C. R. Acad. Sci. Paris, t. 329, Série I, p. 199-202, 1999
Analyse fonctionnelle/*Functional Analysis*

Sur le transport de mesures périodiques

Dario CORDERO-ERAUSQUIN

Équipe d'analyse et de mathématiques appliquées, Université de Marne-la-Vallée, cité Descartes, 5, boulevard Descartes, Champs-sur-Marne, 77454 Marne-la-Vallée cedex 2, France
Courriel : cordero@math.univ-mlv.fr

(Reçu et accepté le 10 mai 1999)

Résumé. On montre, en suivant la méthode de McCann [8], qu'étant donné deux mesures périodiques μ et ν sur $\mathbb{R}^d$ (suffisamment régulières), on peut trouver une fonction convexe ϕ telle que $\nabla\phi$ transporte μ sur ν. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Monotone maps preserving periodic measures

Abstract. *Following the method of McCann* [8], *we show that given two (regular enough) periodic measures μ and ν on $\mathbb{R}^d$, there exists a monotone function (ie: the gradient of a convex function) which pushes-forward μ onto ν.* © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

1. Introduction

Si μ et ν sont deux mesures de Radon positives (MRP) sur $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) et $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une application borélienne (si l'on veut définie seulement μ-presque partout), on dit que T *transporte* μ sur ν si $\nu = T\mu$, c'est-à-dire, pour tout borélien B de $\mathbb{R}^d$, $\nu(B) = \mu(T^{-1}(B))$, ou encore, $\int_{\mathbb{R}^d} b(y)\,\mathrm{d}\nu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} b(T(x))\,\mathrm{d}\mu(x)$ pour toute fonction borélienne positive $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. McCann [8], prolongeant le travail de Brenier ([3] et [4]), a montré que si μ et ν sont des probabilités sur $\mathbb{R}^d$ et que μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, alors il existe une fonction convexe ϕ sur $\mathbb{R}^d$ telle que $\nabla\phi$ transporte μ sur ν. Récemment, McCann [9] a apporté une réponse générale au problème du transport sur une variété riemannienne (le résultat a été annoncé dans [7]). Le but de cette Note est d'étudier directement et avec un autre point de vue le cas particulier des mesures périodiques (c'est-à-dire le cas de la variété $\mathbb{T}^n$). Signalons que le cas des mesures périodiques sur $\mathbb{R}^2$ a été étudié numériquement par Benamou et Brenier [2].

Une *MRP périodique* est une MRP sur $\mathbb{R}^d$ égale à ses $\mathbb{Z}^d$-translatées. Une MRP périodique sera une *probabilité périodique* si, de plus, la mesure de (par exemple) $[0,1[^d$, qui est toujours finie, est égale à 1. Le résultat principal est le suivant :

THÉORÈME 1. – *Soit μ et ν deux probabilités périodiques sur $\mathbb{R}^d$. On suppose que μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Alors il existe une fonction ϕ convexe sur $\mathbb{R}^d$ telle*

Note présentée par Gilles PISIER.

0764-4442/99/03290199

que $\nabla\phi$ transporte μ sur ν et telle que $\nabla\phi$ soit additive : $\nabla\phi(x+p) = \nabla\phi(x) + p$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ et pour tout $p \in \mathbb{Z}^d$.

Si μ et ν sont à densités f et g, où f, g sont deux fonctions périodiques continues höldériennes d'ordre $\alpha > 0$ sur $\mathbb{R}^d$ (d'intégrale 1 sur $[0,1]^d$) telles que $\lambda_1 \leq f,\ g \leq \lambda_2$, avec $\lambda_1,\ \lambda_2 > 0$, alors la fonction convexe ϕ précédente est de classe $\mathcal{C}^{2,\beta}$, pour $0 < \beta < \alpha$. C'est une solution convexe de l'équation de Monge–Ampère : $\det(\partial_{ij}\phi(x))f(\nabla\phi(x)) = g(x)$.

On dit qu'une partie $S \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ est *cycliquement monotone* si pour toute famille finie $(x_0, y_0), \ldots, (x_k, y_k)$ de points de S et pour toute permutation σ de $\{0, \ldots, k\}$:

$$\sum_{i=0}^{k} |x_i - y_i|^2 \leq \sum_{i=0}^{k} |x_{\sigma(i)} - y_i|^2.$$

Si ϕ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}^d$, le *sous-gradient* $\partial\phi$ de ϕ est la partie de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ définie par : $\partial\phi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d;\ \phi(z) \geq \langle y,\, z-x\rangle + \phi(x),\quad \forall\, z \in \mathbb{R}^d\}$. On utilisera le résultat de Rockafellar suivant [10] :

PROPOSITION 1. – *Soit $S \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Il existe une fonction convexe propre ϕ sur $\mathbb{R}^d$ telle que $S \subset \partial\phi$ si et seulement si S est cycliquement monotone.*

Si μ et ν sont deux mesures sur $\mathbb{R}^d$ et γ une mesure sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, on dit que γ a pour *marginales* respectivement μ et ν si pour toute partie borélienne B de $\mathbb{R}^d$, $\mu(B) = \gamma(B \times \mathbb{R}^d)$ et $\nu(B) = \gamma(\mathbb{R}^d \times B)$. La stratégie de démonstration, due à McCann [8], consiste à construire une MRP sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ ayant μ et ν comme marginales, et ayant un support cycliquement monotone. Pour cela, on commencera par traiter le cas où les mesures μ et ν sont discrètes et on concluera par approximation. On notera $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $\mathbb{R}^d$. Si (μ_n) est une suite de MRP, et μ une MRP, on dit que μ_n tend vers μ si pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ on a $\mu_n(f) \to \mu(f)$, et on écrira alors $\mu_n \xrightarrow{\star} \mu$.

2. Un résultat d'existence d'ensembles cycliquement monotones

Si $x \in \mathbb{R}^d$, $\overline{x}$ désignera la classe de x dans $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$. On notera d la distance usuelle sur $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$: pour tous $x,\ y \in \mathbb{R}^d$, $\mathrm{d}(\overline{x}, \overline{y}) = \inf_{p \in \mathbb{Z}^d} |x - y + p|$. On dit que la famille $(\overline{x_0}, \overline{y_0}), \ldots, (\overline{x_k}, \overline{y_k})$ de points de $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$, vérifie (C) si pour toute permutation de σ de $\{0, \ldots, k\}$,

$$\sum_{i=0}^{k} \mathrm{d}^2(\overline{x_i}, \overline{y_i}) \leq \sum_{i=0}^{k} \mathrm{d}^2(\overline{x_{\sigma(i)}}, \overline{y_i}).$$

Le résultat dont nous aurons besoin est le suivant :

PROPOSITION 2. – *Soit $x_0, \ldots, x_k \in [0,1]^d$ et $y_0, \ldots, y_k \in \mathbb{R}^d$ avec l'hypothèse que pour tout $i \leq k$, $\mathrm{d}(\overline{x_i}, \overline{y_i}) = |x_i - y_i|$ (ce qui revient simplement à choisir un représentant convenable dans $\overline{y_i}$). Alors si la famille $(\overline{x_0}, \overline{y_0}), \ldots, (\overline{x_k}, \overline{y_k})$ vérifie la condition* (C)*, l'ensemble*

$$\{(x_i + p,\ y_i + p)\,;\ i \leq k,\ p \in \mathbb{Z}^d\}$$

est cycliquement monotone dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Démonstration. – Soit une famille de couples $\big((x_i, y_i)\big)_{i \leq k}$ vérifiant les hypothèses de la proposition 2. On notera, pour $i \leq k$ et $p \in \mathbb{Z}^d$: $\mathbf{x_{i,p} = x_i + p}$. On doit vérifier que l'ensemble des couples $\{(x_{i,p},\ y_{i,p})\,;\ i \leq k,\ p \in \mathbb{Z}^d\}$ est cycliquement monotone. On se donne donc un sous-ensemble fini de couples du type $\{(x_{i,p},\ y_{i,p})\,;\ i \leq k,\ p \in \{-N, \ldots, N\}^d\}$, pour un $N \geq 0$, et π une bijection de $\{0, \ldots, k\} \times \{-N, \ldots, N\}^d$. On notera $T^d_N = \{-N, \ldots, N\}^d$. Il faut montrer que :

$$\sum_{i \leq k,\, p \in T^d_N} |x_{\pi(i,p)} - y_{i,p}|^2 \geq \sum_{i \leq k,\, p \in T^d_N} |x_{i,p} - y_{i,p}|^2.$$

On remarque que $|x_{i,p} - y_{i,p}| = |x_i - y_i| = \mathrm{d}(\overline{x_i}, \overline{y_i})$ et que $|x_{\pi(i,p)} - y_{i,p}| \geq \mathrm{d}(\overline{x_{\pi(i,p)}}, \overline{y_{i,p}})$. Introduisons pour $i,\, j \leq k$ le nombre $A_{i,j}$ défini par :

$$A_{i,j} = \mathrm{Card}\left(\left\{p \in T_N^d\,;\ \exists\, q \in T_N^d \text{ tel que } \pi(i,p) = (j,q)\right\}\right).$$

Si $\pi(i,p) = (j,q)$, on a $\mathrm{d}^2(\overline{x_{\pi(i,p)}}, \overline{y_{i,p}}) = \mathrm{d}^2(\overline{x_{(j,q)}}, \overline{y_{i,p}}) = \mathrm{d}^2(\overline{x_j}, \overline{y_i})$. Il suffit donc de montrer que :

$$\sum_{i,j \leq k} A_{i,j}\, \mathrm{d}^2(\overline{x_j}, \overline{y_i}) \geq (2N+1)^d \sum_{i \leq k} \mathrm{d}^2(\overline{x_i}, \overline{y_i}). \tag{1}$$

On vérifie immédiatement que la matrice $(A_{i,j})$ possède une propriété de bi-stochasticité :

$$\forall\, i_0,\ j_0 \leq k, \quad \sum_{j \leq k} A_{i_0,j} = \sum_{i \leq k} A_{i,j_0} = (2N+1)^d.$$

Par conséquent, la matrice $\left(\frac{1}{(2N+1)^d} A_{i,j}\right)$ s'écrit comme combinaison convexe (à coefficients positifs) de matrices de permutation. Il suffit donc de montrer (1) quand $\left(\frac{1}{(2N+1)^d} A_{i,j}\right)$ est la matrice d'une permutation σ, ce qui revient à dire que la famille $\left((\overline{x_i}, \overline{y_i})\right)_{i \leq k}$ vérifie la condition (C).

Remarque 1. – Si on se donne une famille quelconque $\left((\overline{x_i}, \overline{y_i})\right)_{i \leq k}$, on peut trouver une permutation τ de $\{0, \ldots, k\}$ telle que : si on note $z_i = y_{\tau^{-1}(i)}$, la famille $\left((\overline{x_i}, \overline{z_i})\right)_{i \leq k}$ vérifie la condition (C).

3. Démonstration du théorème (existence)

Soit μ et ν deux probabilités périodiques sur $\mathbb{R}^d$. On construit deux suites (μ_n) et (ν_n) de probabilités périodiques sur $\mathbb{R}^d$, $\mu_n \xrightarrow{\star} \mu$ et $\nu_n \xrightarrow{\star} \nu$, de la forme :

$$\mu_n = \frac{1}{k+1} \sum_{i \leq k} \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} \delta_{x_{i,p}} \quad \text{et} \quad \nu_n = \frac{1}{k+1} \sum_{i \leq k} \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} \delta_{y_{i,p}}, \tag{2}$$

où les $x_i,\ y_i$ sont dans $\mathbb{R}^d$ (et $x_{i,p} = x_i + p$) et δ désigne la mesure de Dirac dans $\mathbb{R}^d$. On devrait noter $k_n,\ x_i^n,\ y_i^n$. On suppose que (quitte à renuméroter les y_i) la famille $\left((\overline{x_i}, \overline{y_i})\right)_{i \leq k}$ vérifie la condition (C) et que l'on a pris les x_i dans $[0,1[^d$ et les y_i tels que $|x_i - y_i| = \mathrm{d}(\overline{x_i}, \overline{y_i})$. Tout cela ne change pas les mesures μ_n et ν_n. On définit alors γ_n sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ par :

$$\gamma_n = \frac{1}{(k+1)^2} \sum_{i \leq k,\, p \in \mathbb{Z}^d} \delta_{(x_{i,p}, y_{i,p})}.$$

Cette MRP a, d'après la proposition 2, un support cycliquement monotone. Elle admet respectivement μ_n et ν_n comme marginales. D'autre part, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ il existe $C_K > 0$ tel que $\gamma_n(K) \leq C_K$, $\forall\, n \geq 0$. En effet, si $K \subset [-N,N]^d \times \mathbb{R}^d$, on a $\gamma_n(K) \leq \mu_n([-N,N]^d) = (2N)^d$. On peut donc extraire une sous-suite, que nous noterons encore γ_n, telle que $\gamma_n \xrightarrow{\star} \gamma$, où γ est une MRP sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

On rappelle que si λ_n est une suite de MRP convergeant vers une MRP λ, alors, si $x_0 \in \operatorname{supp} \lambda$, il existe une suite $x_n \in \operatorname{supp} \lambda_n$ telle que $x_n \to x_0$. En approchant le support de γ par celui des γ_n, on vérifie que le support de γ est cycliquement monotone.

Une propriété essentielle du support de γ_n (et par extension du support de γ), obtenue par construction, est que : $(x,y) \in \operatorname{supp}(\gamma_n) \Longrightarrow |x - y| \leq \frac{\sqrt{d}}{2}$, puisque si $(x,y) \in \operatorname{supp}(\gamma_n)$ on a $|x-y| = \mathrm{d}(\overline{x}, \overline{y}) \leq \frac{\sqrt{d}}{2}$. On voit alors (en utilisant une fonction test dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$) que le fait d'avoir μ (ou ν) pour marginale passe de γ_n à γ.

On sait qu'il existe une fonction ϕ convexe (propre donc continue) sur $\mathbb{R}^d$ telle que $\operatorname{supp} \gamma \subset \partial\phi$ et donc pour γ-presque tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ on a $(x,y) \in \partial\phi$. Or ϕ est Lebesgue-presque partout, et donc μ-presque partout, différentiable. Il est alors immédiat (*voir* [8]) que $\nabla\phi$ transporte μ sur ν. Enfin, si $(x,y) \in \operatorname{supp}\gamma_n$, alors $\forall p \in \mathbb{Z}^d$, $(x+p, y+p) \in \operatorname{supp}\gamma_n$. Cette propriété est conservée par $\operatorname{supp}\gamma$. Par conséquent pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ et pour tout $p \in \mathbb{Z}^d$ on a $\nabla\phi(x+p) = \nabla\phi(x) + p$. Ce qui achève donc la démonstration de la première partie du théorème.

4. Régularité dans le théorème

La deuxième partie du théorème se montre en utilisant des résultats de Caffarelli ([5] et [6]). On note pour $x \in \mathbb{R}^d$: $\partial\phi(x) = \{y \in \mathbb{R}^d;\ (x,y) \in \partial\phi\}$. Le résultat suivant, qui figure implicitement dans [1], nous a été communiqué par S. Alesker.

LEMME 1. – *Avec les notations du théorème* 1, *si l'on suppose que les deux mesures μ et ν sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, on peut construire une fonction convexe ψ qui transporte ν sur μ et telle que : $\forall x,\ y \in \mathbb{R}^d$, $(x,y) \in \partial\phi \Longrightarrow (y,x) \in \partial\psi$, ce qui implique en particulier que $\nabla\psi$ est ν-presque partout l'inverse de $\nabla\phi$. De plus, si on note $A = \{x \in \mathbb{R}^d;\ \partial\phi(x)$ n'est pas unique$\}$, on a :*

$$\nu\big(\{y \in \mathbb{R}^d;\ \exists x \in A,\ (x,y) \in \partial\phi\}\big) = 0. \tag{3}$$

Démonstration. – Pour la première partie du lemme 1, qui repose sur le fait que la notion de cyclique monotonie est symétrique en x et y (*voir* [1]). Notons $B = \{y \in \mathbb{R}^d;\ \exists x \in A,\ (x,y) \in \partial\phi\}$ et $C = \{y \in B;\ \partial\psi(x)$ est unique$\}$. On sait que $\nu(B \setminus C) = 0$ et il faut donc prouver que $\nu(C) = 0$. On montre que $(x,y) \in \partial\phi$ et $y \in C \Longrightarrow x \in A$. Comme $\mu(A) = 0$, on a $\nu(C) = \mu(\nabla\phi^{-1}(C)) = 0$. $\square$

Les hypothèses de régularité du lemme 1 étant vérifiées, on peut définir sans ambiguïté, grâce à (3), pour tout borélien B, la mesure $\nu(\nabla\phi(B))$, et on a : $\nu(\nabla\phi(B)) = \mu(B)$. D'après les hypothèses faites sur les densités f et g, il existe alors des constantes λ et $\Lambda > 0$, telles que pour tout compact $K \in \mathbb{R}^d$: $\lambda \operatorname{vol}(K) \leq \operatorname{vol}(\nabla\phi(K)) \leq \Lambda \operatorname{vol}(K)$. Cela veut dire que ϕ vérifie sur $\mathbb{R}^d$ au sens faible d'Alexandrov : $\lambda \leq \det(\partial_{ij}\phi(x)) \leq \Lambda$. D'après [5], la fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$, et même $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ pour un certain $\alpha > 0$. La fonction $\nabla\phi$ est donc continue et inversible. On conclut alors grâce à [6].

Références bibliographiques

[1] Alesker S., Dar S., Milman V., A remarkable measure preserving diffeomorphism between two convex bodies in $\mathbf{R}^n$, Preprint, 1998.

[2] Benamou J.-D., Brenier Y., A numerical method for the Optimal Time-Continuous Mass Transport Problem and related problems, in: Monge–Ampère Equation: Applications to Geometry and Optimization, Contemp. Math. 226, 1999, pp. 1–11.

[3] Brenier Y., Décomposition polaire et réarrangement monotone des champs de vecteurs, C. R. Acad. Sci. Paris 305 Série I (1987) 805–808.

[4] Brenier Y., Polar factorization and monotone rearrangement of vector valued functions, Commun. Pure Appl. Math. 44 (1991) 375–417.

[5] Caffarelli L.A., Some regularity properties of the solutions of the Monge Ampere equation, Commun. Pure Appl. Math. 44 (1991) 965–969.

[6] Caffarelli L.A., The regularity of mappings with a convex potential, J. Amer. Math. Soc. 5 (1992) 99–104.

[7] Cullen M.P.J., Douglas R.J., Applications of the Monge–Ampère equation and Monge transport problem to meteorology and oceanography, in: Monge–Ampère Equation: Applications to Geometry and Optimization, Contemp. Math. 226, 1999, pp. 33–53.

[8] McCann R.J., Existence and uniqueness of monotone measure-preserving maps, Duke Math. J. 80 (1995) 309–323.

[9] McCann R.J., Polar factorization of maps on Riemannian maniflods, Preprint, 1999.

[10] Rockafellar, Characterization of the subdifferential of convex functions, Pacific J. Math. 17 (1966) 497–510.