

Une histoire des nombres:

concepts, représentations et pratiques

daubin.aubin@upmc.fr

● LG301 - Histoire des nombres

09/11/2011 ● 1

Sommaire

1. Le nombre, la numération, le calcul dans l'Antiquité
2. Deux types de mathématiques; deux types d'arithmétique en Grèce ancienne
3. Les chiffres arabes et l'invention de l'algèbre
4. Mathématiques et commerce en Europe, 1200-1500
5. La géométrie analytique de Descartes
6. La mesure des grandeurs avant et après le système métrique

● LG301 - Histoire des nombres

09/11/2011 ● 2

L'algèbre 1

- Abu Ja'far Muhammad ibn Musa **Al-Khwarizmi** (env. 790 – env. 840).
- *Al-jabr wa'l-muqābala* (الجبر والمقابلة) Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison (composé entre 813 et 833).
- Composé de six livres, ayant pour objet la résolution des équations du 2nd degré
 - 1er livre : théorique (établissement du calcul)
 - 2e livre : procédés permettant de se ramener aux six types d'équations algébriques fondamentaux
 - 4 derniers livres : applications pratiques



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/23/Image:Al-Khwarizmi_al-muqabala.jpg

● LG301 - Histoire des nombres

09/11/2011 ● 3

L'algèbre 2

- La dénomination des termes chez Al-Kwarizmi
 - l'inconnue : « shay » (šay) – littéralement « chose » (transcrit šay en espagnol ancien = origine de x pour l'inconnue)
 - la racine = *gizr*
 - le carré de l'inconnue = *mal* (à l'origine, « bien possédé », mot qui deviendra synonyme de carré)
 - la constante : nombre simple = *dirham* (à l'origine, unité monétaire).
- Classification des équation (a , b , et c sont des entiers positifs)

$ax^2 = bx$	« des carrés égalent des racines »
$ax^2 = c$	« des carrés égalent un nombre »
$bx = c$	« des racines égalent un nombre »
$ax^2 + bx = c$	« des carrés et des racines égalent un nombre »
$ax^2 + c = bx$	« des carrés et un nombre égalent des racines »
$ax^2 = bx + c$	« des carrés égalent des racines plus un nombre ».

● LG301 - Histoire des nombres

09/11/2011 ● 4

L'algèbre 3

- **Al-Kwarizmi:** « un résumé englobant les plus fines et les plus nobles opérations du calcul dont les hommes ont besoin pour la répartition de leurs héritages et de leurs donations, pour leurs partages et pour leurs jugements, pour leurs transactions commerciales et pour toutes les opérations qu'ils ont entre eux relatives à l'arpentage, à la répartition des eaux des rivières, à l'architecture ainsi qu'à d'autres aspects. »
- L'essence de l'algèbre selon **Omar Al-Khayyam** (1048–1131) :

« L'art de l'algèbre et de l'al-muqabala est un art scientifique dont l'objet est le nombre entier et les grandeurs mesurables en tant qu'inconnus mais rapporté à une chose connue par laquelle on peut les déterminer [...] Les solutions en algèbre s'effectuent par l'équation, je veux dire en égalant ces degrés les uns aux autres »

● LG301 - Histoire des nombres

09/11/2011 ● 5

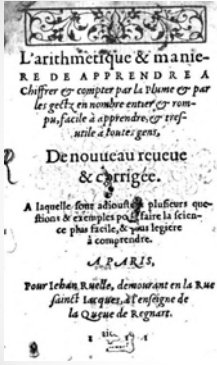
4

Arithmétique, algèbre, et commerce en Europe

Redéfinitions du nombre

● LG301 - Histoire des nombres

09/11/2011 ● 6



Les arithmétiques à la Renaissance

Ces livres sont plus souvent destinés aux commerçants ou aux artisans qu'aux savants.

EXEMPLE.

A	0	9	6	5	4	5	3	fr.	15	folz	9.	d.	
B	0	8	7	3	2	8	6	fr.	14	folz	7.	d.	
C	3	4	5	6	7	5	3	fr.	19	folz	3.	d.	
D	0	1	8	8	7	6	4	fr.	14	folz	5.	d.	
E	0	0	8	6	5	0	3	fr.	12	folz	11	d.	
F	0	0	2	3	4	3	4	fr.	15	folz	10	d.	
G	0	0	0	0	3	6	3	fr.	15	folz	3	d.	
H	0	0	0	0	0	4	fr.	16	folz	5.	d.		
I	0	0	0	0	4	5	fr.	19	folz	9.	d.		
K	5	6	9	4	6	7	3	0	fr.	2	folz	1.	d.

● LG301 - Histoire des nombres 09/11/2011 ● 7



Pratique pour apprendre à chiffer (1565)


« le commencement de l'Arithmétique successivement venant aux principaux points des comptes propres et requis aux Marchands »

Des problèmes:

.. Si vne aulne couste 8.6. combien cousteront .472. aulnes, multipliez les .472. avec .6. & en viendront 3. 2832. les memes diuisez par .11.9. pour faire en fl. & en viendront 236. fl. les memes diuisez encors par .10. fl. pour faire en L. & en viendront L. 11. fl. 16. s. —

1.	aul.	8.	6.	aul.
1.	6.	472.	6.	aul.
				6
				2832

● LG301 - Histoire des nombres 09/11/2011 ● 42



Nouvelles définitions du nombre

NOMBRE, est exprimer la valeur de tout nombre, qui est proposé, & ainsi poser par ses caracteres tout nombre donné.

FORCADEL.

Nombre, est non seulement cognoistre le nombre de 3, 5, 409. &c. mais aussi escrire les nombres.

● LG301 - Histoire des nombres 09/11/2011 ● 9


Arithmétique commerciale et les nombres en Occident

- Les nombres « entiers » ou « sains »
 - « Le quart capitul que ensenha de partir tot nombre san ho entiers. — Francis Pellis, Compendium de lo abaco, Turin, 1492, en occitan.
- Les nombres « rompus », « routz » = les fractions.
 - « Nombre rout est une partie ou plusieurs de 1. — Nicolas Chuquet, Triparty en la science des nombres (1484).
- Les nombres « sours » = les racines irrationnelles.
 - « Racine de nombre est ung nombre qui multiplié en soy une fois ou plusieurs selon l'exigence et nature de la racine produyt precisement le nombre dont il est racine. — Chuquet.
 - Barthélémy de Romans et Mathieu Prêhoude, Compendy de la pratique des nombres, Lyon, 1471
- Les nombres « moins que rien » = les nombres négatifs
 - « ce qui reste lorsqu'on soustrait des nombres plus petits s'appelle nombre déterminé, quand on soustrait un nombre égal, il reste 0, qui s'appelle non rien simplement, et quand on devrait soustraire des nombres plus grands, comme il est impossible de retrancher le plus grand nombre du plus petit, la soustraction se fait forcément en sens contraire et pour cela, ce qui reste s'appelle moins que rien. »


Sources: Maryvonne Spieser, « Nombres et pratiques calculatoire dans la tradition commerciale du 15^e siècle ». ● LG301 - Histoire des nombres 09/11/2011 ● 10

Cossistes algébristes

- ars rei et census; arte della cosa.
 - [rei = shai en arabe = « chose », l'inconnue]
 - [census = māl en arabe, le carré de l'inconnu]
- Arithmétique indienne et algèbre mélangées
- Des problèmes-types plutôt qu'une symbolique algébrique
- Les principaux ouvrages:
 - Christian Rudolff, Behend und hubsch Rechnung durch die kunstreichen Regeln Algebra so gemeinlich die Coss genennet werden (Strasbourg, 1525).
 - Utilise le symbole \mathcal{C} ; introduit le symbole $\sqrt{\quad}$; se rend compte que $x^2=1$.
 - Girolamo Cardano, Ars Magna (Nuremberg 1545)
 - Christopher Clavius, Algebra (Rome, 1608).



Girolamo Cardano (1501-1576)




Christopher Clavius (1538-1612)

● LG301 - Histoire des nombres 09/11/2011 ● 11

Cossistes algébristes

- Des problèmes concrets qui se rattachent à l'arithmétique commerciale
 - Les écoles d'abaque en Italie.
 - Nicolas Chuquet, Triparty en la science des nombres (1484): premier traité d'algèbre en français.
 - Source de renseignements sur l'économie de la Renaissance (les changes, les assurances, etc.)
- Mais de fait une littérature spécialisée destinée à des professionnels du calcul (Maestro d'abacco, Rechenmeister, wisconstler)
 - Ex: Niccolò Tartaglia (v. 1500-1557)
 - Publication = publicité, sans dissimulation trop importante.



Niccolò Tartaglia (v. 1500-1557)

● LG301 - Histoire des nombres 09/11/2011 ● 12

Simon Stevin (1548–1620)

- Commerçant flamand (Bruges, Anvers, etc.)
- Tables d'intérêts.
- 1583: Université de Leide.
- 1585: *La Dime et la Pratique d'arithmétique*.
- Le nombre n'est pas quantité discontinue.



● LG301 - Histoire des nombres

09/11/2011 ● 13

Logarithmes

- John Napier of Merchiston (1550–1617), aussi Néper.
- 1614: *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*; trad. 1616:
- Lignes représentées par des nombres:
"Surd quantities, or vnexplicable by number, are said to be defined, or expressed by numbers very neere, when they are defined or expressed by great numbers which differ not so much as one vnite from the true value of the Surd quantities."



● LG301 - Histoire des nombres

09/11/2011 ● 14

5

La nouvelle analyse

L'union entre arithmétique et géométrie: le nombre réel

● LG301 - Histoire des nombres

09/11/2011 ● 15

François Viète (1540–1603)

- « il découvrit les plus secrets mystères des Sciences les plus abstruses, et [...] il vint à bout sans peine de tout ce qu'un homme subtil est capable de concevoir et d'exécuter. Mais parmi ses diverses occupations, et les embarras des affaires dont son vaste et infatigable esprit ne fut jamais exempt, il exerça surtout son industrie aux Mathématiques, et il y excella d'une telle manière, que tout ce qui a été inventé par les Anciens en cette Science, et dont nous sommes privés par l'injure du temps qui a aboli leurs écrits, il l'a inventé lui-même de nouveau, il en a renouvelé l'usage, et a même ajouté beaucoup de choses à leurs merveilleuses découvertes ».



T.A. de Thou, *Histoire de mon temps* (1620).

● LG301 - Histoire des nombres

09/11/2011 ● 16

La nouvelle algèbre

La méthode

- **Écrire avec des lettres les relations entre grandeurs :** les grandeurs cherchées avec la lettre A ou toute autre voyelle E, I, O, U, Y, les grandeurs données avec les lettres B, C, D ou d'autres consonnes
- **Respecter la loi des homogènes, c'est-à-dire la dimension des grandeurs :** dimension 2 : A carré, B plan dimension 3 : D cube, F solide

....

Exemples

- Trouver deux nombres connaissant leur somme et leur différence (Zététiques I 1)
A + E aequatur B ($x + y = a$)
A - E aequatur D ($x - y = b$)
- Trouver les deux côtés d'un rectangle connaissant son aire et la différence des carrés des côtés (Zététiques II 9)
A in E aequatur B plano
Aq - Eq aequatur D plano
 $(xy = a \text{ et } x^2 + y^2 = b)$

● LG301 - Histoire des nombres

09/11/2011 ● 17

René Descartes (1596–1650)

- Collège de La Flèche (chez les Jésuites)
- 1618 : dans l'armée en Hollande
 - l'armée de Maurice de Nassau,
 - réorganisation de l'armée suite à l'introduction des armes à feu : des petites unités autonomes,
 - l'analyse ?
- A la même époque, rencontre Isaac Beeckman (médecin); découverte de la physico-mathématique.
- 10 novembre 1619: rêves dans un « poêle ».
- 1629 : s'installe à Amsterdam
 - *Règles pour la direction de l'esprit* (en latin).

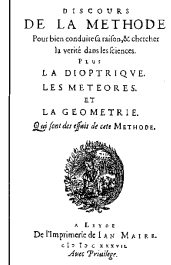


● LG301 - Histoire des nombres

09/11/2011 ● 18

Descartes 2

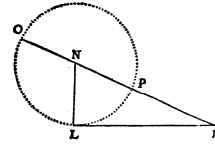
- 1633: Traité du Monde prêt : la physique et métaphysique
 - Mais condamnation de Galilée, le Monde resté inédit.
- 1637 : grand traité d'épistémologie en plusieurs parties (publié en français).
 - l'introduction = Discours de la méthode
 - la **Géométrie**: la langue de la science et des raisonnements
 - la Dioptrique: l'étude des instruments optiques pour montrer qu'on peut leur faire confiance.
 - les Météores: pour remplacer Aristote?
- 1641 : Méditations métaphysiques (latin).
- 1644 : Principes de philosophie (latin) :
 - un traité de physique.



● LG301 - Histoire des nombres

09/11/2011 ● 19

La géométrie analytique



$x^2 = ax + bb$
 ie fais le triangle rectangle N L M, dont le côté L M est égal à la racine carrée de la quantité connue bb , & l'autre L N est $\frac{1}{2} a$, la moitié de l'autre quantité connue, qui estoit multipliée par x que ie suppose estre la ligne inconnue. puis prolongeant M N la base de ce triangle, iufques a O, en sorte qu'N O soit esgale a N L, la toute O M est x la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cete sorte

$$x^2 = \frac{1}{2} a x + \sqrt{\frac{1}{4} a a + b b}$$

● LG301 - Histoire des nombres

09/11/2011 ● 20

Mesure des grandeurs

avant et après le système métrique

● LG301 - Histoire des nombres

09/11/2011 ● 21

Anciens systèmes de mesure

- Représenter une longueur par un nombre est une idée très ancienne
 - (Babylone, Egypte, Grèce antique, mais aussi en Chine ou en Inde, etc.)
- Souvent basé sur les dimensions du corps humain
 - Le pouce, le pied, la coudée...
 - « L'homme est la mesure de toutes choses » (Protagoras selon Platon, Théète).
- Organisé en « système »
 - Relation entre multiples et diviseurs
 - Relation entre longueurs, aires, volumes, poids et monnaie
 - Variant selon les lieux: besoin d'un **étalon**

● LG301 - Histoire des nombres

09/11/2011 ● 22

Les coudées antiques



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/af/Nippur_cubit.JPG

- La coudée de Nippour (Iraq).
 - Aujourd'hui au Musée d'Istanbul.
 - datée de 2600 av. J.-C. environ.
 - Longueur de 52 cm.
- La coudée royale égyptienne
 - En usage dès 2700 avant J.-C.
 - Environ 52-53 cm.
 - Divisée en 7 « paumes » de 4 « pouces » chacun.
- Des systèmes imposés par le pouvoir:
 - Philippe de Macédoine et Alexandre le Grand, l'empereur romain Justinien, Charlemagne...

● LG301 - Histoire des nombres

09/11/2011 ● 23

Système de poids et mesures

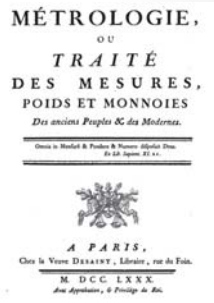
En France de Charlemagne à la Révolution française:

- Mesure des longueurs:
 - La toise de Paris (env. 1,95 m), divisée en 6 pieds (le « pied du roi ») de 32 cm env.
 - Le pied est divisée en 12 pouces de 2,7 cm env.
- Mesure de poids
 - La livre (1/70^e de la masse d'un pied cube d'eau): env. 490 g.
 - Le quintal vaut 100 livres
 - La livre est divisée en 2 marcs ou 16 onces. Chaque once vaut 8 gros ou 24 deniers
- La monnaie:
 - La livre tournois vaut 20 sols, divisés chacun en 12 deniers.

● LG301 - Histoire des nombres

09/11/2011 ● 24

- *Métrologie ou traité es mesures* par Alexis-Jean-Pierre Fauchon (1780).
- « Toutes nos connaissances scientifiques se réduisent à des rapports. De ces rapports, les uns sont indéterminés, n'ayant aucune relation finie avec les objets sensibles; les autres sont déterminés & finis, ayant une relation immédiate avec les objets qui frappent nos sens. Les premiers sont du ressort des Sciences spéculative et théoriques, de la Géométrie par exemple, de la Mécanique, de l'Astronomie, &c.; les seconds appartiennent aussi à toutes ces sciences soumises à la pratique, & c'est à ces deniers qu'on a donné le nom de Mesures. »



<i>Pour le blé, menus grains, graines, légumes, & la chaux.</i>	
Bouffons ou 4 quarts ou 16 livres, dit.	000000 1,000
Mine ou 3 bouffons	047711 1,000
Mise ou 1 mine ou 6 bouffons	077811 1,000
Serier ou 2 mines ou 12 bouffons	107911 1,000
Muid ou tonneau ou 11 setiers	114811 1,000
Sac de farine, pèse 112 liv.	
<i>Pour l'avoine.</i>	
Bouffons ou 4 picules ou 8 livres	000000 1,000
Mine ou 3 bouffons	077811 1,000
Mise ou 1 mine ou 6 bouffons	107911 1,000
Serier ou 2 mines ou 12 bouffons	114811 1,000
Muid ou tonneau ou 11 setiers	114811 1,000
<i>Pour mesurer le foin.</i>	
Bouffons ou 6 boisseaux, repai de poids de 2 livres de fil	000000 1,000
Mine ou 3 bouffons	077811 1,000
Mise ou 1 mine ou 6 bouffons	107911 1,000
Serier ou 2 mines ou 12 bouffons	114811 1,000
Muid ou tonneau ou 11 setiers	114811 1,000
<i>Mesures de charbon de bois.</i>	
<i>Pour les Bourgognes.</i>	
Bouffons	000000 1,000
Mine ou 3 bouffons	077811 1,000
Mise ou 1 mine ou 6 bouffons	107911 1,000
Muid ou tonneau ou 11 setiers	114811 1,000
<i>Mesures de charbon de bois.</i>	
<i>Pour les Marchands.</i>	
Bouffons	000000 1,000
Mine ou 3 bouffons	077811 1,000
Mise ou 1 mine ou 6 bouffons	107911 1,000
Muid ou tonneau ou 11 setiers	114811 1,000

Manque d'unité en pratique

- Prolifération d'unités secondaires
- Variations importantes selon les lieux