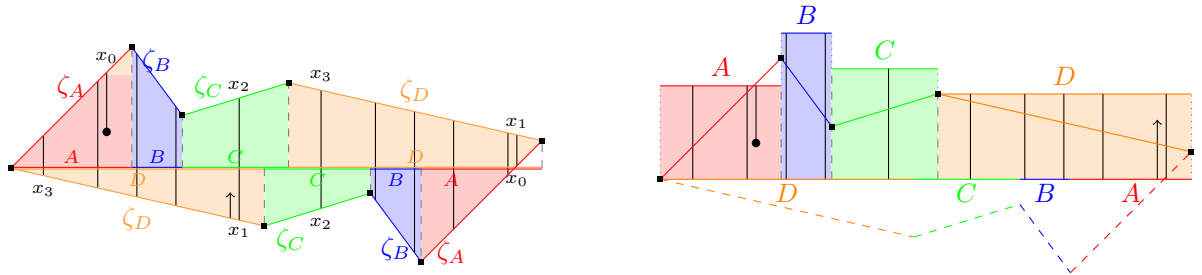
$$\pi = \begin{pmatrix} \pi_t^{-1}(1) & \pi_t^{-1}(2) & \dots & \pi_t^{-1}(d) \\ \pi_b^{-1}(1) & \pi_b^{-1}(2) & \dots & \pi_b^{-1}(d) \end{pmatrix}.$$

La ligne du haut, *top*, (resp. du bas, *bottom*) correspond à l'ordre des intervalles du haut (resp. du bas).

Soit $T = T_{\pi, \lambda}$ un échange d'intervalles étiqueté avec $\pi = (\pi_t, \pi_b)$ une permutation irréductible¹. Nous voulons faire la construction inverse de l'application de premier retour (voir la section 1.4) : construire une surface à partir de l'échange d'intervalles. Ce dernier donne les coordonnées horizontales de la surface, et il suffit donc de se donner des hauteurs. Une *donnée de suspension* pour $T_{\pi, \lambda}$ est un vecteur $\zeta = \lambda + i\tau \in \mathbb{C}^d$ tel que pour tout $k < d$:

$$\sum_{i=1}^k \tau_{\pi_t^{-1}(i)} > 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^k \tau_{\pi_b^{-1}(i)} < 0.$$

À une donnée de suspension, on associe une ligne brisée L_t (resp. L_b) en concaténant les vecteurs $\pi_t^{-1}(k)$ (resp. $\pi_b^{-1}(k)$) pour $k = 1, \dots, d$. La surface $S(\pi, \zeta)$ est construite à partir du polygone défini par les lignes brisées L_t et L_b dans lequel on identifie les côtés définis par le même vecteur (voir la figure 2.1a). On peut également construire la même suspension en utilisant les *rectangles cousus* de Veech [Vee82] (voir la figure 2.1b).



(a) La suspension construite avec les lignes brisées L_t et L_b . L'unique singularité conique de cette suspension est indiquée par des carrés noirs.

(b) Les rectangles cousus. La couture s'arrête à la première singularité conique rencontrée.

FIGURE 2.1 – Les deux constructions d'une suspension de la permutation $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix}$. Nous avons tracé une orbite de son flot linéaire en noir dont le codage est $w = ADCDA DBDBDA$.

Le *flot de Teichmüller* est l'action du sous-groupe à un paramètre $g_t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ sur les données de suspensions. Ce dernier contracte la direction verticale et dilate la direction horizontale. En particulier, une orbite du flot linéaire de longueur 1 dans la surface $g_t \cdot S$ est une orbite du flot linéaire de longueur e^t dans la surface S (voir la figure 2.2). Le flot de Teichmüller, pris isolément,

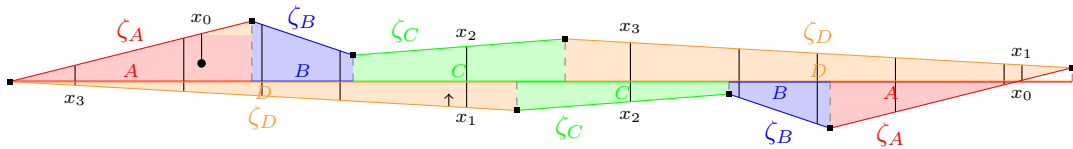


FIGURE 2.2 – Action du flot de Teichmüller sur la suspension de la figure 2.1. L'orbite du flot linéaire, en noir, est maintenant beaucoup plus courte.

n'a que peu d'intérêt : la surface s'allonge indéfiniment. Afin de pouvoir mesurer son effet, on opère des découpages de la surface de manière à conserver une longueur raisonnable ;

¹Une permutation (π_t, π_b) est dite *réductible* si il existe $k < d$ tel que $\pi_t(\{1, \dots, k\}) = \pi_b(\{1, \dots, k\})$. Une permutation qui n'est pas réductible est dite *irréductible*.

Soit $T = T_{\pi, \lambda}$ un échange d'intervalles sur l'intervalle I . Considérons les deux sous-intervalles respectivement à droite du domaine et de l'image de T dont les étiquettes sont $\alpha_t = \pi_t^{-1}(d)$ et $\alpha_b = \pi_b^{-1}(d)$. Définissons le sous-intervalle de I dans lequel on enlève le plus petit de ces deux intervalles; autrement dit $J = [0, |\lambda| - \min(\lambda_{\alpha_t}, \lambda_{\alpha_b})]$. L'*induction de Rauzy* est l'application qui, à l'échange d'intervalles T , associe l'application de premier retour de T sur J (voir la figure 2.3). G. Rauzy [Rau79] démontre que cette application de premier retour est un échange d'intervalles avec le même nombre de sous-intervalles que T .

La modification de la permutation et du vecteur de longueurs ne dépendent que du type d'induction. Notons, (π, λ) les données d'un échange d'intervalles et (π', λ') les données obtenues après une induction de Rauzy. Si l'induction est de type top alors :

$$\text{pour } \alpha \neq \alpha_t \quad \lambda'_\alpha = \lambda_\alpha \quad \text{et } \lambda'_{\alpha_t} = \lambda_{\alpha_t} - \lambda_{\alpha_b}.$$

Le cas de l'induction bottom est identique. Dans les deux cas, la matrice $M(\pi, \lambda)$ telle que $M(\pi, \lambda)\lambda' = \lambda$ est une matrice élémentaire.

La permutation π' obtenue à partir de π après une induction de Rauzy ne dépend que du type (top ou bottom) de l'induction. On obtient ainsi deux opérations combinatoires R_t et R_b agissant sur l'ensemble des permutations irréductibles. Par exemple, à partir de la permutation étiquetée $\pi = \begin{pmatrix} A B C D \\ D C B A \end{pmatrix}$ on obtient les deux permutations :

$$R_t(\pi) = \begin{pmatrix} A B C D \\ D A C B \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R_b(\pi) = \begin{pmatrix} A D B C \\ D C B A \end{pmatrix}.$$

Ces deux configurations apparaissent dans la figure 2.3 à la 1^{re} et 5^e étape respectivement.

L'*induction de Rauzy-Veech* est l'application qui à $S = S(\pi, \zeta)$ associe la suspension $S' = S(\pi', \zeta')$ où l'on remplace simplement λ par ζ dans l'induction de Rauzy. La surface S est canoniquement isomorphe à S' car elle s'obtient par découpage et collage (voir sur la figure 2.3).

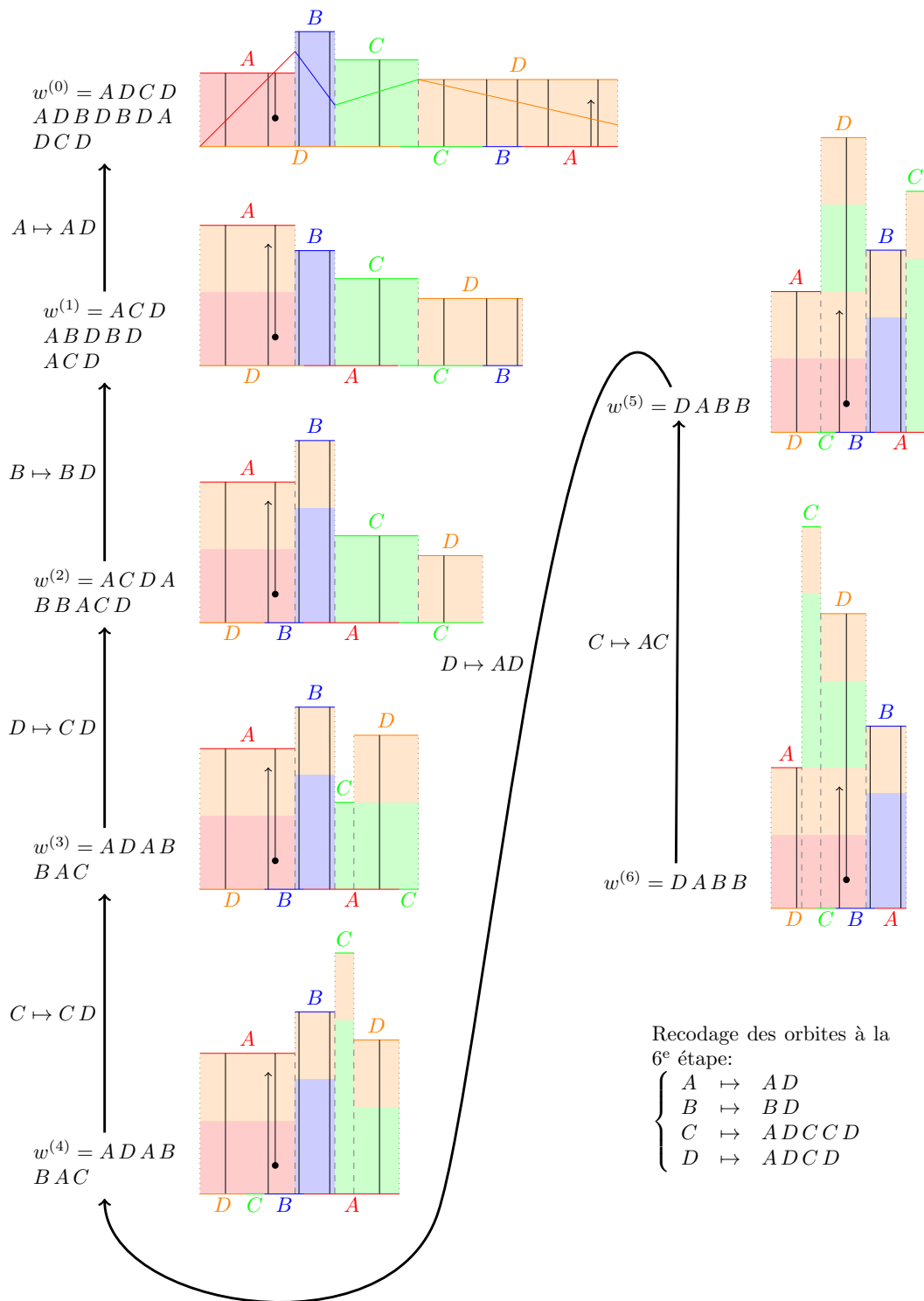


FIGURE 2.3 – Six inductions de Rauzy-Veech successives vues sur les rectangles cousus de Veech. La surface de départ est la même que sur la figure 2.1. Les types d’induction sont successivement t, t, b, t, b.

Considérons une suspension $S = S(\pi, \zeta)$ et son image au temps t par le flot de Teichmüller $g_t \cdot S$. Notons $(\pi^{(n)}, \zeta^{(n)})$ la suite de données obtenues par l'induction de Rauzy-Veech à partir de (π, ζ) . Comme l'induction de Rauzy commute avec le flot de Teichmüller, on peut effectuer des inductions de Rauzy-Veech pour la suspension $g_t \cdot S$ jusqu'à ce qu'elle soit de longueur raisonnable : on choisit l'étape d'induction n telle que $|\lambda^{(n)}| \geq e^{-t} > |\lambda^{(n+1)}|$ où $\lambda^{(n)}$ est la partie réelle de $\zeta^{(n)}$ et $|\lambda| = \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C + \lambda_D$ désigne la somme des coordonnées. Autrement dit, la longueur de l'intervalle vue sur $g_t \cdot S$, soit $e^t \cdot |\lambda^{(n)}|$, est à peu près de taille 1 (voir la figure 2.4).

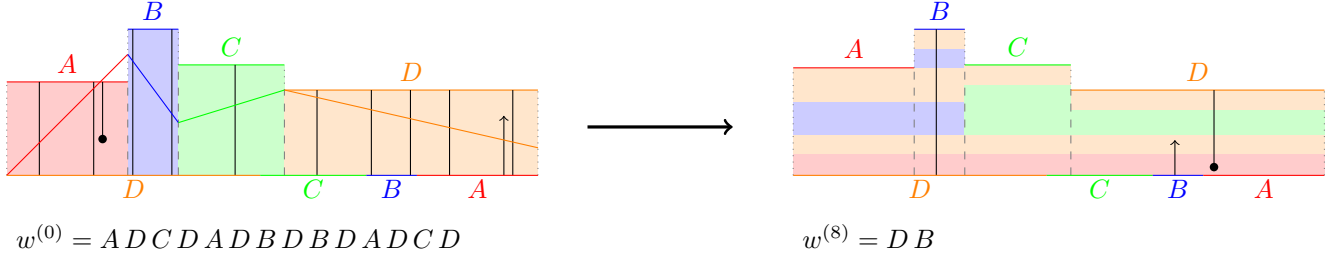


FIGURE 2.4 – Action simultanée du flot de Teichmüller au temps $t_0 \simeq 4.329$ et de l'induction de Rauzy sur la suspension de la figure 2.1 (voir aussi les figures 2.2 et 2.3). La trajectoire longue du flot linéaire de la surface initiale (sur la gauche) apparaît comme une trajectoire courte sur la droite. Les deux polygones qui définissent les surfaces sont les mêmes.

Afin de comprendre comment passer d'une somme de Birkhoff sur S à une somme de Birkhoff sur $g_t \cdot S$, nous introduisons le *cocycle de Kontsevich-Zorich*. Soit (π, λ) les données d'un échange d'intervalles et $(\pi^{(n)}, \lambda^{(n)})$ la suite de données obtenues par l'induction de Rauzy. À chaque étape de l'induction de Rauzy, le vecteur $\lambda^{(k)}$ est modifié par une matrice élémentaire $M_k = M(\lambda^{(k)}, \pi^{(k)})$ qui vérifie $\lambda = M_0 M_1 \dots M_{n-1} \lambda^{(n)}$. A un temps $t \geq 0$, on associe le produit de matrice $M^{(t)}(\pi, \lambda) = M_0 M_1 \dots M_{n-1}$ obtenue pour l'induction de Rauzy où, comme ci-dessus, n est l'entier tel que $|\lambda^{(n)}| \geq e^{-t} > |\lambda^{(n+1)}|$. Sur la figure 2.4, la matrice M associée à la huitième étape de l'induction de Rauzy (ou le cocycle de Kontsevich-Zorich au temps $t_0 \simeq 4.329$, valeur propre dominante de M) est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

L'échange d'intervalles qui nous sert d'exemple est un peu particulier car $(\pi^{(8)}, \lambda^{(8)})$ est égal aux données initiales (π, λ) modulo le facteur de dilatation t_0 . Autrement dit, la suite des inductions de Rauzy est périodique : on dit que l'échange d'intervalles est *autosimilaire*. Le vecteur de longueurs λ est le vecteur propre de Perron-Frobenius de la matrice M :

$$\lambda_A \simeq 0.2278 \quad \lambda_B \simeq 0.0953 \quad \lambda_C \simeq 0.1997 \quad \lambda_D \simeq 0.4772.$$

Pour obtenir une surface autosimilaire, il faut choisir comme donnée de hauteur τ un vecteur propre associé à la plus petite valeur propre de M ($1/t_0 \simeq 0.2278$). Par exemple :

$$\tau_A = 1 \quad \tau_B \simeq -0.5642 \quad \tau_C \simeq 0.2693 \quad \tau_D \simeq -0.4772.$$

Notons $\zeta = \lambda + i\tau$ et $S = S(\pi, \zeta)$ la suspension. Par construction, la surface $g_{t_0} \cdot S$ est isomorphe à S .

La substitution qui décrit le recodage des orbites de $g_{t_0} \cdot S$ à S est

$$\begin{cases} A \mapsto ADBD \\ B \mapsto ADBDBD \\ C \mapsto ADCCD \\ D \mapsto ADCD \end{cases} .$$

Elle peut se lire directement sur la suspension : sur la partie droite de la figure 2.4, le rectangle nommé A est composé successivement des couches A , D , B et D de la figure de gauche. Il en est de même pour les autres lettres. La matrice M est une version simplifiée de cette substitution qui ne s'occupe pas de l'ordre de lettres : chaque colonne correspond aux nombres de chacune des lettres dans l'image correspondante. Comme l'induction de Rauzy découpe l'intervalle en ne conservant que son extrémité gauche, le point fixe de cette substitution

$$w = \sigma^\infty(A) = ADBDADCDADBDBDADCDADADBDBDADC \dots$$

est le codage de l'orbite de ce point extrémal. Le lecteur pourra vérifier que le codage de la trajectoire finie présentée dans la figure 2.3 est un *facteur* du mot w ; autrement dit, qu'il apparaît dans w .

2.2 Classes de Rauzy et composantes de strates

Dans la section précédente nous avons décrit comment suivre la trajectoire d'une surface de translation sous l'action du flot de Teichmüller en utilisant l'induction de Rauzy-Veech. Cependant, nous n'avons pas décrit dans quel espace cette déformation avait lieu ; il s'agit des *composantes de strates* dont une version combinatoire est donnée par les *diagrammes de Rauzy*.

À l'induction de Rauzy, on associe naturellement un graphe orienté dont les sommets sont les permutations irréductibles et les arêtes sont l'action des opérations R_t et R_b correspondant aux opérations top et bottom de l'induction de Rauzy. Chaque composante connexe de ce graphe est appelé un *diagramme de Rauzy* (voir l'exemple de la figure 2.5). L'ensemble des sommets d'un diagramme de Rauzy s'appelle une *classe de Rauzy*. Si π est une permutation réduite (resp. étiquetée) sa classe de Rauzy est appelée *classe de Rauzy réduite* (resp. *classe de Rauzy étiquetée*).

Les diagrammes de Rauzy sont en correspondance avec des objets plus géométriques : des *composantes connexes de strates*. A une surface de translation S , on lui associe la liste $(\kappa_1, \dots, \kappa_s)$ des degrés des singularités : le degré κ_i correspond à un angle $2(\kappa_i + 1)\pi$. Le *genre* g de la surface est l'entier qui vérifie la formule :

$$\kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_s = 2g - 2.$$

Fixons un entier $g \geq 1$. Il existe un *espace des modules*, \mathcal{H}_g dont chaque point correspond à une classe d'isomorphisme de surface de translation de genre g et d'aire 1. Par isomorphisme, on entend égal à découpage et recollage près. L'espace \mathcal{H}_g est découpé en *strates*. Pour chaque données $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_s)$ de degrés de singularités coniques, on considère la strate $\mathcal{H}_g(\kappa)$ constituée des surfaces de genre g dont la liste des degrés des singularités conique est κ . Le g dans la notation $\mathcal{H}_g(\kappa)$ est donc superflu, on note alors $\mathcal{H}(\kappa)$. Pour chaque genre g , l'espace des modules \mathcal{H}_g est la réunion disjointe de strates $\mathcal{H}(\kappa_1, \dots, \kappa_s)$ où $\kappa_1 + \dots + \kappa_s = 2g - 2$. Par exemple, en genre 2, il y a deux strates : $\mathcal{H}(2)$ et $\mathcal{H}(1, 1)$. En genre 3, il y en a cinq : $\mathcal{H}(4)$, $\mathcal{H}(3, 1)$, $\mathcal{H}(2, 2)$, $\mathcal{H}(2, 1, 1)$ et $\mathcal{H}(1, 1, 1, 1)$.

Étant donnée une permutation irréductible π et une suspension $S = S(\pi, \zeta)$, la strate contenant S se calcule de la manière suivante. On tourne dans le sens trigonométrique autour des singularités de la surface qui correspondent à chaque extrémités des vecteurs ζ_α des lignes brisées L_t et L_b . Il faut alors compter le nombre de tour que l'on effectue. Lorsqu'on est sur la ligne L_t et que l'on tourne,

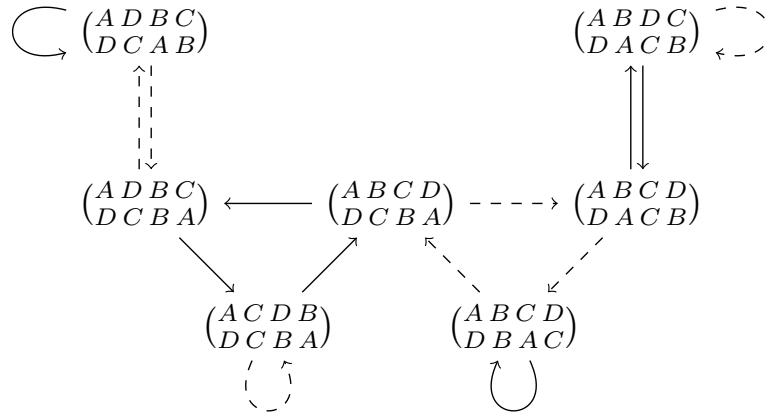
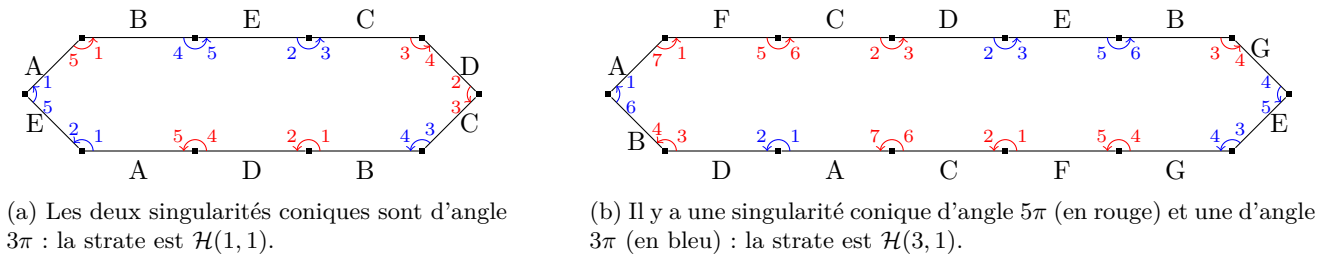


FIGURE 2.5 – Diagramme de Rauzy de la permutation $\pi = \begin{pmatrix} ABCD \\ DCBA \end{pmatrix}$. L'opération R_t correspond aux arêtes hachurées et R_b aux arêtes pleines.

on passe du vecteur $\pi_t^{-1}(i)$ au vecteur $\pi_t^{-1}(i + 1)$. Lorsqu'on est sur la ligne L_b et que l'on tourne, on passe du vecteur $\pi_b^{-1}(i)$ au vecteur $\pi_b^{-1}(i - 1)$. Il faut cependant prendre garde aux extrémités. Nous faisons ce calcul sur deux exemples dans la figure 2.6.



(a) Les deux singularités coniques sont d'angle 3π : la strate est $\mathcal{H}(1, 1)$.

(b) Il y a une singularité conique d'angle 5π (en rouge) et une d'angle 3π (en bleu) : la strate est $\mathcal{H}(3, 1)$.

FIGURE 2.6 – Calcul des strates associées aux deux permutations $\begin{pmatrix} ABEC D \\ EADBC \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} AFCDEBG \\ BDACFGE \end{pmatrix}$. La strate ne dépend que des permutations et non pas du choix particulier de la suspension, dans les deux cas, les dessins sont juste schématiques car il suffit de compter combien de fois un petit cercle autour d'une singularité croise une direction verticale.

Le flot de Teichmüller préserve l'aire des surfaces et le degré de singularités coniques et agit donc sur chaque strate. Comme il est continu, il préserve également les composantes connexes des strates. Le théorème fondateur de Masur-Veech [Mas82], [Vee82] assure que :

Chaque strate est de volume fini pour la mesure de Lebesgue². Le flot de Teichmüller préserve cette mesure et est ergodique.

Comme le flot de Teichmüller agit ergodiquement sur les composantes connexes de strates, la construction des classes de Rauzy suggère que l'on a une identification entre classes de Rauzy et composantes connexes de strates. Cependant, il faut prendre garde au fait que l'induction de

²Il existe une mesure naturelle sur les strates. Cette mesure peut-être vue sur les suspensions d'échanges d'intervalles $\zeta = \lambda + i\tau$ en désintégrant la mesure de Lebesgue $d\lambda \otimes d\tau$ des données de suspension sur l'ensemble des suspensions d'aires 1. L'aire d'une suspension est $\langle \lambda, h \rangle$ où h désigne le vecteur des hauteurs des rectangles dans la construction des rectangles cousus de Veech.

Rauzy-Veech fixe le point de la suspension situé à gauche de l'intervalle. Pour s'en affranchir, nous introduisons une opération supplémentaire $\iota : S_d \rightarrow S_d$ qui correspond à l'application échangeant le haut avec le bas et la gauche avec la droite des permutations :

$$\iota \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_d \\ b_1 & b_2 & \dots & b_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_d & b_{d-1} & \dots & b_1 \\ a_d & a_{d-1} & \dots & a_1 \end{pmatrix}.$$

Les *diagrammes de Rauzy étendus*, sont les composantes connexes du graphe dont les sommets sont les permutations irréductibles et les arêtes sont données par l'action de R_t, R_b et ι . L'ensemble des sommets d'un diagramme de Rauzy étendu est une *classe de Rauzy étendue*.

Étant donnée une permutation π on note κ_π la partition de $2g - 2$ donnée par les degrés des zéros, $\mathcal{C}(\pi) \subset \mathcal{H}(\kappa_\pi)$ la composante connexe de strate de toute suspension de π et enfin $m_l(\pi)$ le degré du zéro de la différentielle abélienne correspondant au côté gauche de l'intervalle. On note $\kappa'_\pi = \kappa_\pi \setminus \{m_l(\pi)\}$. W. Veech [Vee82, Vee89] démontre le théorème suivant³ :

L'application $\pi \rightarrow \mathcal{C}(\pi) \subset \mathcal{H}(\kappa_\pi)$ induit une bijection entre les classes de Rauzy étendues et les composantes connexes de strates.

L'application $\pi \rightarrow (m_l(\pi), \mathcal{C}(\pi)) \subset \mathcal{H}(m_l(\pi); \kappa'_\pi)$ induit une bijection entre les classes de Rauzy et les composantes connexes de strates avec un degré marqué.

Les classes de Rauzy étendues donnent ainsi une version combinatoire des composantes connexes de strates. En utilisant cette approche, W. Veech et P. Arnoux, dans les années 80, ont construit les premiers exemples de strates non connexes (calcul des composantes connexes pour les strates $\mathcal{H}(4)$ et $\mathcal{H}(6)$, voir la remarque p. 159 de [Vee90]). Dans les années 90, M. Kontsevich et A. Zorich [Kon97], suite à des expérimentations sur les classes de Rauzy étendues, ont énoncé une conjecture sur cette classification en proposant des invariants géométriques. Ces mêmes auteurs [KZ03] démontrent quelques années plus tard cette conjecture :

³Ce résultat est étendu par C. Boissy [Boia] au cas des permutations généralisées et des différentielles quadratiques. Ces dernières sont des surfaces de translation dans lesquelles on autorise des inversions pour recoller les côtés.

Les composantes connexes de la strate avec points marquées⁴ $\mathcal{H}(\kappa \cup (0^k))$ sont en bijection avec les composantes connexes de la strate $\mathcal{H}(\kappa)$ via l'application naturelle qui consiste à oublier les points marqués.

Les composantes connexes des strates de différentielles abéliennes sans point marqué pour le genre $g \geq 4$ sont classifiées par les énoncés suivants :

- Les strates $\mathcal{H}(g-1, g-1)$ avec g impair et $\mathcal{H}(2g-2)$ pour tout g possèdent trois composantes connexes : une composante hyperelliptique et deux autres composantes identifiées par leur parité de structure spin (on appelle ces deux composantes paire et impaire).
- Les autres strates dont les degrés des zéros sont pairs $\mathcal{H}(2m_1, 2m_2, \dots, 2m_n)$ possèdent deux composantes connexes qui sont distinguées par leur parité de structure spin (la composante paire et la composante impaire).
- La composante $\mathcal{H}(g-1, g-1)$ pour g pair a deux composantes connexes : une hyperelliptique et une autre baptisée non-hyperelliptique.
- Toutes les autres strates sont connexes.

Pour les genres $g < 4$ on a la classification suivante :

- Les strates $\mathcal{H}_1(0)$, $\mathcal{H}_2(2)$ et $\mathcal{H}_2(1, 1)$ sont non vides et connexes.
- Les strates $\mathcal{H}_3(4)$ et $\mathcal{H}_3(2, 2)$ possèdent deux composantes connexes une hyperelliptique et une autre dont la parité de structure spin est impaire. Les autres composantes de genre 3 sont connexes.

Pour une partition κ de $2g-2$ ne contenant que des nombres pairs, on note $\mathcal{H}^{odd}(\kappa)$ et $\mathcal{H}^{even}(\kappa)$ les composantes impaire et paire de $\mathcal{H}(\kappa)$. Les composantes hyperelliptiques sont notées $\mathcal{H}^{hyp}(2g-2)$ et $\mathcal{H}^{hyp}(g-1, g-1)$. La composante non-hyperelliptique de $\mathcal{H}(g-1, g-1)$ pour g pair est notée $\mathcal{H}^{nonhyp}(g-1, g-1)$.

On déduit des deux théorèmes ci-dessus une classification des classes de Rauzy.

La surface $X(a, b)$ du vent dans les arbres appartient à la strate $\mathcal{H}(2, 2, 2, 2)$ qui possède deux composantes $\mathcal{H}^{odd}(2, 2, 2, 2)$ et $\mathcal{H}^{even}(2, 2, 2, 2)$. Le calcul de la parité de la structure spin⁵ montre que $X(a, b)$ est dans $\mathcal{H}^{odd}(2, 2, 2, 2)$. Quant à la surface $L(a, b)$, elle est dans la strate connexe $\mathcal{H}(2)$.

2.3 Comptage des permutations des classes de Rauzy

Dans l'article [Dela], motivé par l'étude combinatoire de G. Rauzy [Rau79], nous établissons une formule pour la cardinalité des classes de Rauzy⁶. La correspondance entre les classes de Rauzy et les composantes de strates d'une part et la classification des composantes de strates d'autre part jouent un rôle essentiel dans notre preuve. Notons que pour l'induction de Ferenczi-Zamboni, le comptage

⁴Les points marqués correspondent à de fausses singularités coniques. Chaque strate avec points marqués est une strate de l'espace des modules $\mathcal{H}_{g,n}$ des classes d'isomorphismes de surface de translation avec n points marqués. Pour les strates, chaque point marqué est indiqué par un degré 0 dans le vecteur κ .

⁵Voir les articles [Joh80] et [KZ03].

⁶Signalons que différents travaux de comptage ont un lien avec la théorie de Teichmüller : J. Harer et D. Zagier [HZ86], en utilisant le nombre de façons de construire une surface de genre g à partir d'un polygone à $2g$ côtés, ont calculé la caractéristique d'Euler-Poincaré de l'espace \mathcal{M}_g ; A. Zorich [Zor02] a montré que le comptage des surfaces à petits carreaux donne un moyen d'obtenir le volume des composantes connexes de strates ; ce travail a été réalisé ensuite par A. Eskin, A. Okounkov et R. Pandharipande dans [EO01] et [EOP08].

des sommets du graphe (les sommets sont des *arbres de relations*) a été réalisé par J. Cassaigne, S. Ferenczi et L. Zamboni [CFZ].

Soit $S_d^o \subset S_d$ l'ensemble des permutations irréductibles de S_d . Si on note $p(d) = |S_d^o|$ le nombre de permutations irréductibles de S_d alors on a la formule⁷ :

$$p(d) = d! - \sum_{k=1}^{d-1} p(k)(d-k)!$$

Pour obtenir cette formule, il suffit de constater qu'une permutation réductible est la concaténation, de manière unique, d'une permutation irréductible de longueur k plus grande que 1 (le terme $p(k)$) et d'une autre permutation de longueur $d-k$ (le terme $(d-k)!$). Les premiers termes de cette suite sont donnés dans le tableau ci-dessous.

d	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$p(d)$	1	3	13	71	461	3447	29093	273343	2829325	31998903
$p(d)/d!$	0.5	0.5	0.542	0.592	0.640	0.684	0.722	0.753	0.780	0.802

L'ensemble des classes de Rauzy forme une partition de S_d^o . Par exemple, les 71 permutations irréductibles de longueur 5 se partagent en 4 classes de Rauzy :

- la classe de (5 4 3 2 1) associée à la strate $\mathcal{H}(1;1) \simeq \mathcal{H}(1,1)$ qui contient 15 permutations ;
- la classe de (5 3 4 2 1) associée à la strate $\mathcal{H}(2;0)$ qui contient 35 permutations ;
- la classe de (5 3 2 4 1) associée à la strate $\mathcal{H}(0;2)$ qui contient 11 permutations ;
- la classe de (5 2 3 4 1) associée à la strate $\mathcal{H}(0;0,0) \simeq \mathcal{H}(0,0,0)$ qui contient 10 permutations.

Notre stratégie pour obtenir le comptage des classes de Rauzy se décompose en deux étapes : la première consiste à compter les permutations standards et la seconde à passer du comptage pour les permutations standards à celui pour toutes les permutations.

Une permutation $\pi \in S_d$ (resp. permutation étiquetée (π_t, π_b)) est dite *standard* si $\pi(1) = d$ et $\pi(d) = 1$ (resp. $\pi_t^{-1}(1) = \pi_b^{-1}(d)$ et $\pi_b^{-1}(1) = \pi_t^{-1}(d)$). Leur importance est en particulier due au fait suivant :

Chaque classe de Rauzy contient au moins une permutation standard.

Les permutations standards jouent un rôle important dans la classification des composantes connexes⁸. De plus elles ont toujours une position centrale dans les diagrammes de Rauzy (voir la position de $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix}$ dans le diagramme 2.5).

Dans la première partie de [Dela] nous démontrons que compter les permutations standards de chaque strate revient à compter le nombre de solutions d'une équation dans le groupe symétrique.

On remarquera en particulier que le terme $z_\kappa = \prod_{i=1}^s (\kappa_i + 1)^{e_i} e_i!$ dans les théorèmes ci-dessous est le cardinal d'un centralisateur dans S_d . Suite aux travaux de G. Boccara [Boc80] et A. Goupil et G. Schaeffer [GS98] nous obtenons une formule explicite pour ces nombres. Ce comptage des permutations standards fait intervenir les méthodes de chirurgie de [KZ03] et [EMZ03] permettant

⁷Cette formule permet d'obtenir une asymptotique précise du nombre de permutations irréductibles : $p(d)$ est équivalent à $d!$ (voir [Com72]).

⁸Ces permutations ont une interprétation plus géométrique. Quitte à modifier légèrement la définition de suspension, on associe à une permutation standard une suspension faite d'un cylindre : on dit que c'est une *surface de translation Jenkins-Strebel*. Voir en particulier [Zor08].

de relier les composantes connexes entre elles. Combinatoirement, nous analysons les opérations qui consistent à enlever certains intervalles de la permutation. Pour cela, nous introduisons des strates avec un marquage. Une *séparatrice horizontale* d'une surface S est une demi-droite horizontale qui part d'une singularité. L'intervalle que constitue l'échange d'intervalles focalise deux singularités coniques qui correspondent à ses extrémités. Pour encoder ce marquage, nous définissons deux familles de strates. La strate $\mathcal{H}(m|a; \kappa')$ de l'ensemble des classes d'équivalence de surfaces de translation dans la strate $\mathcal{H}((m) \cup \kappa')$ dont on a marqué une séparatrice entrante et une séparatrice sortante sur le même zéro et dont l'angle (pour la métrique plate) entre ces deux séparatrices est $(2a + 1)\pi$. La strate $\mathcal{H}(m_l \odot m_r; \kappa')$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence de surfaces de translation dans la strate $\mathcal{H}((m_l, m_r) \cup \kappa')$ dont on a marqué une séparatrice entrante et une séparatrice sortante sur deux zéros distincts de degré respectivement m_l et m_r .

Soit π une permutation irréductible. On associe à toute suspension $S(\pi, \zeta)$ de π la strate marquée de la forme $\mathcal{H}(m|a; \kappa')$ ou $\mathcal{H}(m_l \odot m_r; \kappa')$ en considérant les séparatrices sortante et entrante sur $S(\pi, \zeta)$ associée au côté gauche et droit de π . On appellera *classe de Rauzy* associée à $\mathcal{H}(m_l \odot m_r; \kappa')$ (resp. $\mathcal{H}(m|a; \kappa')$) l'ensemble des permutations π de la classe de Rauzy étendue associée $\mathcal{H}((m_l, m_r) \cup \kappa')$ (resp. $\mathcal{H}(m|a; \kappa')$) dont le marquage induit par les extrémités de π est $m_l \odot m_r$ (resp. $m|a$). Nous donnons la liste des marquages des permutations de la strate $\mathcal{H}(1, 1)$ dans la figure 2.7.

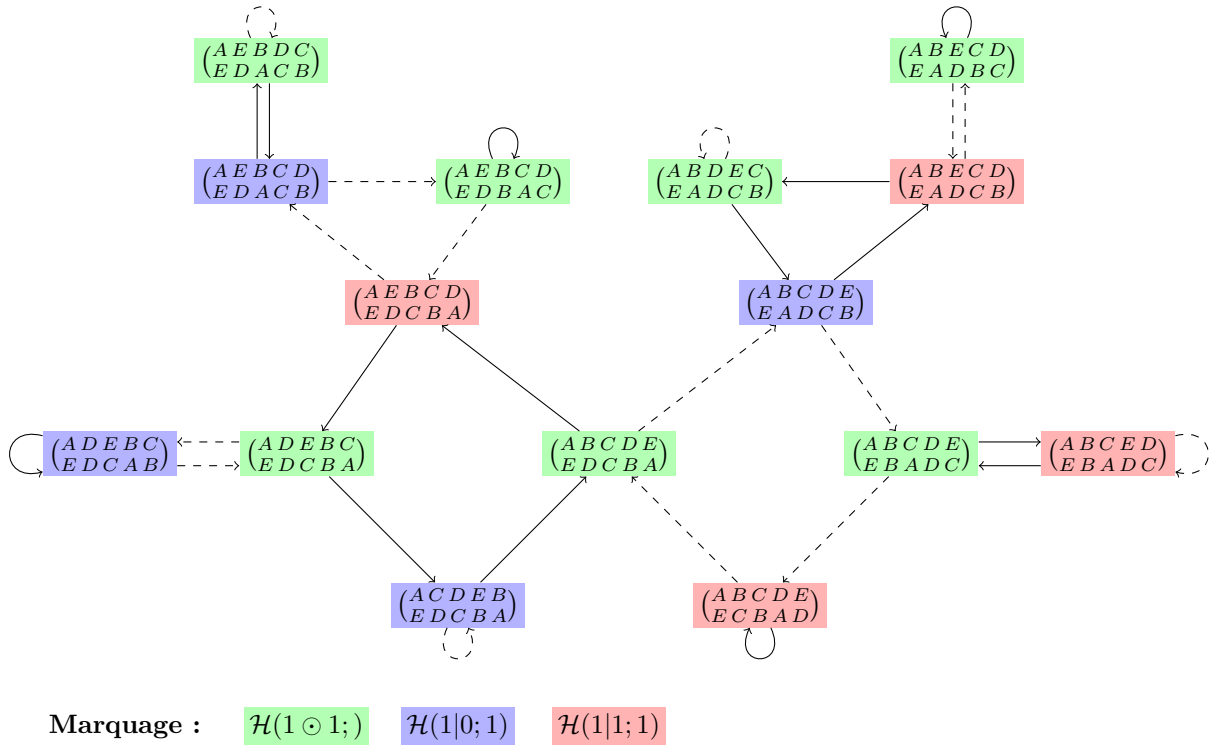


FIGURE 2.7 – Le diagramme de Rauzy associé à la strate $\mathcal{H}(1, 1)$ contient 15 permutations. Il y a trois marquages $1 \odot 1$ (7 permutations), $1|0$ (4 permutations) et $1|1$ (4 permutations).

Si $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_s)$ est une partition d'un entier on note $s(\kappa) = \kappa_1 + \dots + \kappa_s$ sa *somme* et $l(\kappa) = n$ sa *longueur*. On note également $z_{\kappa'}$ le cardinal du centralisateur de la partition $(\kappa_1 + 1, \kappa_2 + 1, \dots, \kappa_s + 1)$. Si e_i est le nombre d'occurrences de i dans cette partition alors : $z_{\kappa'} = \prod (\kappa_i + 1)^{e_i} e_i!$. Nous obtenons en particulier :

Il n'y a qu'une permutation standard dans les strates hyperelliptiques $\mathcal{H}^{hyp}(2g-2)$ (resp. $\mathcal{H}^{hyp}(g-1, g-1)$) qui, en notant $d = 2g$ (resp. $d = 2g+1$), est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & d \\ d & d-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour la classe de Rauzy associée à la strate $\mathcal{H}_g(m|a; \kappa')$ (resp. $\mathcal{H}_g(m_l \odot m_r; \kappa')$), notons p la partition $(a, \kappa'_1+1, \dots, \kappa'_s+1)$ (resp. $(\kappa'_1+1, \dots, \kappa'_s+1)$) et $d = 2g-2+s-1$. Alors le nombre de permutations standards dans cette classe de Rauzy est :

$$\frac{2(d-1)!}{(d+1)z_{\kappa'}} \sum_{q \subset p} \left((-1)^{s(q)+l(q)} \binom{d}{s(q)}^{-1} \right),$$

où la somme se fait sur toutes les sous-partitions q de p .

De plus, si κ ne contient que des nombres pairs, alors la différence entre le nombre de permutations standards associées à $\mathcal{H}^{odd}(a|m; \kappa)$ et $\mathcal{H}^{even}(a|m; \kappa')$ est 0 si $a \equiv 0 \pmod{2}$ et sinon, en notant $d = 2g-2+s-1$, est :

$$\frac{(d-1)!}{2^{g-1}z_{\kappa'}}.$$

La différence entre le nombre de permutations standards associées à $\mathcal{H}^{odd}(m_l \odot m_r; \kappa')$ et $\mathcal{H}^{even}(m_l \odot m_r; \kappa')$ est $\frac{(d-1)!}{2^{g-1}z_{\kappa'}}$.

En particulier, nous obtenons des formules pour le nombre de permutations standards dans le cas particulier de la strate minimale $\mathcal{H}(2g-2)$.

La classe de Rauzy associée à $\mathcal{H}_g^{hyp}(2g-2)$ possède une seule permutation standard. Si g est congru à 1 ou 2 modulo 4 alors les nombres de permutations standards de respectivement $\mathcal{H}^{odd}(2g-2)$ et $\mathcal{H}^{even}(2g-2)$ sont :

$$(2g-2)! \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{2^{g-1}} \right) - 1 \quad \text{et} \quad (2g-2)! \left(\frac{1}{g} - \frac{1}{2^{g-1}} \right).$$

Si g est congru à 0 ou 3 modulo 4 alors les nombres de permutations standards de respectivement $\mathcal{H}^{odd}(2g-2)$ et $\mathcal{H}^{even}(2g-2)$ sont :

$$(2g-2)! \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{2^{g-1}} \right) \quad \text{et} \quad (2g-2)! \left(\frac{1}{g} - \frac{1}{2^{g-1}} \right) - 1.$$

Pour la strate principale, nous obtenons :

Le nombre de permutations standards dans la classe de Rauzy associée à $\mathcal{H}(1^{2k})$ est :

$$\frac{(4k-1)!}{(2k+1)2^{2k-1}(2k-1)!}$$

Passons à la seconde étape du comptage des permutations dans les classes de Rauzy. Nous analysons l'opération qui consiste à enlever les « bouts » d'une permutation standard⁹. Précisément, à une permutation standard π de S_{d+2} on associe la permutation $\tilde{\pi}$ dans S_d définie par $\tilde{\pi}(i) = \pi(i+1) - 1$ pour $i = 1, \dots, d$. Cette opération donne une bijection combinatoire triviale entre

⁹Cette opération joue un rôle essentiel dans la classification des composantes connexes de strates [KZ03] et [Lan08].

les permutations standards de S_{d+2} et les permutations (pas nécessairement irréductibles) de S_d . Prenons l'exemple, du diagramme de Rauzy R associé à la strate $\mathcal{H}^{odd}(4)$ qui contient 7 permutations standards. En appliquant l'opération $\pi \mapsto \hat{\pi}$, six d'entre elles arrivent dans la strate $\mathcal{H}(2)$:

$$(4213), \quad (3142), \quad (2431), \quad (4132), \quad (3241), \quad (2413),$$

tandis que la dernière est réductible et correspond à la concaténation de deux permutations de $\mathcal{H}(0)$:

$$(2143) = (21) \cdot (21).$$

En introduisant des suspensions pour les permutations réductibles, nous parvenons à les classer en composantes connexes. Une technique d'inclusion-exclusion, similaire à celle utilisée pour compter les permutations irréductibles, permet d'obtenir une formule pour la cardinalité de chaque classe de Rauzy. Cette dernière ne fait intervenir que la combinatoire des partitions d'entiers et les nombres de permutations standards obtenus dans la première étape du comptage.

En outre, C. Boissy [Boib] démontre que l'étiquetage des permutations revient à faire un marquage des surfaces de translation en donnant un nom à chaque séparatrice sortante. Notons \mathcal{H}_g^{lab} ces espaces des modules des surfaces de translation marquées. Le degré du revêtement $\mathcal{H}_g^{lab}(m; \kappa') \rightarrow \mathcal{H}(m; \kappa')$ est égal, pour chaque composante connexe, au rapport entre le cardinal d'une classe de Rauzy étiquetée et réduite. Le théorème suivant de l'article [Boib] explicite ce degré :

Soit m un entier positif ou nul et $\kappa' = (\kappa_1, \dots, \kappa_s)$ une partition avec $2g - 2 = m + \sum \kappa_i$. On note $\kappa = (m) \uplus \kappa'$. Si la strate $\mathcal{H}(\kappa)$ contient une composante hyperelliptique alors le degré du revêtement $\mathcal{H}_g^{lab, hyp}(m; \kappa') \rightarrow \mathcal{H}^{hyp}(m; \kappa')$ est 1. Pour toute composante $\mathcal{C}(m; \kappa')$ de la strate $\mathcal{H}(m; \kappa')$ différente de la composante hyperelliptique, le degré du revêtement $\mathcal{C}^{lab} \rightarrow \mathcal{C}$ est $\varepsilon z_{\kappa'}$ où :

$$\varepsilon = \varepsilon(\kappa) = \begin{cases} 1/2 & \text{si un des } \kappa_i \text{ est pair} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Jointes à ceux de C. Boissy, nos résultats donnent des formules pour le cardinal de toutes les classes de Rauzy. À notre connaissance, il n'existe pas de telles formules pour les classes de Rauzy de différentielles quadratiques.

Comptage pour les composantes de strates pour $g \leq 5$

composante	perm. std.	card. cl. R.
g=1		
$\mathcal{H}(0)$	1	1
g=2		
$\mathcal{H}(2)$	1	7
$\mathcal{H}(1, 1)$	1	15
g=3		
$\mathcal{H}^{hyp}(4)$	1	31
$\mathcal{H}^{hyp}(2, 2)$	1	63
$\overline{\mathcal{H}}^{odd}(4)$	7	134
$\mathcal{H}(3, 1)$	24	770
$\mathcal{H}^{odd}(2, 2)$	11	294
$\mathcal{H}(2, 1, 1)$	49	2177
$\mathcal{H}(1^4)$	21	1255
g=4		
$\mathcal{H}^{hyp}(6)$	1	127
$\mathcal{H}^{hyp}(3, 3)$	1	255
$\overline{\mathcal{H}}^{odd}(6)$	135	5209
$\mathcal{H}^{even}(6)$	44	2327
$\mathcal{H}(5, 1)$	720	41574
$\mathcal{H}^{odd}(4, 2)$	472	23506
$\mathcal{H}^{even}(4, 2)$	136	10568
$\mathcal{H}^{nonhyp}(3, 3)$	275	15568
$\mathcal{H}(4, 1, 1)$	1728	128492
$\mathcal{H}(3, 2, 1)$	2952	217349
$\mathcal{H}^{odd}(2^3)$	372	23167
$\mathcal{H}^{even}(2^3)$	92	9876
$\mathcal{H}(3, 1^3)$	3240	301586
$\mathcal{H}(2, 2, 1, 1)$	4440	408533
$\mathcal{H}(2, 1^4)$	5445	617401
$\mathcal{H}(1^6)$	1485	202571

	g=5	
$\mathcal{H}^{hyp}(8)$	1	511
$\mathcal{H}^{hyp}(4, 4)$	1	1023
$\overline{\mathcal{H}}^{odd}(8)$	5291	352697
$\mathcal{H}^{even}(8)$	2772	233285
$\mathcal{H}(7, 1)$	40320	3697874
$\mathcal{H}^{odd}(6, 2)$	21240	1742192
$\mathcal{H}^{even}(6, 2)$	10440	1120946
$\mathcal{H}(5, 3)$	27360	2494234
$\mathcal{H}^{odd}(4, 4)$	8891	729495
$\mathcal{H}^{even}(4, 4)$	4356	469943
$\mathcal{H}(4, 3, 1)$	163152	18245942
$\mathcal{H}^{odd}(4, 2, 2)$	51348	5072573
$\mathcal{H}^{even}(4, 2, 2)$	23628	3174918
$\mathcal{H}(4, 2, 1, 1)$	598752	80343780
$\mathcal{H}(4, 1^4)$	442728	70584695
$\mathcal{H}(3, 3, 2)$	69300	7692855
$\mathcal{H}(3, 3, 1, 1)$	279180	37568302
$\mathcal{H}(3, 2, 2, 1)$	506880	67631764
$\mathcal{H}(3, 2, 1^3)$	1492920	237181716
$\mathcal{H}(3, 1^5)$	720720	134001474
$\mathcal{H}^{odd}(2^4)$	27060	3163511
$\mathcal{H}^{even}(2^4)$	11660	1924730
$\mathcal{H}(2^3, 1, 1)$	674960	106542326
$\mathcal{H}(2, 2, 1^4)$	1621620	300296573
$\mathcal{H}(2, 1^6)$	1126125	241202517
$\mathcal{H}(1^8)$	225225	55184875

FIGURE 2.8 – Nombre de permutations standards et nombre de permutations dans les classes de Rauzy étendues pour les strates en genre inférieur ou égal à 5.

Chapitre 3

Cocycle de Kontsevich-Zorich

Dans le chapitre précédent nous avons vu les actions du flot de Teichmüller et de l'induction de Rauzy-Veech sur les suspensions d'échanges d'intervalles. Ces deux opérations simultanées forment un processus de renormalisation que nous utilisons dans ce chapitre pour étudier des sommes de Birkhoff au-dessus des échanges d'intervalles. Les déviations de ces sommes de Birkhoff sont contrôlées par le comportement asymptotique du cocycle de Kontsevich-Zorich qui est le produit de matrices décrivant la suite de changement de bases effectuées lors de l'induction de Rauzy.

Cette partie est une étape essentielle de la preuve du théorème sur le taux de diffusion pour le vent dans les arbres.

3.1 Déviations des sommes de Birkhoff : un exemple

Nous étudions les sommes de Birkhoff au-dessus de l'échange d'intervalles introduit dans la section 2.1. Soit $T = T_{\pi, \lambda}$ l'échange d'intervalles avec $\pi = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix}$ et $\lambda = (\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D)$ le vecteur propre de Perron-Frobenius (à droite) de la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comme nous l'avons vu dans la section 2.1, la matrice M est la matrice du cocycle de Kontsevich-Zorich de (π, λ) au temps 4.3902. Remarquons tout d'abord que les valeurs propres de M sont symétriques : $\theta_1 \simeq 4.3902$, $\theta_2 \simeq 1.8379$, $1/\theta_2 \simeq 0.5441$ et $1/\theta_1 \simeq 0.2278$. En particulier, θ_1 et θ_2 sont strictement supérieures à 1 tandis que θ_3 et θ_4 sont strictement inférieurs à 1.

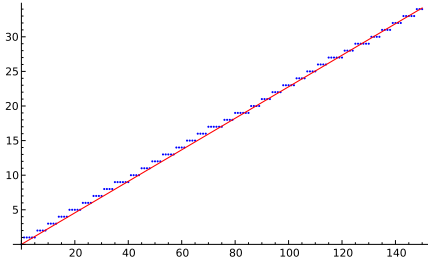
Soit χ_A la fonction caractéristique de l'intervalle portant l'étiquette A alors $S_N(T, f_A, x)$ compte combien de fois l'orbite de x jusqu'au temps N passe par l'intervalle I_A . Plus généralement, considérons une fonction $f = f_A \chi_A + f_B \chi_B + f_C \chi_C + f_D \chi_D$. Soit $S_N(T, x) = (N_A, N_B, N_C, N_D)$ le vecteur composé des nombres de fois que l'orbite de x jusqu'au temps N visite respectivement les intervalles I_A, I_B, I_C et I_D . La somme de Birkhoff $S_N(T, f, x)$ de f se réécrit comme un produit scalaire $S_N(T, f, x) = \langle f, S_N(T, x) \rangle$ où f est vu comme le vecteur (f_A, f_B, f_C, f_D) .

La moyenne de la fonction f est $\lambda(f) = \langle f, \lambda \rangle$, en particulier $\lambda(\chi_A) = \lambda_A$. Dans la section 1.5, nous avons évoqué que $S_N(T, f, x)$ est en première approximation, de la taille de $N\lambda(f)$ (voir la partie gauche de la figure 3.1a). Plus précisément,

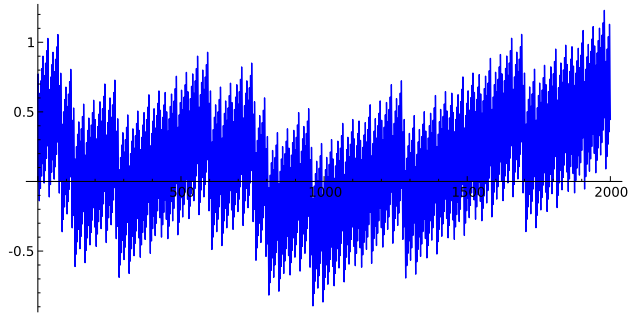
$$\frac{S_N(T, f, x)}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \lambda(f).$$

Nous nous intéressons alors à la différence $S_N(T, f, x) - N\lambda(f)$. Si on note $\mathbf{1} = (1, 1, 1, 1)$, cette différence se réécrit $\langle S_N(T, x), f - \lambda(f)\mathbf{1} \rangle$ (voir la partie droite de la figure 3.1b).

La différence $f - \lambda(f)\mathbf{1}$ est la projection du vecteur f sur l'espace des vecteurs de moyenne nulle (l'orthogonal de λ) parallèlement à la direction donnée par les fonctions constantes ($\mathbb{R}\mathbf{1}$). Notons $v_1 = \lambda$, v_2, v_3, v_4 les vecteurs propres à droites de la matrice M . Il existe une base de vecteurs propres à gauche $v_1^*, v_2^*, v_3^*, v_4^*$ normalisée pour que $\langle v_i^*, v_j \rangle = \delta_{ij}$ où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. L'espace $\text{Vect}(v_2^*, v_3^*, v_4^*)$ coïncide avec l'orthogonal de $v_1 = \lambda$ et correspond à l'ensemble des fonctions de moyennes nulles. En particulier, le vecteur $f - \lambda(f)\mathbf{1}$ est combinaison linéaire de v_2^*, v_3^* et v_4^* .



(a) Les valeurs de la somme de Birkhoff $S_N(T, \chi_A, x)$ (points en bleu) et la droite $y = \lambda_A x$ (en rouge) pour $N \leq 100$.



(b) La différence $S_N(T, \chi_A, x) - N\lambda_A$ pour $N \leq 5000$.

FIGURE 3.1 – Déviations des sommes de Birkhoff de la fonction χ_A (fonction indicatrice de l'intervalle A) au-dessus de l'échange d'intervalles de la figure 2.1.

Quitte à remplacer, f par $f - \lambda(f)$ on peut supposer qu'elle est de moyenne nulle, autrement dit que f appartient à $\text{Vect}(v_2^*, v_3^*, v_4^*)$. Nous utilisons maintenant la matrice M pour réécrire les sommes de Birkhoff de la fonction f . Soit x le point gauche du domaine de $T_{\pi, \lambda}$ et N la somme de la première colonne de M^n . La taille de N est approximativement θ_1^n ce qui nous permet de réécrire :

$$\begin{aligned} \frac{\log |\langle f, S_N(T, x) \rangle|}{\log N} &\simeq \frac{\log |\langle f, M^n e \mathbf{1} \rangle|}{n \log(\theta_1)} \\ &= \frac{\log |\langle (M^n)^* f, e \mathbf{1} \rangle|}{n \log(\theta_1)} \\ &\simeq \frac{\log \|(M^n)^* f\|}{n \log(\theta_1)} \end{aligned}$$

Nous ne justifions pas les deux erreurs d'approximations commises ci-dessus, mais nous insistons que nous les avons faite uniquement pour un point x et un entier N bien choisis. Cette dernière quantité est de l'ordre de $\log(\theta_i)/\log(\theta_1)$ où $i = 2, 3, 4$ suivant que $f \in \text{Vect}(v_2^*, v_3^*, v_4^*)$, $f \in \text{Vect}(v_3^*, v_4^*)$ ou bien $f \in \text{Vect}(v_4^*)$. On peut démontrer le résultat précis suivant :

Notons $\nu_2 = \log \theta_2 / \log \theta_1$ et $V_1 = \mathbb{R}^4$, $V_2 = \text{Vect}(v_2^*, v_3^*, v_4^*)$, $V_3 = \text{Vect}(v_3^*, v_4^*)$.
Alors :

- pour tout $f \in V_1 \setminus V_2$ et tout point x ;

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_N(f, T, x)}{N} = \lambda(f) \neq 0;$$

- pour $f \in V_2 \setminus V_3$ et tout point x ,

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\log |S_N(f, T, x)|}{\log N} = \nu_2;$$

- pour $f \in V_2$, il existe une constante C telle que :

$$\|S_N(f, T, x)\| \leq C$$

Ce théorème précise ainsi le théorème de Birkhoff qui correspond au premier item. L'objectif de la partie suivante est de présenter une généralisation de ce théorème.

3.2 Déviations des sommes de Birkhoff : le cas général

Nous voulons étudier les déviations des sommes de Birkhoff pour un échange d'intervalles dont l'induction de Rauzy n'est pas nécessairement périodique. Dans la partie 1.5, nous avons évoqué le théorème de Birkhoff qui décrit l'asymptotique d'une somme prise le long de l'orbite d'une transformation. Il existe une version de ce théorème pour les matrices : le théorème d'Oseledets [Ose68]. Ce dernier donne une description asymptotique d'un produit de matrices qui, dans le cas des matrices transposées $(M^{(t)}(\pi, \lambda))^*$ du cocycle de Kontsevich-Zorich, s'énonce :

Soit π une permutation étiquetée irréductible sur l'alphabet \mathcal{A} . Notons $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}(\kappa)$ la composante connexe de strate correspondant au digramme de Rauzy de π . Soit μ une mesure de probabilité sur \mathcal{C} , ergodique pour le flot de Teichmüller. Alors, il existe des réels $\nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_k > 0$ tels que : pour μ -presque toute donnée de longueur $\lambda \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}$ pour π , il existe un drapeau :

$$\mathbb{R}^{\mathcal{A}} = V_1^u(\lambda) \supset V_2^u(\lambda) \supset \dots \supset V_k^u(\lambda) \supset V^c(\lambda) \supset V_k^s(\lambda) \supset \dots \supset V_1^s(\lambda) \supset \{0\}$$

et une suite $(t_\ell)_{\ell \geq 0}$ de temps tendant vers l'infini¹ vérifiant :

1. pour tout $f \in V_i^u(\lambda) \setminus V_{i+1}^u(\lambda)$: $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{\log \left\| \left(M^{(t_\ell)}(\pi, \lambda) \right)^* f \right\|}{t_\ell} = \nu_i$;
2. pour tout $f \in V^c(\lambda) \setminus V_k^s(\lambda)$: $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{\log \left\| \left(M^{(t_\ell)}(\pi, \lambda) \right)^* f \right\|}{t_\ell} = 0$.
3. pour tout $f \in V_i^s(\lambda) \setminus V_{i-1}^s(\lambda)$: $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{\log \left\| \left(M^{(t_\ell)}(\pi, \lambda) \right)^* f \right\|}{t_\ell} = -\nu_i$;

¹Toute suite de temps telle que $g_{t_\ell} \cdot S$ reste dans un sous-ensemble compact de \mathcal{C} convient.

Les réels $\nu_i, -\nu_i$ pour $i = 1, \dots, k$ et éventuellement 0 si $V^c \neq \emptyset$ sont les *exposants de Lyapunov du cocycle de Kontsevich-Zorich*². Les dimensions m_i des espaces V_i^u et V_i^s ne dépendent pas de λ . Ce sont les *multiplicités* des exposants de Lyapunov. Ces exposants et leurs multiplicités généralisent la notion de valeurs propres d'une matrice. L'espace $V^u = \bigoplus V_i^u$ (resp. $V^s = \bigoplus V_i^s$ et V^c) s'appelle l'*espace instable* (resp. *espace stable* et *espace central*) du cocycle de Kontsevich-Zorich et généralisent les espaces propres. Il faut prendre garde que dans ce cadre, même si les exposants de Lyapunov ne dépendent pas de la valeur λ , les espaces V_i^u, V_i^s et V^c en dépendent.

Par définition du cocycle de Kontsevich-Zorich, $\nu_1 = 1$. D'autre part, W. Veech [Vee86] démontre que, pour toute composante connexe de strate munie de la mesure de Lebesgue, on a $\nu_1 > \nu_2$. Ce résultat sera étendu à toute mesure g_t -ergodique par G. Forni [For02, For11]. M. Kontsevich et A. Zorich ont conjecturé que, pour les mesures de Lebesgue sur les composantes connexes de strates, le spectre était toujours *simple* : les multiplicités vérifient $m_1 = m_2 = \dots = m_k = 1$ et $m = 0$. A. Avila et M. Viana [AV07b] démontrent cette conjecture et, contrairement à l'approche géométrique de G. Forni [For02, For11], leur preuve utilise la version discrète du cocycle de Kontsevich-Zorich donnée par l'induction de Rauzy. La preuve de ce théorème repose sur un critère de simplicité des exposants de Lyapunov des mêmes auteurs [AV07a] qui peut s'appliquer à d'autres cas. Par exemple, C. Matheus, M. Möller et J.-C. Yoccoz [MMY] développent un critère suffisant de simplicité du spectre de Lyapunov du cocycle de Kontsevich-Zorich des surfaces à petits carreaux. Ce critère nous a permis, dans un travail en collaboration avec C. Matheus [DM], de fournir un contreexemple à la réciproque du théorème 2 de l'article [For11] de G. Forni.

Le théorème d'Oseledets généralise dans un cadre dynamique la décomposition en valeur propre/vecteur propre d'une matrice. Nous énonçons maintenant comment ce théorème suffit à généraliser le résultat sur les déviations des sommes de Birkhoff dans le cas où l'induction de Rauzy n'est plus périodique. M. Kontsevich et A. Zorich [Kon97] ont conjecturé que le second exposant de Lyapunov était responsable des déviations des moyennes ergodiques. A. Zorich donne une démonstration complète pour les échanges d'intervalles et les surfaces de translation [Zor96, Zor97, Zor99] (les résultats sont génériques relativement à la mesure de Lebesgue). G. Forni complète les résultats de A. Zorich en faisant un lien avec des obstructions d'une équation cohomologique pour les distributions [For97, For02]. Dans [DHL], nous étendons le théorème de [Zor99] et une partie du théorème de [For02] afin de démontrer le résultat de diffusion pour le vent dans les arbres.

²La symétrie de ces exposants est due au fait que le cocycle de Kontsevich-Zorich est symplectique. Ceci entraîne également une orthogonalité au niveau des espaces V_i^u, V_i^s et V^c (voir la section 3.3).

Soit π une permutation irréductible sur l'alphabet \mathcal{A} et \mathcal{C} la composante connexe de strate associée au digramme de Rauzy de π . Soit μ une mesure de probabilité sur \mathcal{C} ergodique pour le flot de Teichmüller et $(\nu_i)_{i=1,\dots,k}$ les exposants de Lyapunov du cocycle de Kontsevich-Zorich pour cette mesure. Pour une donnée λ de longueurs Oseledets génériques, on note :

$$\mathbb{R}^{\mathcal{A}} = V_1^u(\lambda) \supset V_2^u(\lambda) \supset \dots \supset V_k^u(\lambda) \supset V^c(\lambda) \supset V_k^s(\lambda) \supset \dots \supset V_1^s(\lambda) \supset \{0\}$$

le drapeau d'Oseledets du cocycle de Kontsevich-Zorich et $T = T_{\pi,\lambda} : I \rightarrow I$ l'échange d'intervalles de données (π, λ) . Alors, pour tout point $x \in I$:

1. dans l'espace instable, la croissance des sommes de Birkhoff est polynomiale :

$$\text{pour } i = 1, \dots, k \text{ et } f \in V_i^u(\lambda) \setminus V_{i+1}^u(\lambda), \quad \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\log |\langle S_N(T, x), f \rangle|}{\log N} = \nu_i;$$

2. dans l'espace central, la croissance est sous-exponentielle :

$$\text{pour } f \in V^c(\lambda) \setminus V^s(\lambda), \quad \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\log |\langle S_N(T, x), f \rangle|}{\log N} = 0;$$

3. dans l'espace stable, la croissance est bornée. Il existe une constante C (dépendant de λ) telle que :

$$\text{pour } f \in V^s(\lambda) \setminus 0, \quad \forall T \geq 0, \quad |\langle S_N(T, x), f \rangle| \leq C.$$

Les exposants de Lyapunov donnent donc un moyen de contrôle sur les déviations des sommes de Birkhoff. Pour appliquer le théorème ci-dessus au vent dans les arbres, il reste deux points à aborder :

- localiser la position du cocycle du vent dans les arbres dans le drapeau d'Oseledets et faire le calcul de l'exposant de Lyapunov associé ;
- montrer que les surfaces $X(a, b)$ sont Oseledets génériques afin de pouvoir appliquer le théorème ci-dessus.

3.3 Un point de vue plus géométrique sur le cocycle de Kontsevich-Zorich

Nous avons introduit le cocycle de Kontsevich-Zorich en utilisant les échanges d'intervalles. Cette description permet d'écrire très explicitement le processus de renormalisation. Dans cette section, nous suggérons une approche plus géométrique en utilisant les groupes d'homologie et de cohomologie des surfaces de translation. Nous n'utilisons que des objets élémentaires de topologie algébrique et expliquons la symétrie des exposants de Lyapunov du cocycle de Kontsevich-Zorich.

Définissons les groupes d'homologie et de cohomologie³. Soit S une surface de translation de genre g dans la strate $\mathcal{H}(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_s)$. On note $\Sigma = \{P_1, P_2, \dots, P_s\} \subset S$ l'ensemble des singularités coniques de la surface S . Le premier groupe d'homologie $H_1(S; \mathbb{R})$ de S est un \mathbb{R} -espace vectoriel dont les éléments sont des sommes formelles de courbes fermées. Une courbe γ est nulle dans $H_1(S; \mathbb{R})$ si et seulement si elle borde un disque. L'espace $H_1(S \setminus \Sigma; \mathbb{R})$ est définie de la même

³Pour une référence concernant tous les concepts de géométrie algébrique, nous renvoyons à l'ouvrage [Hat02].

façon mais pour la surface S dont on a enlevé les singularités. Ce dernier est engendré par les courbes évitant les singularités de S .

Soit S une surface de translation genre g dont les singularités coniques sont $\Sigma = \{P_1, P_2, \dots, P_s\}$. Alors :

$$\dim H_1(S; \mathbb{R}) = 2g \quad \text{et} \quad \dim H_1(S \setminus \Sigma; \mathbb{R}) = 2g + s - 1.$$

La surjection naturelle $H_1(S \setminus \Sigma; \mathbb{R}) \rightarrow H_1(S; \mathbb{R})$ a pour noyau E_0 l'espace vectoriel de dimension $s - 1$ engendré par les s petits cercles autour des singularités.

Soit $S = S(\pi, \zeta)$ une suspension d'une permutation irréductible $\pi = (\pi_t, \pi_b)$ sur l'alphabet \mathcal{A} (voir la section 2.1). Une base naturelle de $H_1(S \setminus \Sigma; \mathbb{R})$ est donnée par les courbes e_α joignant le côté ζ_α sur L_b au vecteur ζ_α sur L_t où, comme dans la section 2.1, L_b et L_t sont les lignes brisées obtenues en concaténant les vecteurs ζ_α (voir la figure 3.2). Du point de vue des rectangles cousus, la courbe e_α traverse une fois le rectangle α et ne passe pas dans les autres. Par construction, ces vecteurs joignent deux singularités coniques de la surface S . L'espace vectoriel $H_1(S \setminus \Sigma; \mathbb{R})$ s'identifie donc de manière naturel avec $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ et c'est sur ce dernier que nous avons fait agir les matrices $M^{(t)} = M_1 M_2 \dots M_n$ du cocycle de Kontsevich-Zorich. Mais il faut noter qu'en écrivant $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ pour une suspension, nous faisons le choix d'une base privilégiée de $H_1(S \setminus \Sigma; \mathbb{R})$.

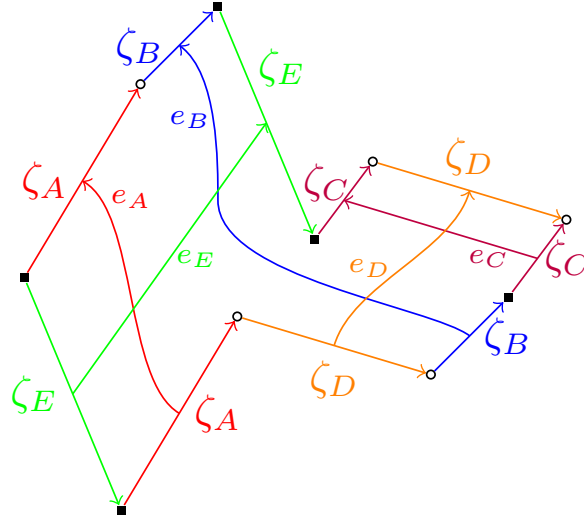


FIGURE 3.2 – Suspension de la permutation $\pi = \begin{pmatrix} A B E C D \\ E A D B C \end{pmatrix}$ dans la strate $\mathcal{H}(1, 1)$. Les deux singularités coniques d'angle 3π sont représentées par un carré plein et un cercle creux. Les courbes joignant les côtés $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ forment une base de $H_1(S \setminus \Sigma; \mathbb{R})$ et les côtés $\{\zeta_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ forment sa base duale dans $H_1(S, \Sigma; \mathbb{R})$.

Dans la section précédente, nous avons vu que, pour les déviations des sommes de Birkhoff, le rôle principal était joué par la transposée des matrices $M^{(t)} = M_1 M_2 \dots M_n$ définie par l'induction de Rauzy. Ces dernières agissent sur le dual de $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$. D'un point de vue géométrique, il s'agit du *groupe de cohomologie* $H^1(S \setminus \Sigma; \mathbb{R}) = H_1(S \setminus \Sigma; \mathbb{R})^*$. Cette dualité peut se voir plus directement sur la surface. Le premier groupe d'homologie relative $H_1(S, \Sigma; \mathbb{R})$ est le \mathbb{R} -espace vectoriel engendré par les courbes fermées et les courbes dont les deux bouts sont dans Σ . On a une inclusion $H_1(S; \mathbb{R}) \rightarrow H_1(S, \Sigma; \mathbb{R})$ car tout cycle est en particulier un cycle relatif. Si $S = S(\pi, \zeta)$ est une suspension, une base naturelle de $H_1(S, \Sigma; \mathbb{R})$ est donné par les vecteurs ζ_α qui forment les côtés L_t et L_b . Les courbes e_α et ζ_α

vérifient la propriété particulière que e_α intersecte ζ_α exactement une fois et n'intersecte pas ζ_β pour $\beta \neq \alpha$. C'est l'intersection qui permet de définir cette dualité.

La forme d'intersection Ω_S d'une surface S est l'application bilinéaire antisymétrique définie de la manière suivante. L'intersection de deux courbes $\Omega_S(\gamma_1, \gamma_2)$ est le nombre d'intersection, compté avec multiplicités, de γ_1 avec γ_2 . En étendant par linéarité, Ω_S définit une forme bilinéaire antisymétrique sur $H_1(S; \mathbb{R})$. Comme il existe un morphisme surjectif $H_1(S \setminus \Sigma; \mathbb{R}) \rightarrow H_1(S; \mathbb{R})$ la forme d'intersection est également définie sur $H_1(S \setminus \mathbb{R})$ et plus généralement sur $H_1(S \setminus \Sigma; \mathbb{R}) \times H_1(S, \Sigma; \mathbb{R})$.

La forme Ω_S est bien définie et non dégénérée sur $H_1(S; \mathbb{R}) \times H_1(S; \mathbb{R})$ et $H_1(S \setminus \Sigma; \mathbb{R}) \times H_1(S, \Sigma; \mathbb{R})$. Sur $H_1(S \setminus \Sigma; \mathbb{R}) \times H_1(S \setminus \Sigma; \mathbb{R})$ elle est de rang $2g$ et son noyau est E_0 .

Le résultat ci-dessus montre qu'il existe un isomorphisme canonique $H^1(S \setminus \Sigma; \mathbb{R}) \simeq H_1(S, \Sigma; \mathbb{R})$. Dans le cas d'une suspension, les vecteurs e_α et ζ_α sont duaux pour la forme d'intersection.

Pour une suspension $S = S(\pi, \zeta)$ la forme d'intersection sur les vecteurs e_α se calcule simplement à partir de π :

$$\Omega_{\alpha, \beta} = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi_t(\alpha) < \pi_t(\beta) \text{ et } \pi_b(\alpha) > \pi_b(\beta), \\ -1 & \text{si } \pi_t(\alpha) > \pi_t(\beta) \text{ et } \pi_b(\alpha) < \pi_b(\beta), \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La matrice Ω_π enregistre les croisements de la permutation π . Par exemple, pour la permutation $\pi = \begin{pmatrix} A B E C D \\ E A D B C \end{pmatrix}$ de la figure 3.2 cette matrice est :

$$\Omega_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $e_A - e_B + e_C \in H_1(S \setminus \Sigma; \mathbb{R})$ engendre le noyau de Ω_π et correspond à une courbe qui fait le tour d'un des zéros de la suspension de la figure 3.2.

La transposée $(M^{(t)})^*$ du cocycle de Kontsevich-Zorich agissant sur $H_1(S, \Sigma; \mathbb{R}) \simeq \langle \{\zeta_\alpha\} \rangle$ préserve la forme d'intersection Ω_S ainsi que la décomposition $E_0 \oplus H^1(S; \mathbb{R})$. On peut également montrer que sur la partie E_0 , elle agit de manière bornée et qu'en particulier les exposants de Lyapunov associés sont nuls. Ces deux remarques impliquent la forme particulière des exposants de Lyapunov :

Soit π une permutation irréductible et s le nombre de singularités coniques d'une suspension de π . Soit \mathcal{C} la composante de strates de π et μ une mesure ergodique sur \mathcal{C} . Parmi les exposants du cocycle de Kontsevich-Zorich pour la mesure μ , il y a au moins $s - 1$ zéros qui correspondent à l'action de $(M^{(t)})^$ sur la partie relative de la cohomologie E_0 . Sur la partie absolue, $H^1(S; \mathbb{R})$, le cocycle est symplectique (il préserve la forme d'intersection non dégénérée Ω_S) et les $2g$ exposants sont regroupés par couples de réels opposés $(\nu_i, -\nu_i)$.*

Dans toute la suite on notera souvent $1 = \nu_1 > \nu_2 \geq \nu_3 \geq \dots \geq \nu_g \geq 0$ les exposants positifs du cocycle de Kontsevich-Zorich.

Chapitre 4

Action de $SL(2, \mathbb{R})$ sur les strates de surfaces de translation

Dans le chapitre précédent nous avons étudié l'action du flot de Teichmüller sur les strates $\mathcal{H}(\kappa)$ de surfaces de translation. Ce flot s'identifie à une action linéaire du sous-groupe à un paramètre $g_t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ et permet d'étudier les phénomènes asymptotiques du flot linéaire des surfaces de translation. Dans ce chapitre, nous considérons l'extension de cette action à $SL(2, \mathbb{R})$. Les propriétés dynamiques de cette dernière sont beaucoup plus rigides. Par exemple, dans le cas de la strate $\mathcal{H}(2)$, il est impossible de donner une classification raisonnable des mesures ergodiques pour le flot de Teichmüller alors qu'il existe une classification simple des mesures $SL(2, \mathbb{R})$ -invariantes. C'est en utilisant cette classification ainsi que des éléments de géométrie algébrique que nous parvenons à calculer la valeur explicite $2/3$ de l'exposant de Lyapunov du cocycle de Kontsevich-Zorich qui contrôle la diffusion du vent dans les arbres.

4.1 Action de $SL(2, \mathbb{R})$ sur une surface de translation

Nous pouvons étendre le flot de Teichmüller à une action de $SL(2, \mathbb{R})$: une matrice de $SL(2, \mathbb{R})$ agit linéairement sur les coordonnées des polygones définissant une surface de translation. Considérons les deux sous-groupes à un paramètre suivants :

$$r_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad u_s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'action de r_θ consiste à faire tourner les surfaces de translation. Autrement dit, pour une surface de translation S , le flot linéaire de $r_\theta \cdot S$ est le flot linéaire de S dans la direction $-\theta$. L'action des matrices u_s s'appelle le *flot unipotent* (voir la figure 4.1). Nous notons $A = \{g_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ le sous-groupe diagonal, $K = \{r_\theta\}_{\theta \in S^1}$ l'ensemble des matrices de rotation et $N = \{u_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ l'ensemble des matrices unipotentes. Ces trois sous-groupes décomposent $SL(2, \mathbb{R})$: la *décomposition d'Iwasawa* de $SL(2, \mathbb{R})$ est la décomposition unique de chaque matrice de $SL(2, \mathbb{R})$ en un produit $k a n$ avec $k \in K$, $a \in A$ et $n \in N$. Notons que, mis à part le flot de Teichmüller, les rotations ne jouent pas un grand rôle (K est un groupe compact) et la dynamique du flot unipotent reste relativement inconnue.

Tout comme le flot de Teichmüller, l'action de $SL(2, \mathbb{R})$ préserve l'aire des surfaces et les degrés des singularités. En particulier, il agit sur les strates. Comme $SL(2, \mathbb{R})$ est connexe, il préserve également les composantes connexes de strates. Les échanges d'intervalles, fort utile pour comprendre la dynamique du flot de Teichmüller, ne sont d'aucun secours pour comprendre l'action de $SL(2, \mathbb{R})$.

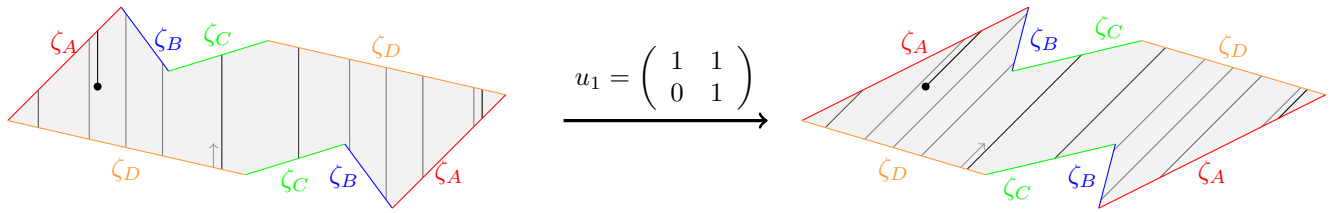


FIGURE 4.1 – Action du flot unipotent sur une surface de translation. La surface de gauche est la même que dans la figure 2.1 page 12.

Nous pouvons voir sur la figure 4.1 que l'image de la suspension par la matrice u_1 n'est plus une suspension.

Revenons à la surface $X(a, b)$ construite pour étudier le vent dans les arbres (voir la partie 1.3). Nous cherchons des propriétés génériques des flots linéaires de $X(a, b)$ relativement à la direction du flot ; autrement dit, aux flots linéaires verticaux de la famille de surfaces $X(a, b, \theta) = r_{-\theta} \cdot X(a, b)$. Comme les propriétés de déviations des sommes de Birkhoff sont invariantes par le flot de Teichmüller, nous nous intéressons aux mesures K et A -invariantes sur les composantes de strates. Comme K et A engendrent $SL(2, \mathbb{R})$, elles sont $SL(2, \mathbb{R})$ -invariantes. De plus, le théorème de Howe-Moore assure :

Toute mesure de probabilité $SL(2, \mathbb{R})$ -invariante, ergodique sur une composante connexe de strate est également A -ergodique.

Ainsi, pour une mesure $SL(2, \mathbb{R})$ -ergodique, il est possible d'utiliser le théorème d'Oseledets et appliquer les résultats sur les déviations des sommes de Birkhoff.

4.2 Adhérence des $SL(2, \mathbb{R})$ -orbites des surfaces $X(a, b)$

Les propriétés génériques des flots linéaires d'une surface de translation peuvent s'étudier au moyen de l'action de $SL(2, \mathbb{R})$ sur les composantes de strates. Pour utiliser efficacement les théorèmes de théorie ergodique pour cette action, il faut commencer par classifier les mesures $SL(2, \mathbb{R})$ -ergodiques. Dans cette section, nous expliquons cette classification pour les adhérences des orbites des surfaces $X(a, b)$.

Dans la section 1.4, nous avons vu que la surface $X(a, b)$ était un revêtement de degré 4 de la surface $L(a, b)$ (voir figure 1.8 page 7). Le groupe de revêtement $\text{Deck}(X(a, b)/L(a, b))$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On note h (resp. v), l'élément de $\text{Deck}(X(a, b)/L(a, b))$ qui échange les copies 00 avec 10 et 01 avec 11 (resp. les copies 00 avec 01 et 10 avec 11). L'action de $SL(2, \mathbb{R})$ commute avec le passage au quotient $X(a, b, \theta) \rightarrow L(a, b, \theta)$ et donc, les $SL(2, \mathbb{R})$ -orbites des surfaces $X(a, b)$ dans $\mathcal{H}(2, 2, 2, 2)$ sont en correspondance avec les $SL(2, \mathbb{R})$ -orbites des surfaces $L(a, b)$ dans $\mathcal{H}(2)$. Nous avons déjà vu une mesure ergodique sur $\mathcal{H}(2)$: la mesure de Lebesgue (voir la note de bas de page 2 page 17), mais il existe d'autres mesures. Une *surface de Veech* [Vee89] est une surface de translation S telle que son stabilisateur pour l'action de $SL(2, \mathbb{R})$ est un réseau. Plus simplement, c'est une surface qui admet beaucoup de symétries¹. Le point important pour notre étude est le fait que la $SL(2, \mathbb{R})$ -orbite d'une surface de Veech est fermée dans sa strate et supporte une unique mesure de probabilité $SL(2, \mathbb{R})$ -invariante.

La condition « être une surface de Veech » est très restrictive. Dans toute strate de genre $g \geq 2$, il y a une quantité non dénombrable de $SL(2, \mathbb{R})$ -orbites et seulement une quantité dénombrable d'entre

¹Les surfaces de Veech ont été introduites pour leur propriété de dynamique optimale : une surface de translation S a une *dynamique optimale* si pour toute direction $\theta \in S^1$, le flot linéaire dans la direction θ est soit uniquement ergodique, soit complètement périodique.

elles sont des $SL(2, \mathbb{R})$ -orbites d'une surface de Veech. K. Calta [Cal04] et C. McMullen [McM03, McM05] ont classifié les $SL(2, \mathbb{R})$ -orbites des surfaces de Veech dans la strate $\mathcal{H}(2)$:

La surface $L(a, b)$ est une surface de Veech si et seulement si elle vérifie une des deux conditions suivantes :

1. *a et b sont rationnels, auquel cas $L(a, b)$ est revêtement d'un tore ;*
2. *il existe x et y deux nombres rationnels et D un entier positif sans facteur carré tel que :*

$$\frac{1}{1-a} = x + y\sqrt{D} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-b} = (1-x) + y\sqrt{D}.$$

De plus, chaque $SL(2, \mathbb{R})$ -orbite d'une surface de Veech de $\mathcal{H}(2)$ contient une surface de la forme $L(a, b)$.

C. McMullen [McM07] démontre que s'arrête là la liste des mesures invariantes. Plus précisément :

Les seuls fermés $SL(2, \mathbb{R})$ -invariants irréductibles de la strate $\mathcal{H}(2)$ sont la strate elle-même et les $SL(2, \mathbb{R})$ -orbites des surfaces de Veech.

Les seules mesures de probabilité $SL(2, \mathbb{R})$ -invariante ergodique de la strate $\mathcal{H}(2)$ sont la mesure de Lebesgue sur la strate et les mesures naturelles supportées sur les $SL(2, \mathbb{R})$ -orbites des surfaces de Veech.

Une classification des fermés et mesures invariants existe également dans l'autre strate de genre 2 : $\mathcal{H}(1, 1)$; mais, en genre $g \geq 3$, peu de choses sont connues.

Comme l'application $X(a, b) \mapsto L(a, b)$ s'étend en une application d'image $\mathcal{H}(2)$, le résultat ci-dessus donne une dichotomie précise pour les adhérences des orbites des surfaces $X(a, b)$:

Soit a et b deux paramètres entre 0 et 1. Si $X(a, b)$ est une surface de Veech alors sa $SL(2, \mathbb{R})$ -orbite est fermée dans la strate $\mathcal{H}(2, 2, 2, 2)$ sinon, sa $SL(2, \mathbb{R})$ orbite est isomorphe à $\mathcal{H}(2)$. Dans les deux cas, l'adhérence supporte une unique mesure $SL(2, \mathbb{R})$ -invariante.

4.3 Sommes des exposants de Lyapunov

Nous avons vu dans la section 3.2 que les exposants de Lyapunov du cocycle de Kontsevich-Zorich contrôlaient les déviations des sommes de Birkhoff. En particulier, un exposant de Lyapunov est responsable de la diffusion du vent dans les arbres. Dans cette section, suivant le travail en cours d'A. Eskin, M. Kontsevich et A. Zorich [EKZ], nous évoquons comment le calcul de ces exposants est possible. Notre objectif est de formuler un théorème qui explique la valeur $2/3$ obtenue pour le taux de diffusion du vent dans les arbres.

Soit $T : X \rightarrow X$ un système dynamique et μ une mesure ergodique. Rappelons que la limite des moyennes de Birkhoff d'une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ s'exprime en terme d'intégrale de la fonction f par rapport à la mesure μ . Dans le cas des exposants de Lyapunov d'un cocycle $A : X \rightarrow GL(d, \mathbb{R})$, il existe une formule similaire : la *formule de Furstenberg* ([BL85] théorème 3.6 ou [Fur02]). Mais cette dernière fait intervenir une mesure stationnaire sur l'espace projectif qui n'est pas directement accessible à partir des données T , μ et A . Il existe cependant des algorithmes d'approximation numérique généralisant les méthodes d'approximation de valeurs propres d'une matrice. Dans les années 1990, M. Kontsevich et A. Zorich, à l'aide de programmes informatiques

simulant l'induction de Rauzy, ont constaté des phénomènes de rationalité pour les sommes des exposants de Lyapunov positifs du cocycle de Kontsevich-Zorich. Une explication de ces phénomènes fut donnée par M. Kontsevich [Kon97] et développée dans les travaux de G. Forni [For02, For11] et d'A. Eskin, M. Kontsevich et A. Zorich [EKZ]. Ces auteurs démontrent que, pour la plupart des mesures $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ -ergodiques sur une strate de surfaces de translation, il existe une formule pour la somme $\nu_1 + \dots + \nu_g$ des exposants de Lyapunov positifs du cocycle de Kontsevich-Zorich. Cette formule repose sur beaucoup de travaux antérieurs : la classification des composantes connexes de strates ([KZ03], voir la section 2.2), le calcul des volumes de ces composantes ([EO01] et [EOP08]), la description du « bord principal » des composantes des strates et les valeurs des constantes de Siegel-Veech ([EMZ03] et [MZ08]), etc.

Les surfaces $X(a, b)$ ont la particularité d'être hyperelliptiques : elle possède une symétrie d'ordre 2 qui agit comme $-Id$ sur la structure de translation et dont le quotient est une sphère. Cette symétrie s'appelle la *symétrie hyperelliptique*. Cette propriété est invariante par $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ et fermée. Ainsi, les adhérences des $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ -orbites des surfaces $X(a, b)$ ne contiennent que des surfaces hyperelliptiques. Pour de tels ensembles, les sommes des exposants ne dépendent pas de la mesure $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ -ergodique considérée². Ce phénomène, conjecturé dans [Kon97], a été prouvé pour le genre 2 par M. Bainbridge [Bai07, Bai10] et dans le cas général dans [EKZ] :

Soit μ une mesure $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ -ergodique sur une strate $\mathcal{H}_g(\kappa)$ provenant du revêtement d'orientation d'une mesure régulière $\bar{\mu}$ sur une strate de différentielles quadratiques³ sur la sphère $\mathcal{Q}(d_1, d_2, \dots, d_n)$. Alors, la somme des exposants de Lyapunov positifs $\nu_1 \geq \dots \geq \nu_g$ pour la mesure μ est donnée par :

$$\nu_1 + \dots + \nu_g = \frac{1}{4} \sum_{\substack{j \text{ tel que} \\ d_j \text{ impair}}} \frac{1}{d_j + 2}.$$

En particulier elle ne dépend que des degrés des zéros et des pôles de la strate quadratique $\mathcal{Q}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ et pas de la mesure $\bar{\mu}$.

Dans la section 4.2, nous avons vu que les surfaces $X(a, b)$ construites pour décrire la dynamique du vent dans les arbres ont une symétrie de groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dont le quotient est $L(a, b)$. Chaque quotient intermédiaire entre $L(a, b)$ et $X(a, b)$ est une surface hyperelliptique pour lequel la somme des exposants de Lyapunov positifs est donnée par le théorème ci-dessus. Il est possible de calculer les valeurs des exposants individuels de $X(a, b)$ à partir de ces informations sur les sommes partielles. Plus précisément, dans l'article [DHL], nous démontrons :

²Signalons qu'au-delà des lieux hyperelliptiques, D. Chen et M. Möller [CM] ont démontré la constance des sommes des exposants de Lyapunov pour les mesures supportées sur les $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ -orbites de surfaces de Veech dans certaines strates de genre $g \leq 5$.

³Une différentielle quadratique est une généralisation de surface de translation pour laquelle on autorise les inversions dans le recollement des côtés des polygones. Dans ce cas, les singularités coniques sont des multiples de π (et non plus 2π). La notation $\mathcal{Q}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ dénote la strate de différentielles quadratiques constituée des surfaces dont les singularités coniques ont pour angles $(d_1 + 1)\pi, (d_2 + 1)\pi, \dots, (d_n + 1)\pi$. Le genre g de la surface est alors donné par la formule : $4g - 4 = d_1 + d_2 + \dots + d_n$ (comparer avec la section 2.2).

Soit μ une mesure $SL(2, \mathbb{R})$ -ergodique sur $\mathcal{H}_5(2, 2, 2, 2)$ provenant d'une mesure sur $\mathcal{H}(2)$ via le revêtement (topologique) $X(a, b) \rightarrow L(a, b)$. Alors, le cocycle de Kontsevich-Zorich admet quatre sous-espaces invariants donnant la décomposition :

$$H^1(S; \mathbb{R}) = V^{++} \oplus V^{+-} \oplus V^{-+} \oplus V^{--}.$$

Dans cette décomposition, V^{+-} désigne l'ensemble des vecteurs h -invariants et v -anti-invariants et les autres composantes sont définies de la même façon. La dimension de V^{++} est 4 et celle des trois autres sous-espaces est 2. Le drapeau d'Oseledets du cocycle de Kontsevich-Zorich préserve cette décomposition et les exposants de Lyapunov positifs associés sont 1, $1/3$ pour V^{++} , $2/3$ pour V^{+-} et V^{-+} et $1/3$ pour V^{--} .

Le cocycle $f \in H^1(X(a, b); \mathbb{Z}^2)$ définissant la dynamique du vent dans les arbres est la somme d'une composante horizontale f_h et d'une composante verticale f_v . La composante horizontale est dans l'espace V^{-+} et la verticale dans l'espace V^{+-} . Ainsi, c'est bien l'exposant $2/3$ qui contrôle les sommes de Birkhoff.

4.4 Transversalité des surfaces $X(a, b)$ au flot de Teichmüller

Il est possible de calculer les valeurs des exposants du cocycle de Kontsevich-Zorich pour toute mesure $SL(2, \mathbb{R})$ -invariante supportée sur l'adhérence d'une orbite d'une surface $X(a, b)$. En effet, il se diagonalise par blocs et le cocycle f contrôlant la diffusion du vent dans les arbres est contenu dans un bloc de taille 2×2 dont l'exposant positif correspondant est $2/3$. Pour conclure que les sommes de Birkhoff sont contrôlées par cet exposant, il reste à montrer que les surfaces $X(a, b)$ sont Oseledets génériques.

Ce problème de genericité intervient fréquemment dans l'étude des billards : lorsqu'on utilise un théorème de théorie ergodique, on obtient un résultat générique et rien ne nous permet d'assurer qu'une orbite particulière est effectivement générique. Dans le cas du vent dans les arbres, nous utilisons le fait que l'ensemble des surfaces $X(a, b, \theta)$ vérifie une propriété de transversalité par rapport au flot de Teichmüller.

D'une part, être Oseledets générique, est une propriété invariante par le flot de Teichmüller. D'autre part, le drapeau d'Oseledets du cocycle de Kontsevich-Zorich vérifie la propriété de ne dépendre que des coordonnées horizontales. Du point de vue des suspensions d'échanges d'intervalles (voir la section 2.1), cela se traduit par le fait que ce drapeau ne dépend que de la coordonnée λ et pas de la coordonnée τ des données de suspension $\zeta = \lambda + i\tau$ (voir la section 3.2). Il suffit maintenant de montrer que la « partie horizontale » des surfaces $X(a, b, \theta)$ contient toutes les longueurs possibles d'échanges d'intervalles. Pour cela, revenons aux formules donnant les longueurs transverses de l'échange d'intervalles obtenues dans la section 1.4. De ces formules, on déduit facilement qu'à toute donnée (a, b, θ) on associe, à multiplication près par un scalaire, un unique quadruplet de longueurs $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$. Et réciproquement. Autrement dit, à chaque donnée de longueurs d'échange d'intervalles λ , on associe une surface $X(a, b, \theta)$.

Nous énonçons de manière plus précise le théorème principal de [DHL] dont nous avons retracé les principaux arguments de la démonstration :

Les paramètres a et b désignent des réels entre 0 et 1. On note $\phi_T^\theta(x)$ le flot du billard $V(a, b)$.

Si $X(a, b)$ est une surface de Veech, alors, pour un angle θ générique :

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\log d(x, \phi_T^\theta(x))}{\log T} = \frac{2}{3}.$$

Pour des paramètres a et b génériques, pour un angle θ générique :

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\log d(x, \phi_T^\theta(x))}{\log T} = \frac{2}{3}.$$

Les deux cas ci-dessus correspondent aux deux familles de mesure sur la strate $\mathcal{H}(2)$ construites dans la section 4.2. Nous appliquons ensuite le théorème de Fubini pour passer d'un résultat générique sur $\mathcal{H}(2)$ au cas particulier des surfaces $X(a, b)$. Comme la dimension de l'adhérence est plus petite dans le cas des surfaces de Veech (dimension 3) que dans le cas de la mesure de Lebesgue sur la strate (dimension 7), le résultat est plus précis pour les paramètres a et b correspondants.

Conclusion

Le vent dans les arbres est un cas particulier de surface de translation infinie. Nous replaçons nos résultats dans ce contexte et ouvrons notre travail sur quelques questions. Signalons qu'au-delà des billards infinis périodiques, l'introduction des surfaces de translation infinies est motivée par l'étude des billards irrationnels (voir les articles de F. Valdez [Val09, Val]).

Récurrence des surfaces de translation infinies périodiques

Une surface de translation *infinie périodique* est un revêtement infini d'une surface de translation (finie). Soit S une surface de translation compacte et $\Sigma \subset S$ un ensemble discret. Les revêtements de S ramifiés seulement au-dessus de Σ sont en bijection avec les sous-groupes du groupe fondamental $\pi_1(S \setminus \Sigma)$. Dans le cas où le revêtement est normal et abélien de groupe A , il existe un élément $f \in H^1(S \setminus \Sigma; A) \simeq H_1(S, \Sigma; A)$ tel que ce sous-groupe est donné par le noyau de la composition

$$\pi_1(S \setminus \Sigma) \rightarrow H_1(S \setminus \Sigma; \mathbb{Z}) \xrightarrow{f} A.$$

On parle alors de A -revêtement de S . Par exemple, le vent dans les arbres est un \mathbb{Z}^2 -revêtement de la surface $X(a, b)$ (voir la section 1.3).

Il existe une distance naturelle dans une surface de translation infinie induite par la métrique plate. Cependant, cette métrique présente le défaut d'autoriser « des bonds » au niveau des singularités coniques. L'escalier infini de [HHW] est un exemple de \mathbb{Z} -revêtement de diamètre borné! Une notion plus maniable que la distance plate est une métrique sur le groupe de revêtement. Pour les \mathbb{Z}^d -revêtements, nous utilisons la norme euclidienne sur \mathbb{Z}^d . Dans certains cas, comme celui du vent dans les arbres, ces deux notions coïncident¹.

Dans le cas $A = \mathbb{Z}$, la propriété de récurrence découle d'un résultat de K. Schmidt [Sch77] et J.-P. Conze [Con09]. P. Hooper et B. Weiss [HW] démontrent :

Soit S une surface de translation compacte et \tilde{S} un \mathbb{Z} -revêtement de S déterminée par $f \in H_1(S, \Sigma; \mathbb{Z})$. On note ϕ_t^θ (resp. $\tilde{\phi}_t^\theta$) le flot linéaire de $r_{-\theta}S$ (resp. $r_{-\theta}\tilde{S}$). Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *le revêtement est sans biais (autrement dit, f est de moyenne nulle pour ω) ;*
2. *pour presque tout θ le flot linéaire $\tilde{\phi}_t^\theta$ est récurrent ;*
3. *pour tout θ tel que ϕ_t^θ est ergodique, $\tilde{\phi}_t^\theta$ est récurrent.*

Comme nous l'avons remarqué dans la section 1.5, dans le cas général des \mathbb{Z}^d -revêtements abéliens, la condition de moyenne nulle sur le cocycle est nécessaire mais plus suffisante. Une surface infinie

¹Plus généralement, ces deux notions coïncident si et seulement si il existe une borne sur l'ordre des ramifications au-dessus des points de Σ . C'est en particulier le cas si le revêtement n'est pas ramifié.

\tilde{S} est dite *récurrente* (resp. *divergente*) si, pour presque toute direction θ , le flot linéaire dans la direction θ de \tilde{S} est récurrent (resp. divergent). N. Chevallier et J.-P. Conze [CC09] montrent que si l'exposant polynomial de diffusion des sommes de Birkhoff est inférieur à $1/d$, le flot est nécessairement récurrent. Ainsi, en utilisant notre résultat sur les déviations [DHL] nous obtenons :

Soit S une surface de Veech et Σ un sous-ensemble fini de l'ensemble de ses points périodiques. Soit $f \in H_1(S, \Sigma; \mathbb{Z}^d)$ un cycle relatif et \tilde{S} le \mathbb{Z}^d -revêtement infini associé. On suppose que l'action du cocycle de Kontsevich-Zorich sur $H^1(S; \mathbb{R})$ préserve un sous-espace E dans presque toute direction θ et que $f \in E$. Si les exposants de Lyapunov du cocycle de Kontsevich-Zorich restreint à E sont tous strictement inférieurs à $1/d$ alors \tilde{S} est une surface infinie récurrente.

En utilisant des revêtements cycliques de la sphère ([EKZ11] et [FMZ11]) il est possible de donner des exemples de surfaces \mathbb{Z}^d -périodiques récurrentes avec d arbitrairement grand. Dans la suite de cette section, on entend par revêtement infini d'une surface de Veech un revêtement ramifié seulement au-dessus de points périodiques comme dans l'énoncé ci-dessus.

Pour le vent dans les arbres, malgré un exposant polynomial de diffusion égal à $2/3$, la surface infinie est récurrente pour certains paramètres a et b (voir section 1.5). Vu la spécificité de la preuve dans ce cadre, nous nous demandons dans quelle mesure ce résultat s'étend à d'autres revêtements \mathbb{Z}^2 -périodique. En particulier :

Question: *Etant donné $\nu < 1$, peut-on trouver un \mathbb{Z}^2 -revêtement sans biais \tilde{S} d'une surface de Veech vérifiant les deux conditions suivantes :*

- *le taux polynomial de diffusion dans \tilde{S} est supérieur à ν ;*
- *\tilde{S} est récurrent ?*

Bien que, pour une direction générique, le flot linéaire du vent dans les arbres soit récurrent, nous avons démontré l'existence de directions bien spécifiques pour lesquelles le flot du billard est divergent. Cependant, existe-t-il des situations pour lesquelles la récurrence n'est pas générique ?

Question: *Existe-t-il un \mathbb{Z}^2 -revêtement sans biais d'une surface de Veech qui soit non récurrent ? divergent ?*

Problème de généricité pour le taux de diffusion

Nous aurions aimé supprimer l'hypothèse de généricité des paramètres a et b de notre théorème sur le taux de diffusion du vent dans les arbres. Cette généricité est imposée par l'utilisation du théorème d'Oseledets pour le cocycle de Kontsevich-Zorich. J. Athreya et G. Forni [AF08], en utilisant d'une part la géométrie du flot de Teichmüller et d'autre part des estimations sur la norme de Hodge², démontrent que les déviations de moyennes ergodiques sont toujours polynomiales :

Soit $g > 1$ un entier. Il existe une constante $\alpha < 1$ telle que pour toute surface de translation S de genre g , pour tout cocycle f de $H^1(S; \mathbb{Z})$, pour un angle θ générique, le taux de diffusion de f pour le flot linéaire dans la direction θ sur S est au plus α . Plus précisément, les sommes de Birkhoff $S_T(f, x)$ de f le long de l'orbite de $x \in S$ dans la direction θ vérifient :

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\log |S_T(f, x) - Tm(f, \theta)|}{\log T} \leq \alpha$$

où $m(f, \theta)$ est la moyenne de f dans la direction θ .

²La norme de Hodge permet d'étudier le cocycle de Kontsevich-Zorich de manière plus algébrique. L'idée d'introduire la norme de Hodge est due à M. Kontsevich [Kon97] et est largement développée dans l'article de G. Forni [For02].

La force de ce théorème est qu'il s'applique à toute surface de translation. On peut espérer un résultat d'équidistribution pour le théorème d'Oseledets dans le sens suivant :

Question: Soit S une surface de translation. Supposons que l'adhérence de sa $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ -orbite supporte une unique mesure μ , $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ -ergodique et de support total. Pour une direction θ générique, le cocycle de Kontsevich-Zorich le long de l'orbite de $r_\theta \cdot S$ est-il Oseledets générique pour la mesure μ ?

En particulier :

Question: Pouvons-nous supprimer l'hypothèse de généricité des paramètres a et b dans le théorème sur le taux de diffusion du vent dans les arbres ?

Champ de vecteur affine et drapeau d'Oseledets

Le troisième problème que nous abordons, concerne une forme de régularité du cocycle de Kontsevich-Zorich. Dans le cadre du vent dans les arbres, ce dernier se diagonalise par blocs, le bloc contrôlant la diffusion du vent dans les arbres étant de taille 2×2 . En particulier, aucune ambiguïté n'est possible sur l'exposant de Lyapunov qui contrôle la diffusion. Mais qu'en est-il pour un facteur irréductible du cocycle de Kontsevich-Zorich de taille supérieure ?

Soit S une surface (topologique) de genre g . Nous notons $\Omega\mathcal{T}_S(\kappa)$ une strate de l'espace de Teichmüller et $\Omega\mathcal{M}(\kappa)$ la strate correspondante de l'espace des modules³. Soit μ une mesure $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ -ergodique sur $\Omega\mathcal{M}(\kappa)$. On note $1 = \nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_k$ les exposants de Lyapunov positifs du cocycle de Kontsevich-Zorich pour la mesure μ . Pour une structure de translation $\omega \in \Omega\mathcal{T}(\kappa)$ Oseledets générique, on note $V_i^u(\omega) \subset H^1(S; \mathbb{R})$ (resp. $V_i^s(\omega) \subset H^1(S; \mathbb{R})$ et $V^c(\omega) \subset H^1(S; \mathbb{R})$) l'espace instable associé à ν_i (resp. l'espace stable associé à $-\nu_i$ et l'espace central). Définissons :

$$U_i(\omega) = V^c(\omega) \bigoplus_{j=0}^i (V_j^s(\omega) \oplus V_j^u(\omega)).$$

Pour un champ de vecteurs affine $f : \Omega\mathcal{T}(\kappa) \rightarrow H^1(S; \mathbb{R})$ et une structure de translation $\omega \in \Omega\mathcal{T}(\kappa)$ Oseledets générique, posons :

$$\nu(f, \omega) = \min_{i \in \{0, 1, \dots, k\}} \{\nu_i \mid f(\omega) \in U_i(\omega)\}.$$

Autrement dit, $\nu(f, \omega)$ est le coefficient qui contrôle les déviations de f le long de l'orbite de ω .

Nous avons, dans la section 3.2, utilisé un champ de vecteurs affine. En effet, la somme de Birkhoff $S_N(f, T, x)$ d'une fonction f au-dessus d'un échange d'intervalles T correspond à un champ de vecteurs constant. La taille de cette somme est de l'ordre de $N\lambda_A$ et en particulier croît à vitesse linéaire : l'exposant de Lyapunov qui contrôle cette somme est $\nu_1 = 1$. La différence $S_N(T, \chi_A, x) - N\lambda(f)$ correspond à un champ de vecteurs affine à cause de la dépendance en λ . Plus généralement, si $f : \Omega\mathcal{T}(\kappa) \rightarrow H^1(S; \mathbb{R})$ est un champ de vecteurs constant alors $\omega \mapsto f - \omega(f)$ est le champ de vecteurs affine sur $\Omega\mathcal{T}_S(\kappa)$ qui mesure les déviations des sommes de Birkhoff de f .

Question: Soit μ une mesure $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ -ergodique et $f : \Omega\mathcal{T}(\kappa) \rightarrow H^1(S; \mathbb{R})$ un champ de vecteurs affine sur une strate de l'espace de Teichmüller. La fonction $\nu(f, \cdot)$ est-elle μ -presque partout constante ?

³Cette approche plus algébrique des espaces des surfaces de translation est nécessaire pour utiliser la norme de Hodge. Les strates $\mathcal{H}(\kappa)$ que nous avons vues correspondent à $\Omega\mathcal{M}(\kappa)$ dont chaque point correspond à une classe d'isomorphisme de surface de translation. Une strate de l'espace de Teichmüller $\Omega\mathcal{T}_S(\kappa)$ est un espace « déplié » sur lequel $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ agit librement. L'espace $\Omega\mathcal{M}(\kappa)$ est le quotient de $\Omega\mathcal{T}_S(\kappa)$ par un groupe discret : le *groupe modulaire*. Ce dernier est relié de très près à l'induction de Rauzy.

La fonction $\nu(f, \cdot)$ est g_t invariante sur l'espace de Teichmüller mais *n'est pas* invariante pour l'action du groupe modulaire. Ainsi, il n'est pas possible d'utiliser directement l'ergodicité du flot de Teichmüller sur l'espace des modules $\Omega\mathcal{M}(\kappa)$ pour répondre positivement à cette question.

Revêtements non abéliens

La surface associée au vent dans les arbres est un \mathbb{Z}^2 -revêtement (sans biais) d'une surface de translation compacte. Dans cette partie, nous nous interrogeons sur la récurrence et la diffusion des surfaces de translation infinies périodiques dont le groupe de revêtement n'est plus abélien.

Du point de vue des échanges d'intervalles, un revêtement non-abélien devient une somme de Birkhoff non commutative, autrement dit un *cocycle*. Soit π une permutation sur l'alphabet \mathcal{A} de cardinal n . Soit G un groupe et g_α pour $\alpha \in \mathcal{A}$ des éléments de G qui l'engendrent. À toute donnée de longueurs $\lambda = (\lambda_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ on associe un cocycle (non commutatif) au-dessus de l'échange d'intervalles $T_{\pi, \lambda}$ en considérant la fonction qui vaut g_α sur l'intervalle I_α . Sur le groupe G , on considère la métrique des mots induite par les générateurs g_α . Le théorème ergodique sous-additif de Kingman (généralisant le théorème de Birkhoff et celui d'Oseledets) implique qu'il existe un *taux de diffusion* (ou *vitesse de fuite*) pour ce cocycle. Dans le cas où G est un groupe abélien, cette vitesse de fuite est un exposant de Lyapunov du cocycle de Kontsevich-Zorich.

Question: *Que peut-on dire du taux de diffusion d'un cocycle non commutatif au-dessus d'un échange d'intervalles $T_{\pi, \lambda}$ générique ? Est-il possible de généraliser la décomposition donnée par le théorème d'Oseledets (« phénomène de Kontsevich-Zorich ») ?*

Même dans un cadre non abélien, il est toujours possible d'utiliser la renormalisation. Dans sa version combinatoire, le cocycle de Kontsevich-Zorich non abélien consiste non plus à regarder la suite de matrices produite par l'induction de Rauzy (ou Ferenczi-Zamboni), mais la suite de substitutions. Au-delà des revêtements infinis non-abéliens, l'introduction de ces substitutions est également motivées par l'étude fine des sommes de Birkhoff. Par exemple, notre preuve de l'existence de trajectoires divergentes pour le vent dans les arbres les utilise.

En relation avec cette question et les exemples construits plus haut de surfaces infinies récurrentes :

Question: *Existe-t-il un G -revêtement d'une surface de translation compacte récurrente avec G infini non virtuellement abélien ?*

Une réponse positive est apportée à cette question dans des travaux en cours de J. Cabrol [Cab]. Il

construit un exemple avec le groupe de Heisenberg $H = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & 1 & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

Il existe un H -revêtement récurrent d'un tore.

En utilisant les mêmes techniques, il démontre le théorème suivant :

Soit G un groupe d'exposant fini⁴, alors tout G -revêtement est récurrent.

En particulier le théorème s'applique aux groupes de Burnside et contraste avec la situation des marches aléatoires dont les incréments sont indépendants. De la même façon, nous nous interrogeons sur une famille de groupes qui satisferait à un énoncé opposé.

Question: *Existe-t-il un groupe G tel que tout G -revêtement d'une surface de translation compacte soit divergent ?*

⁴Un groupe G est d'exposant fini s'il existe n tel que pour tout g dans G , $g^n = 1$.

Bibliographie

- [AF08] J. ATHREYA & G. FORNI – « Deviation of ergodic averages for rational polygonal billiards », *Duke* **144** (2008), no. 2.
- [AV07a] A. AVILA & M. VIANA – « Simplicity of lyapunov spectra : a sufficient criterion », *Portugaliae Mathematica* **64** (2007), p. 311–376.
- [AV07b] — , « Simplicity of lyapunov spectra : proof of the Zorich-Kontsevich conjecture », *Acta Arith.* **198** (2007), p. 1–56.
- [Bai07] M. BAINBRIDGE – « Euler characteristics of Teichmüller curves and in genus two », *Geom. Topol.* **11** (2007), p. 1887–2073.
- [Bai10] — , « Billiards in L-shaped tables with barriers », *Geometric and functional analysis* **20** (2010), no. 2, p. 299–356.
- [BL85] P. BOUGEROL & J. LACROIX – *Products of random matrices with applications to schrödinger operators*, Birkhäuser, 1985.
- [Boc80] G. BOCCARA – « Nombre de représentations d’une permutation comme produit de deux cycles de longueurs données », *Discrete Math.* **29** (1980), p. 105–13.
- [Boia] C. BOISSY – « Classification of Rauzy classes in the moduli space of quadratic differentials », prépublication, arXiv :0904.3826v1.
- [Boib] — , « Labeled Rauzy classes and framed translation surfaces », prépublication, arXiv :1010.5719v1.
- [Buf06] A. I. BUFETOV – « Decay of correlations for the Rauzy-Veech-Zorich induction map on the space of interval exchange transformations and the central limit theorem for the teichmüller flow on the moduli space of abelian differential », *J. of Amer. Math. Soc.* **19** (2006), no. 3, p. 579–623.
- [Cab] J. CABROL – « communication privée ».
- [Cal04] K. CALTA – « Veech surfaces and complete periodicity in genus two », *JAMS* **17** (2004), no. 4, p. 871–908.
- [CC09] N. CHEVALLIER & J.-P. CONZE – « Examples of recurrent or transient stationary walks in \mathbb{R}^d over a rotation of \mathbb{T}^2 », *Contemporary Mathematics* **485** (2009), p. 71–84.
- [CFZ] J. CASSAIGNE, S. FERENCZI & L. ZAMBONI – « Combinatorial trees arising in the study of interval exchange transformations », <http://iml.univ-mrs.fr/~ferenczi/cfz2.pdf>.

-
- [CM] D. CHEN & M. MÖLLER – « Non-varying sums of Lyapunov exponents of Abelian differentials in low genus », prépublication, arXiv :1104.3932v1.
- [Com72] L. COMTET – « Sur les coefficients de l'inverse de la série formelle $\sum n!t^n$ », *C. R. Acad. Sc. Paris* **275** (1972), no. A, p. 569–572.
- [Con09] J.-P. CONZE – « Recurrence, ergodicity and invariant measures for cocycles over a rotation », *Contemporary Mathematics* **485** (2009), p. 45–70.
- [Dela] V. DELECROIX – « Cardinality of Rauzy classes », prépublication, arXiv :1106.0807v1.
- [Delb] —, « Divergent trajectories in the wind-tree model », prépublication, arXiv :1107.2418v2.
- [DHL] V. DELECROIX, P. HUBERT & S. LELIÈVRE – « Diffusion for the periodic wind-tree model », prépublication, arXiv :1107.1810v2.
- [DM] V. DELECROIX & C. MATHEUS – « Un contre-exemple à la réciproque du critère de Forni pour la positivité des exposants de Lyapunov du cocycle de Kontsevich-Zorich », prépublication, arXiv :1103.1560v2.
- [EE12] P. EHRENFEST & T. EHRENFEST – « Begriffliche Grundlagen der statistischen Auffassung in der Mechanik », *Encykl. d. Math. Wissensch.* **IV 2 II, Heft 6, 90 S** (1912), (in German, translated in :) *The conceptual foundations of the statistical approach in mechanics*, (trans. Moravcsik, M. J.), 10-13 Cornell University Press, Ithaca NY, (1959).
- [EKZ] A. ESKIN, M. KONTSEVICH & A. ZORICH – « Sum of Lyapunov exponents of the Hodge bundle with respect to the Teichmüller geodesic flow », prépublication.
- [EKZ11] —, « Lyapunov spectrum of square-tiled cyclic covers », *J. of Modern Dyn.* **5** (2011), no. 2, p. 319–353.
- [EMZ03] A. ESKIN, H. MASUR & A. ZORICH – « Moduli spaces of Abelian differentials : the principal boundary, counting problems and the Siegel-Veech constants », *Publications de l'IHES* **97** (2003), no. 1, p. 61–179.
- [EO01] A. ESKIN & A. OKOUNKOV – « Asymptotics of numbers of branched coverings of a torus and volumes of moduli spaces of holomorphic differentials », *Invent. Math.* **145** (2001), p. 59–103.
- [EOP08] A. ESKIN, A. OKOUNKOV & R. PANDHARIPANDE – « The theta characteristic of a branched covering », *Adv. Math.* **217** (2008), no. 3, p. 873–888.
- [FK36] R. FOX & R. KERSHNER – « Concerning the transitive properties of geodesics in rational polyhedron », *Duke* **2** (1936), no. 1, p. 147–150.
- [FMZ11] G. FORNI, C. MATHEUS & A. ZORICH – « Square-tilde cyclic covers », *J. of Modern Dyn.* **5** (2011), no. 2, p. 285–318.
- [For97] G. FORNI – « The cohomological equation for area-preserving flows on compact surfaces », *Annals of Math.* **146** (1997), p. 295–344.
- [For02] —, « Deviation of ergodic averages for area-preserving flows on surfaces of higher genus », *Annals of Math.* **155** (2002), no. 1, p. 1–103.

-
- [For11] — , « A geometric criterion for the nonuniform hyperbolicity of the Kontsevich-Zorich cocycle », **5** (2011), no. 2, p. 355–395.
- [Fur02] A. FURMAN – *Random walks on groups and random transformations*, Elsevier, 2002.
- [FZ10] S. FERENCZI & L. ZAMBONI – « Structure of k -interval exchange transformations : induction, trajectories, and distance theorems », *JAnM* **112** (2010).
- [FZ11] — , « Eigenvalues and simplicity of 4 interval exchange transformations », *Annales Sci. École Norm. Sup.* **44** (2011).
- [GS98] A. GOUPIL & G. SCHAEFFER – « Factoring n -cycles and counting maps of given genus », *European J. Combin.* **19** (1998), p. 819–834.
- [Hat02] A. HATCHER – *Algebraic topology*, 2002.
- [HHW] P. HOOPER, P. HUBERT & B. WEISS – « Dynamics on the infinite stair case surface », prépublication, à paraître dans *Dis. Cont. Dyn. Sys.*
- [HLT] P. HUBERT, S. LELIÈVRE & S. TROUBETZKOY – « The Ehrenfest wind-tree model : periodic directions, recurrence, diffusion », prépublication, arXiv :0912.2891v1, à paraître dans *Crelle’s Journal*.
- [HW] P. HOOPER & B. WEISS – « Generalized staircases : recurrence and symmetry », prépublication, arXiv :0905.3736v1.
- [HW80] J. HARDY & J. WEBER – « Diffusion in a periodic wind-tree model », *J. of Math. Phys.* **21** (1980), no. 7, p. 1802–1808.
- [HZ86] J. L. HARER & D. B. ZAGIER – « The Euler characteristic of the moduli space of curves », *Invent. Math.* **85** (1986), no. 3, p. 457–486.
- [Joh80] D. JOHNSON – « Spin structures and quadratic forms on surfaces », *J. London. Math. Soc.* **22** (1980), p. 365–373.
- [Kea75] M. KEANE – « Interval exchange transformations », *Math. Zeitschr.* **141** (1975), p. 77–102.
- [KMS86] S. KERCKHOFF, H. MASUR & J. SMILLIE – « Ergodicity of billiard flows and quadratic differentials », *Annals of Math.* **124** (1986), no. 2, p. 293–311.
- [Kon97] M. KONTSEVICH – « Lyapunov exponents and Hodge theory », *Adv. Ser. Math. Phys.* **24** (1997), p. 318–332.
- [KZ75] A. KATOK & Z. ZEMLIKOV – « Topological transitivity of billiards in polygons », *Maths notes* **18** (1975), p. 760–764.
- [KZ03] M. KONTSEVICH & A. ZORICH – « Connected components of the moduli spaces of Abelian differentials with prescribed singularities », *Invent. Math.* **153** (2003), p. 631–678.
- [Lan08] E. LANNEAU – « Connected components of the strata of the moduli spaces of quadratic differentials », *Annales Sci. École Norm. Sup.* **41** (2008).
- [Mas82] H. MASUR – « Interval exchange transformations and measured foliations », *Annals of Math.* **115** (1982), p. 169–200.

-
- [McM03] C. McMULLEN – « Billiards and Teichmüller curves on Hilbert modular surfaces », *J. of Amer. Math. Soc.* **16** (2003), no. 4, p. 857–885.
- [McM05] —, « Teichmüller curves in genus two : discriminant and spin », *Math. Ann.* **333** (2005), no. 1, p. 87–130.
- [McM07] —, « Dynamics of $SL_2(\mathbb{R})$ over moduli space in genus two », *Annals of Math.* **165** (2007), no. 2, p. 397–456.
- [MMY] C. MATHEUS, M. MÖLLER & J.-C. YOCCOZ – « A criterion for simplicity of the Lyapunov spectrum of square-tiled surfaces », en préparation.
- [MMY05] S. MARMI, P. MOUSSA & J.-C. YOCCOZ – « The cohomological equation for Roth type interval exchange transformations », *J. of Amer. Math. Soc.* **18** (2005), p. 823–872.
- [MT02] H. MASUR & S. TABACHNIKOV – « Handbook of dynamical systems 1a », ch. Rational billiards and flat structures, p. 289–307, Elsevier, 2002.
- [MZ08] H. MASUR & A. ZORICH – « Multiple saddle connections on flat surfaces and principal boundary of the moduli spaces of quadratic differentials », *Geom. Funct. Anal.* **18** (2008), p. 919–987.
- [Ose68] V. OSELEDETS – « A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems », *Trans. Moscow Math. Soc.* **19** (1968), p. 197–231.
- [Rau79] G. RAUZY – « Echanges d’intervalles et transformations induites », *Acta Arith.* **34** (1979), p. 315–328.
- [Sch77] K. SCHMIDT – *Cocycles of ergodic transformation groups*, vol. 1, MacMillan (India), 1977.
- [Val] F. VALDEZ – « Veech groups, irrational billiards and stable abelian differentials », pré-publication, arXiv :0905.1591v2.
- [Val09] —, « Billiards in polygons and homogeneous foliations on \mathbb{C}^2 », *Erg. Th. and Dyn. Syst.* **29** (2009), p. 255–271.
- [Vee82] W. A. VEECH – « Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps », *Annals of Math.* **115** (1982), p. 201–242.
- [Vee86] W. VEECH – « The Teichmüller geodesic flow », *Annals of Math.* **124** (1986), no. 3, p. 441–530.
- [Vee89] W. VEECH – « Teichmüller curves in the moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards », *Invent. Math.* **97** (1989), p. 533–683.
- [Vee90] W. A. VEECH – « Moduli space of quadratic differentials », *Journal d’Analyse Math.* **55** (1990), p. 117–171.
- [Via] M. VIANA – « Dynamics of interval exchange maps and teichmüller flows », <http://w3.impa.br/~viana>.
- [Zor96] A. ZORICH – « Finite Gauss measure on the space of interval exchange transformations. Lyapunov exponents. », *Ann. Inst. Fourier* **46** (1996), no. 2, p. 325–370.

- [Zor97] — , « Deviation for interval exchange transformations », *Erg. Th. and Dyn. Syst.* **17** (1997), no. 6, p. 1477–1499.
- [Zor99] — , « How do the leaves of a closed 1-form wind around a surface », p. 135–178, AMS ser 2. vol 197, 1999.
- [Zor02] — , « Square tiled surfaces and Teichmüller volumes of the moduli spaces of abelian differentials », in *Rigidity in Dynamics and Geometry*, Springer-Verlag, 2002, p. 459–471.
- [Zor06] — , *Flat surfaces*, Springer, 2006, in "Frontiers in Number Theory, Physics and Geometry. Volume 1 : On random matrices , zeta functions and dynamical systems".
- [Zor08] — , « Explicit Jenkins-Strebel representative of Abelian and quadratic differentials », *J. of Modern Dyn.* **2** (2008), no. 1, p. 139–185.



Résumés

Résumé en français

Ce travail de thèse porte sur la dynamique du flot linéaire des surfaces de translation et de sa renormalisation par le flot de Teichmüller introduite par H. Masur et W. Veech en 1982. Une version combinatoire de cette renormalisation, l'induction de Rauzy sur les échanges d'intervalles, fût introduite auparavant par G. Rauzy en 1979. D'une part, nous faisons une étude combinatoire des classes de Rauzy qui forment une partition de l'ensemble des permutations irréductibles et interviennent dans l'algorithme d'induction de Rauzy. Nous donnons une formule pour la cardinalité de chaque classe. D'autre part, nous étudions un modèle de billard infini \mathbb{Z}^2 -périodique dans le plan appelé le "vent dans les arbres" introduit dans une version stochastique par P. et T. Ehrenfest en 1912 et par J. Hardy et J. Weber en 1980 dans la version périodique. Nous construisons une famille de directions pour lesquelles le flot du billard est divergent donnant ainsi des exemples de \mathbb{Z}^2 -cocycles divergents au-dessus d'échanges d'intervalles. De plus, nous démontrons que le taux polynomial de diffusion générique est $2/3$ autrement dit que la distance maximale atteinte par une particule au temps t est de l'ordre de $t^{2/3}$.

Résumé en anglais (english abstract)

In this thesis, we study the dynamics of the linear flow of translation surfaces and its renormalization by the Teichmüller flow introduced by H. Masur and W. Veech in 1982. A combinatorial version of the renormalization, the Rauzy induction on interval exchange transformations, was introduced by G. Rauzy in 1979. First of all, we consider the combinatorics of Rauzy classes which form a partition of the set of irreducible permutations and are part of the Rauzy induction. In a second time, we consider an infinite \mathbb{Z}^2 -periodic billiard in the plane called the wind-tree model. It was introduced in a stochastic version by P. and T. Ehrenfest in 1912 and in the periodic version by J. Hardy and J. Weber in 1980. We construct a family of directions for which the flow of the billiard is divergent and hence give examples of divergent \mathbb{Z}^2 -cocycles over interval exchange transformations. Moreover, we prove that the polynomial rate of diffusion is generically $2/3$. In other words, the maximal distance reached by a particule below time t has the order of $t^{2/3}$.