Université de Marne-la-Vallée
Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées (UMR 8050)

Convexité, log-concavité et inégalités à la Brunn-Minkowski. Aspects géométriques, fonctionnels et probabilistes

Dario Cordero-Erausquin

Synthèse des travaux en vue de l'obtention de

l'Habilitation à Diriger des Recherches

Habilitation à Diriger des Recherches soutenue le 11 décembre 2006, devant un jury composé de :

- Keith Ball (rapporteur)
- Eric Carlen (rapporteur)
- Gilles Godefroy
- Michel Ledoux (rapporteur)
- Bernard Maurey
- Mathieu Meyer
- Alain Pajor
- Gilles Pisier

Remerciements

Bernard Maurey avait dirigé ma thèse de doctorat. J'ai eu la chance de pouvoir continuer à bénéficier de son immense science et à apprendre auprès de lui des mathématiques belles et variées. Je lui suis infiniment reconnaissant pour ses précieux conseils, ses suggestions et ses encouragements. J'ai aussi une grande dette, comme beaucoup d'autres jeunes chercheurs, envers Alain Pajor pour son investissement dans le programme scientifique européen PHD. Lui et Mathieu Meyer m'ont toujours apporté leur soutien et ont toujours été disponibles, scientifiquement, mais pas seulement. Ce trio de professeurs, qui me fait le plaisir de participer à mon jury, contribue à créer au sein du laboratoire de Marne-la-Vallée une ambiance de travail à la fois efficace et amicale. Merci à eux.

J'ai l'honneur d'avoir comme rapporteurs de mon HDR trois mathématiciens qui ont eu une grande influence sur mon travail de recherche : Keith Ball, Eric Carlen et Michel Ledoux. Je souhaite ici leur exprimer ma profonde gratitude et les remercier d'avoir accepté d'être rapporteurs de mes travaux et de venir de loin (parfois de très loin) pour participer au jury.

Je tiens également à remercier Gilles Godefroy et Gilles Pisier pour le plaisir et l'honneur qu'ils me font en participant à mon jury.

J'ai énormément appris lors d'échanges avec d'autres chercheurs et à ce titre je voudrais remercier également Franck Barthe, Matthieu Fradelizi, Wilfrid Gangbo, Olivier Guédon, Christian Houdré, Robert McCann, Michael Schmuckenschläger et Cedric Villani.

Du reste, merci à mes amis, à ma sœur et à mes parents, et bien sûr à Benedikte.

TABLE DES MATIÈRES

Travaux

Articles publiés ou sous presse

[**1**] F. Barthe, D. Cordero-Erausquin and B. Maurey, Entropy of Spherical marginals and related inequalities, *J. Math. Pures Appl.* 86 (2006), 89–99.

[**2**] D. Cordero-Erausquin, R.J. McCann and M. Schmuckenschläger, Prékopa–Leindler type inequalities on Riemannian manifolds, Jacobi fields and optimal transport, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, sous presse (2006).

[**3**] D. Cordero-Erausquin, On Berndtsson's generalization of Prékopa's theorem, *Math. Z.* 249 (2005), 401–410.

[**4**] D. Cordero-Erausquin, M. Fradelizi and B. Maurey, The (B)-conjecture for the Gaussian measure of dilates of symmetric convex sets and related problems, *J. Funct. Anal* 214 (2004), 410-427.

[**5**] F. Barthe and D. Cordero-Erausquin, Inverse Brascamp-Lieb inequalities along the Heat equation, in *Geometric Aspects of Functional Analysis (2002-2003)*, LNM 1850, Springer, 2004, pp. 65–71.

[**6**] D. Cordero-Erausquin, B. Nazaret and C. Villani, A mass transportation approach to sharp Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities, *Advances in Math.* 182 (2004), 307-332.

[**7**] D. Cordero-Erausquin, C. Houdré and W. Gangbo, Inequalities for generalized entropy and optimal transportation,in *Recent Advances in the Theory and Applications of Mass Transport*, Contemp. Math. 353, A.M.S., Providence, R.I., 2004, pp. 73–94.

[**8**] D. Cordero-Erausquin, Non-smooth differential properties of optimal transport, in *Recent Advances in the Theory and Applications of Mass Transport*, Contemp. Math. 353, A.M.S., Providence, R.I., 2004, pp. 61–71.

[**9**] D. Cordero-Erausquin, Santaló's inequality on $\mathbb{C}^n$ by complex interpolation, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 334 (2002), 767–772.

[**10**] D. Cordero-Erausquin, Some applications of mass transport to Gaussian type inequalities, *Arch. Rational Mech. Anal.* 161 (2002), 257–269.

[**11**] D. Cordero-Erausquin, R.J. McCann and M. Schmuckenschläger, A Riemannian interpolation inequality à la Borell, Brascamp and Lieb, *Invent. Math.* 146 (2001), 219–257.

[**12**] F. Barthe, D. Cordero-Erausquin and M. Fradelizi, Gaussian shift inequalities and norms of barycenters, *Studia Math.* 146 (2001), 245–259.

[**13**] D. Cordero-Erausquin, Inégalité de Prékopa–Leindler sur la sphère, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I.* 329 (1999), 789–792.

[**14**] D. Cordero-Erausquin, Sur le transport de mesures périodiques, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I.* 329 (1999), 199–202.

Texte d'exposition

[**15**] D. Cordero-Erausquin, Quelques exemples d'application du transport de mesure en géométrie euclidienne et riemannienne, *Séminaire de théorie spectrale et géométrie*, Grenoble, volume 22 (2004), 125–152.

Nota bene : Les notes aux C.R.A.S. retenues dans cette liste ne sont pas des notes d'annonce. Elles contiennent des résultats originaux, avec preuves, n'ayant pas fait l'objet d'une autre publication.

Les articles [**10**] à [**14**] font partie de notre thèse de doctorat, soutenue en décembre 2000 à l'Université de Marne-la-Vallée.

Avant-propos

Les travaux de ce mémoire touchent à des domaines des mathématiques à première vue éloignés – géométrie riemannienne, analyse complexe, inégalités euclidiennes, analyse fonctionnelle, probabilités, mécanique statistique. Ils sont cependant guidés par des principes communs que nous rappellerons dans l'introduction. Parmi ces principes, on trouve d'une part l'*inégalité de Brunn-Minkowski*, et d'autre part des *méthodes* de démonstration amenant naturellement à une étude transversale de problèmes ayant trait aux *inégalités* au sens large. Nous avons opté pour une présentation « classique » par domaine, mais nous verrons qu'en de nombreux cas, elle se confond avec un regroupement par méthode de démonstration. Les méthodes dominantes de nos travaux sont le transport de mesure, la méthode variationnelle (à la Bochner) et, aussi la méthode de semi-groupe (ou stochastique).

Les cinq parties se concentrent sur les travaux mentionnés dans la page précédente avec, essentiellement, le regroupement suivant :

Partie 1. 1.1 : [**10**] et [**7**] ; 1.2 : [**6**]
Partie 2. [**13**], [**11**] et [**2**]
Partie 3. 3.1 : [**3**] ; 3.2 : [**9**]
Partie 4. 4.1 : [**12**] et [**10**] ; 4.2 : [**4**]
Partie 5. 5.1 : [**5**] ; 5.3 : [**1**]

Bien que nous ayons tenté de mettre nos résultats en perspective avec d'autres travaux connus, ce mémoire n'est évidemment pas un *survey* du domaine puisque son but – bien plus modeste – est de présenter, de la manière la plus cohérente et accessible possible, nos travaux.

INTRODUCTION

Nous allons commencer par rappeler des résultats classiques autour de l'inégalité de Brunn-Minkowski et de ses formes fonctionnelles, en insistant sur les aspects qui influencent notre recherche. Dans un deuxième temps, nous présenterons les méthodes et les outils fréquemment utilisés.

L'inégalité de Brunn-Minkowski et ses versions fonctionnelles

Pour $A, B \subset \mathbb{R}^n$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $\lambda A = \{\lambda\, a\,; a \in A\}$ et

$$A + B = \{a + b\,;\ a \in A,\, b \in B\}.$$

L'inégalité de Brunn-Minkowski sur $\mathbb{R}^n$ – qu'il serait plus juste d'appeler **inégalité de Brunn-Minkowski-Lusternik** – donne la relation suivante entre la structure linéaire de $\mathbb{R}^n$ et la mesure de Lebesgue notée vol : pour $A, B \subset \mathbb{R}^n$,

$$\operatorname{vol}(A + B)^{1/n} \geq \operatorname{vol}(A)^{1/n} + \operatorname{vol}(B)^{1/n}. \tag{1}$$

Pour éviter des problèmes de mesurabilité on peut supposer, par exemple, que A et B sont σ-compacts. Cette inégalité, d'énoncé très simple, est riche d'enseignements. Remarquons qu'il n'est *a priori* pas évident de calculer le volume de $A+B$ puisqu'un élément $x \in A+B$ admet en général de nombreuses décompositions $x = a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B$. Les démonstrations de l'inégalité de Brunn-Minkowski font naturellement intervenir les « couplages » des éléments de A et de B.

On sait que l'inégalité de Brunn-Minkowski permet de retrouver l'inégalité isopérimétrique euclidienne. Si B_2^n désigne la boule euclidienne de rayon 1 pour la structure euclidienne usuelle $(\mathbb{R}^n, \cdot, |\cdot|)$, alors, $A + \varepsilon B_2^n$ consiste en l'ensemble des points à distance au plus $\varepsilon > 0$ de A. Pour un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ ayant un bord suffisamment régulier, la mesure de surface de son bord vaut donc

$$|\partial A| = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\operatorname{vol}(A + \varepsilon B_2^n) - \operatorname{vol}(A)}{\varepsilon}.$$

Supposons que $A \subset \mathbb{R}^n$ a la même mesure que B_2^n : $\operatorname{vol}(A) = \operatorname{vol}(B_2^n)$ (par homogénéité, c'est le cas général). Comme il y a égalité dans l'inégalité de Brunn-Minkowski (1) lorsque les ensembles sont homothétiques et convexes, on déduit de (1) que

$$\operatorname{vol}(A + \varepsilon B_2^n) \geq \operatorname{vol}(B_2^n + \varepsilon B_2^n),$$

et donc que

$$|\partial A| \geq |\partial B_2^n|.$$

On retrouve bien qu'à volume fixé, la boule euclidienne a la plus petite mesure de surface du bord. Nous reviendrons sur l'isopérimétrie dans la première partie lorsque nous étudierons les inégalités de Sobolev optimales. Nous renvoyons au livre de Schneider [**Schn93**] pour les applications classiques de l'inégalité de Brunn-Minkowski en géométrie des corps convexes et au livre de Pisier [**Pis89**] pour l'étude des formes inverses de l'inégalité de Brunn-Minkowski.

En énonçant l'inégalité de Brunn-Minkowski sous la forme équivalente suivante,

$$\text{vol}((1-t)A + tB)^{1/n} \geq (1-t)\text{vol}(A)^{1/n} + t\text{vol}(B)^{1/n}, \tag{2}$$

pour $t \in [0,1]$, on met en lumière la concavité de la fonctionnelle $\text{vol}^{1/n}$. Si l'on vise des extensions à d'autres structures géométriques, il est naturel, en comparant (1) et (2), de se demander s'il faut interpréter l'inégalité de Brunn-Minkowski comme un énoncé algébrique ou comme un énoncé métrique : nous donne-t-elle une information sur l'interaction entre le volume et la structure vectorielle, ou entre le volume et la structure géodésique (ici les segments). Par exemple, il est possible de définir, dans un espace métrique possédant des géodésiques, un analogue de $(1-t)x + ty$ (c'est la notion naturelle de barycentre). Et nous verrons justement que, sur une variété riemannienne de dimension n ayant une courbure positive, l'inégalité (2) (reformulée en termes de barycentre géodésique) est vraie [**CMS01**]. Il n'empêche que l'on peut aussi chercher à étendre la forme (1) au cas où on a une structure de groupe $(G,+)$ avec une mesure de Haar. Des cas particuliers comme $\mathbb{Z}$ ou le tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sont connus et sont liés aux progressions arithmétiques.

De (2) on tire que

$$\text{vol}((1-t)A + tB) \geq \text{vol}(A)^{1-t}\,\text{vol}(B)^t, \tag{3}$$

ce qui exprime la log-concavité du volume. En jouant astucieusement sur le paramètre $t \in [0,1]$ et en utilisant l'homogénéité du volume, on voit qu'en fait l'inégalité (3) pour tout t implique l'inégalité de Brunn-Minkowski.

A partir des années 70, on s'est intéressé à des inégalités fonctionnelles liées à l'inégalité de Brunn-Minkowski. Les formes fonctionnelles sont beaucoup plus riches que la forme géométrique (même lorsqu'elles sont formellement équivalentes) et ce, d'abord, parce qu'elles s'appliquent à des mesures autres que la mesure de Lebesgue. Ces formes fonctionnelles ont permis des avancées importantes en analyse harmonique, et en probabilités et sont encore source d'inspiration (voir par exemple les *surveys* [**DG80, Gar02, Mau05**]). L'inégalité la plus populaire est certainement la forme fonctionnelle de (3) due à Prékopa [**Pré71, Pré73**] et à Leindler [**Lei72**].

***Théorème* (Inégalité de Prékopa-Leindler)**. — *Soit $t \in (0,1)$ et $f, g, h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tels que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$,*

$$h((1-t)x + ty) \geq f^{1-t}(x) g^t(y). \tag{4}$$

Alors on a : $\displaystyle\int h \geq \left(\int f\right)^{1-t} \left(\int g\right)^t.$

On peut aussi énoncer ce résultat de manière condensée : pour $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ on a

$$\int \sup_{z=(1-t)x+ty} \left\{ f(x)^{1-t} g(y)^t \right\} \, dz \ \geq \ \left(\int f \right)^{1-t} \left(\int g \right)^t . \tag{5}$$

L'inégalité de Prékopa-Leindler peut donc se voir comme une forme inverse de l'inégalité de Hölder. On retrouve l'inégalité de Brunn-Minkowski sous sa forme multiplicative (3) en prenant $f = 1_A$ et $g = 1_B$, les fonctions indicatrices d'ensembles $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Mais on voit que si l'on remplace la mesure de Lebesgue par une mesure μ à densité *log-concave*, c'est-à-dire de la forme $d\mu(x) = e^{-V(x)} \, dx$ avec V convexe, alors la conclusion

$$\int h \, d\mu \geq \left(\int f \, d\mu \right)^{1-t} \left(\int g \, d\mu \right)^t$$

reste vraie dès que la condition (4) est vérifiée. En particulier, l'inégalité de Brunn-Minkowski sous sa forme multiplicative

$$\mu((1-t)A + tB) \geq \mu(A)^{1-t} \, \mu(B)^t$$

est vraie pour toute mesure μ à densité log-concave.

A titre d'application, donnons-nous une mesure μ à densité log-concave *paire* sur $\mathbb{R}^n$ et $C \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble *convexe symétrique* (au sens $C = -C$). On tire de l'inégalité de Brunn-Minkowski pour μ que la fonction $x \to \mu(x + C)$ est log-concave sur $\mathbb{R}^n$, et donc, par parité, que

$$\mu(x + C) \geq \mu(C), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

Cette inégalité, démontrée en fait par Anderson [**And55**] vingt ans avant les travaux de Prékopa et Leindler est motivée par des questions de statistiques.

Un exemple typique de mesure log-concave, outre la mesure de Lebesgue, est une mesure gaussienne (standard ou non) sur $\mathbb{R}^n$. Remarquons également que la restriction d'une mesure log-concave à un ensemble convexe est encore une mesure log-concave.

A la suite les travaux de Prékopa et de Leindler (mais aussi de Anderson, Rinnott, Henstock et MacBeath), Borell [**Bor75**] et Brascamp-Lieb [**BL76a**] ont indépendamment démontré des versions dimensionnelles liées directement à la forme (2) de Brunn-Minkowski. Ces deux travaux, pour des raisons différentes, ont eu une grande influence sur l'étude des inégalités fonctionnelles liées à la log-concavité et à la géométrie des corps convexes. Introduisons les moyennes M_t^k liées à la notion de *k-concavité*. Soit $t \in [0, 1]$ et $p \in \mathbb{R}$. Pour $a, b \geq 0$ on définit

$$\mathcal{M}_t^p(a, b) := \big((1-t)a^p + tb^p \big)^{1/p} \tag{7}$$

si $ab \neq 0$ et $\mathcal{M}_t^p(a, b) = 0$ si $ab = 0$. Remarquons que $\mathcal{M}_t^0(a, b) = a^{1-t} \, b^t$ est la moyenne géométrique. On remarque aussi que $\mathcal{M}_t^{-\infty}(a, b) = \min\{a, b\}$, alors que $\mathcal{M}_t^{+\infty}$ donne le max. Formellement, on a simplement introduit la norme L^p sur l'espace à deux points $\{0, 1\}$ muni de la mesure de probabilité $(1-t)\delta_0 + t\delta_1$; ce point de vue est utile pour obtenir des inégalités de Hölder ou de Jensen pour les moyennes $\mathcal{M}_t^p$.

***Théorème* (Borell-Brascamp-Lieb).** — *Soit $p \geq -1/n$. Étant donné $t \in [0,1]$ et $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, on pose pour $z \in \mathbb{R}^n$,*

$$h_t(z) := \sup_{z=(1-t)x+ty} \mathcal{M}_t^p(f(x), g(y)).$$

Alors on a, $\displaystyle\int h_t \geq \mathcal{M}_t^{p/(1+np)} \left(\int f \,, \int g \right)$.

Remarquons que le cas $p = 0$ est exactement l'inégalité de Prékopa-Leindler (5). En utilisant l'inégalité de Hölder pour les moyennes $\mathcal{M}_t^p$ on voit que l'inégalité pour un $p > -1/n$ se déduit du cas extrémal $p = -1/n$. Mais en fait, en utilisant l'homogénéité de la mesure, on peut encore montrer qu'elles sont équivalentes. On voit que, grâce à l'homogénéité, on peut énoncer le cas $p = -1/n$ sans faire intervenir de barycentres : pour $f, g : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_+$ telles que $\displaystyle\int f = \int g = 1$, on a

$$\int \sup_{z=x+y} \left(f(x)^{-1/n} + g(y)^{-1/n} \right)^{-n} dz \;\geq\; 1 \tag{8}$$

En prenant $f = 1_A/\mathrm{vol}(A)$ et $g = 1_B/\mathrm{vol}(B)$, on retrouve exactement la forme (1) de l'inégalité de Brunn-Minkowski puisqu'on a alors

$$\sup_{z=x+y} \left(f(x)^{-1/n} + g(y)^{-1/n} \right)^{-n} \;=\; \left(\mathrm{vol}(A)^{1/n} + \mathrm{vol}(B)^{1/n} \right)^{-n} 1_{A+B}(z).$$

Une fonction positive F est dite *k-concave*, pour $k \in \mathbb{R}$, si $\frac{1}{k} F^k$ est concave (sur son support), soit encore si l'on a, pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $t \in [0,1]$, $F((1-t)x + ty) \geq \mathcal{M}_t^k(F(x), F(y))$. Une mesure est *$k$-concave* si l'on a, pour $A, B \subset \mathbb{R}^n$ et $t \in (0,1)$,

$$\mu((1-t)A + tB) \geq \mathcal{M}_t^k(\mu(A), \mu(B)).$$

On s'intéresse au *plus grand k* possible pour lequel on a de la k-concavité, puisque k-concave $\Rightarrow$ k'-concave pour tout $k' \leq k$. Le théorème de Borell-Brascamp-Lieb dit que pour toute mesure μ sur $\mathbb{R}^n$ absolument continue (par rapport à la mesure de Lebesgue) et $k \geq -1/n$:

$$\text{la densité de } \mu \text{ est } k\text{-concave} \Longrightarrow \text{la mesure } \mu \text{ est } k_n\text{-concave, pour } k_n := \frac{k}{1+nk}.$$

Borell a observé que la réciproque est vraie aussi. Contrairement au cas de la log-concavité $k = 0$, il faut ici distinguer mesure et densité. Comme une fonction constante restreinte à un convexe (éventuellement $\mathbb{R}^n$) possède toutes les concavités possibles (en particulier elle est ∞-concave), on retrouve que la mesure de Lebesgue restreinte à un convexe est $1/n$-concave, ce qui est la plus grande k-concavité possible pour une mesure absolument continue. Ainsi la log-concavité est la notion naturelle de concavité lorsque la dimension est (ou plutôt tend vers) l'infini, ce qui est cohérent avec le fait que sous la forme (3) l'inégalité est sans dimension. C'est pour cela que l'étude des fonctions (ou des mesures) log-concaves est un élément central de la théorie asymptotique des corps convexes (lorsque la dimension tend vers l'infini), comme l'a mis en évidence K. Ball (sa thèse [**Bal86**] non publiée est sur ce point éloquente ; voir aussi [**Bal88, Bal01**]).

Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un corps convexe et $E_m \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace m-dimensionnel. En appliquant Brunn-Minkowski dans $E_m^\perp$ on voit que la fonction section $f_{E_m} : E_m \to \mathbb{R}_+$ associée

$$f_{E_m}(y) := \mathrm{vol}_{n-m}\big((y + E_m^\perp) \cap C\big), \quad \forall y \in E_m,$$

est $1/(n-m)$ concave sur E_m. En particulier, elle est log-concave. Cette log-concavité peut aussi s'obtenir à partir d'une forme plus faible de l'inégalité de Prékopa-Leindler appelée *théorème de Prékopa* qui affirme qu'*une marginale de fonction log-concave est log-concave.*

***Théorème* (Prékopa).** — *Soit $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe et définissons, pour $t \in \mathbb{R}$, $\phi(t)$ par*

$$e^{-\phi(t)} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varphi(t,x)}\, dx.$$

Alors la fonction ϕ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Ce résultat se déduit effectivement directement du théorème de Prékopa-Leindler. Il permet de montrer l'inégalité de Brunn-Minkowski pour les ensembles *convexes* et suffit pour retrouver l'inégalité d'Anderson (6). Il possède aussi d'autres applications intéressantes, comme le fait que la convolée de deux fonctions log-concaves est log-concave, et donc que la log-concavité est préservée le long du semi-groupe de la chaleur par exemple. Nous en donnerons plus loin une version complexe où la convexité est remplacée par la plurisousharmonicité.

On trouve ici un premier lien avec la notion essentielle de marginale, que l'on peut voir comme la projection d'une mesure sur un sous-espace, mais qui, du point de vue géométrique, revient aussi à considérer des moyennes le long de sections parallèles à un sous-espace. La convolution, ou plutôt, en anticipant, la loi du vecteur aléatoire $\dfrac{X+Y}{\sqrt{2}}$ pour deux vecteurs *iid* X et Y, fait intervenir la notion de marginale. A travers certains travaux récents et en cours, émerge petit à petit l'idée d'une unité entre certaines inégalités de théorie de l'information (faisant intervenir l'entropie) et des inégalités liés à Brunn-Minkowski et à la géométrie des corps convexes. Cela repose en partie (et parfois implicitement) sur la dualité au sens de Legendre entre $-H$ et la fonctionnelle $V \longrightarrow \log \int e^V$, où H est la fonctionnelle *entropie* définie par

$$H(\rho) = -\int \rho \log \rho \quad \text{si } \rho \text{ est une densité de probabilité, et } -\infty \text{ sinon.} \tag{9}$$

En effet, en utilisant l'inégalité de Jensen (pour la densité de probabilité ρ et la fonction log) on établit facilement que

$$\log \int e^V = \sup_\rho \left\{ \int \rho V + H(\rho) \right\} \quad \text{et} \ -H(\rho) = \sup_V \left\{ \int \rho V - \log \int e^V \right\}. \tag{10}$$

On voit que les résultats tels que Prékopa-Leindler (ou ses versions plus générales connues sous le nom de Brascamp-Lieb inverse et démontrées par Barthe [**Bar98b**] sur lesquelles nous reviendrons) peuvent s'écrire avec des fonctionnelles de la forme $\log \int e^V$. Par exemple, le théorème de Prékopa se résume à

$$\varphi(\cdot,\cdot) \text{ convexe } \Longrightarrow -\log \int e^{-\varphi(\cdot,x)}\, dx \ \text{ convexe.}$$

Un des objectifs de notre recherche est de comprendre comment des informations sur la structure d'un espace métrique mesuré (M, μ) peuvent permettre d'obtenir des inégalités géométriques à la Brunn-Minkowski. Nous verrons l'exemple de la courbure d'une variété riemannienne, le cas de potentiels plurisousharmoniques (qui laissent entrevoir le lien entre opérateurs différentiels, en l'occurrence le $\overline{\partial}$, et géométrie) et l'exemple des espaces gaussiens. Le cas de la mesure gaussienne permet d'éclairer ce point. Considérons l'espace de Gauss $(\mathbb{R}^n, \gamma_n)$ où γ_n est la mesure gaussienne (standard) sur $\mathbb{R}^n$,

$$d\gamma_n(x) = e^{-|x|^2/2} \frac{dx}{(2\pi)^{n/2}}.$$

Appliquons l'inégalité de Prékopa-Leindler (p. 6) à des fonctions f, g, h multipliées par la densité gaussienne. On ne se débarrasse pas de la densité gaussienne en utilisant qu'elle est log-concave, mais on exploite plutôt son caractère uniformément convexe – ou plus simplement l'égalité du parallélogramme

$$(1-t)|x|^2/2 + t|y|^2/2 - |(1-t)x + ty|^2/2 = t(1-t)|x-y|^2/2. \tag{11}$$

On trouve ainsi le résultat suivant :

Théorème. — *Soit* $t \in [0,1]$ *et* $f, g, h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *tels que* $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$h((1-t)x + ty) \geq e^{-t(1-t)\,|x-y|^2/2}\, f^{1-t}(x) g^t(y). \tag{12}$$

Alors on a : $\displaystyle\int h\, d\gamma_n \geq \left(\int f\, d\gamma_n\right)^{1-t} \left(\int g\, d\gamma_n\right)^t.$

Le facteur $e^{-t(1-t)\,|x-y|^2/2}$ peut être vu comme une conséquence de la *courbure* de l'espace de Gauss telle qu'elle apparaît dans les travaux de Bakry-Émery. Remarquons que le théorème reste vrai si l'on remplace la mesure gaussienne par n'importe quelle mesure μ de la forme $d\mu = e^{-V}\, dx$ avec $\operatorname{Hess} V \geq \operatorname{Id}$, puisque cela donne une inégalité $\geq$ dans (11) suffisante dans l'argument. Maurey [**Mau91**] est le premier à avoir utilisé cette forme gaussienne de l'inégalité de Prékopa-Leindler pour démontrer des inégalités de concentration de la mesure – nous reviendrons sur sa méthode dans la partie sur les variétés riemanniennes. Schmuckenschläger [**Schm95**] a remarqué l'applicabilité aux mesures e^{-V} uniformément convexes, et Bobkov et Ledoux [**BL00**] ont étendu cette méthode à l'étude des inégalités de Sobolev logarithmiques, entre autres.

Comme il y a égalité dans (11), le changement de fonctions opéré pour obtenir cette version gaussienne marche dans les deux sens, et donc que le théorème précédent est équivalent au théorème de Prékopa–Leindler, ce qui est un peu troublant. De fait, de nombreuses inégalités euclidiennes – comme les inégalités de convolution de Brascamp-Lieb et de Barthe – sont de façon naturelle des inégalités gaussiennes. Elles ont même une approche naturelle par semi-groupe gaussien ou par calcul stochastique brownien, comme nous le verrons plus loin. Là s'esquisse encore, à travers le caractère gaussien des inégalités considérées, des liens entre Brunn-Minkowski et des inégalités gaussiennes provenant de théorie de l'information ou liées à la convolution et au théorème de la limite centrale.

Outils et méthodes

Transport optimal de mesure (transport de Brenier et de McCann). — La méthode la plus fréquemment utilisée dans nos travaux pour démontrer des inégalités est le transport de mesure. Étant donné une mesure μ sur un espace mesurable Ω et T une application de Ω dans Ω, on désigne par $T_{\#}\mu$ la mesure image de μ par l'application T. Pour deux mesures μ et ν, on dit que T *transporte* μ sur ν si $T_{\#}\mu = \nu$. Étant donné deux mesures, il se peut qu'il y ait de nombreuses manières de transporter μ sur ν. L'idée, qui remonte à Gaspard Monge, est d'en trouver une *optimale* en certain sens. En fait, on peut aussi chercher un transport qui possède des propriétés géométriques sympathiques. Par exemple, sur $\mathbb{R}$, si on a deux mesures diffuses μ et ν, il y a un (unique) transport *croissant* de μ sur ν définit pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\mu\big(]-\infty, x]\big) = \nu\big(]x, T(x)]\big).$$

Le résultat suivant, démontré par Brenier et amélioré par McCann, peut être vu comme l'extension en dimension supérieure de ce transport.

***Théorème* (Transport de Brenier [Bre87, McC95]).** — *Soit μ et ν deux probabilités boréliennes sur $\mathbb{R}^n$. On suppose que μ est absolument continue (par rapport à la mesure de Lebesgue). Alors, il existe une fonction convexe φ telle que l'application $T = \nabla\varphi$ transporte μ sur ν, i.e. $\nabla\varphi_{\#}\mu = \nu$.*

Remarquons que $\nabla\varphi$ est bien défini presque partout (sur le domaine de φ), et donc μ-presque partout. Le transport de Brenier est défini de manière unique (μ-pp, bien sûr). Ce transport est le transport optimal pour le coût quadratique :

$$\inf_{T_{\#}\mu=\nu} \int |T(x) - x|^2 \, d\mu(x) = \int |\nabla\varphi(x) - x|^2 \, d\mu(x). \tag{13}$$

En fait, on a mieux. Le transport de Brenier est le minimiseur d'un problème variationnel « relaxé », connu sous le nom de *problème de Kantorovich*, et c'est d'ailleurs comme cela qu'il est construit en général. Étant donné un espace métrique (X, d) et deux mesures boréliennes μ et ν sur X, on peut considérer la *distance de Kantorovich-Rubinstein* notée d_W – certains parlent aussi de distance de Wasserstein – définie par

$$d_W(\mu, \nu)^2 = \inf_{\pi} \iint_{X\times X} d(x, y)^2 \, d\pi(x, y) \tag{14}$$

où l'*infimum* est pris sur toutes les probabilités boréliennes π sur $X \times X$ ayant pour marginales μ et ν respectivement. Dans les cas considérés ici, c'est bien la métrique d'une topologie faible sur l'espace des mesures ayant un moment d'ordre 2 fini. Dans le problème variationnel précédent (13), on se limitait aux π ayant pour support le graphe d'une application. Dans le cas de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, la mesure π optimale est justement donnée par $\pi = (\mathrm{Id} \times \nabla\varphi)_{\#}\mu$, où $\nabla\varphi$ est le transport de Brenier de μ sur ν, c'est-à-dire qu'on a

$$d_W(\mu, \nu)^2 = \int |\nabla\varphi(x) - x|^2 \, d\mu(x).$$

Supposons que μ et ν soient deux probabilités absolument continues sur $\mathbb{R}^n$, avec pour densité F et G, et soit $T = \nabla\varphi$ le transport de Brenier de μ sur ν. Par définition de la mesure image, on a :

$$\int b(y)G(y)\,dy = \int b(\nabla\varphi(x))F(x)\,dx, \tag{15}$$

pour toute fonction borélienne $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$. Si φ est régulière, le changement de variables $y = \nabla\varphi(x)$ montre alors que φ satisfait l'*équation de Monge-Ampère* :

$$F(x) = G(\nabla\varphi(x))\ \det \operatorname{Hess}_x \varphi. \tag{16}$$

Lorsque les densités F et G sont simplement dans L^1, le transport n'a aucune raison d'être régulier, mais cela ne pose pas de problème dans nos applications. En effet, en utilisant des arguments à la Lebesgue (après tout, $\nabla\varphi$ est « croissante »), McCann [**McC97**] a montré qu'il est possible de donner un sens $F(x)dx$-presque partout à cette équation. L'équation de Monge-Ampère est très utile, car comme $\operatorname{Hess}_x \varphi \geq 0$, on peut utiliser des inégalités pour les déterminants de matrices symétriques positives.

On utilisera aussi le transport optimal sur les variétés riemanniennes. *A priori*, le transport $\nabla\varphi$ n'a aucun sens sur une variété riemannienne, sauf sur le tore plat $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, ce qui nous a permis d'étendre dans [**C99b**] le résultat de Brenier au cas des densités périodiques. Dans le cas général, afin de distinguer la partie différentielle, il convient de s'intéresser au déplacement. Si l'on pose $\theta(x) := |x|^2/2 - \varphi(x)$, alors le transport prend la forme

$$T(x) = \nabla\varphi(x) = x + \nabla\theta(x). \tag{17}$$

On peut alors deviner la forme que prendra le transport sur une variété. Mais la propriété caractéristique de θ est que $\operatorname{Hess}\theta \geq -\mathrm{Id}$ (en un sens faible), ce qui est moins parlant que la convexité.

Donnons-nous une variété riemannienne M. Notons d la distance géodésique, $d$vol l'élément de volume riemannien et $(T_xM, \cdot\,, | \cdot |)$ la structure euclidienne sur l'espace tangent T_xM en $x \in M$. Enfin, $\exp_x : T_xM \longrightarrow M$ sera l'application exponentielle en $x \in M$. On doit à McCann l'extension riemannienne suivante du résultat de Brenier.

Théorème **([McC01])**. — *Soit μ et ν deux probabilités boréliennes absolument continues (à support compact). Alors, il existe une fonction $\theta : M \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $-\theta$ soit $d^2/2$-concave et telle que l'application*

$$F(x) = \exp_x(\nabla\theta(x)) \tag{18}$$

transporte μ sur ν, $F_{\#}\mu = \nu$.

Cette application est définie de façon unique et on l'appelle le transport optimal (ou transport de McCann) de μ sur ν. Elle minimise encore

$$\int d^2(x, G(x))\,d\mu(x)$$

parmi toutes les applications G transportant μ sur ν, et, comme précédemment, c'est aussi le minimiseur de la distance de Kantorovich-Rubinstein (14).

En fait, le théorème que nous avons énoncé est largement incomplet puisque nous n'avons pas défini ce qu'est une application $d^2/2$ concave. Pour des définitions précises, nous renvoyons à [**McC01, CMS01**]. En simplifiant, une fonction $\phi : M \to \mathbb{R}$ est $d^2/2$ concave s'il existe une fonction $\psi : M \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(x) = \inf_y\{d(x,y)^2/2 - \psi(y)\}$. Une conséquence utile, mise en valeur dans [**CMS01**], est que pour presque tout $x_0 \in M$, on a, en un sens faible,

$$\mathrm{Hess}_{x_0}\,\theta \geq -\left[\mathrm{Hess}_x\, d^2\big(\,\cdot\,, F(x_0)\big)/2\right]_{x=x_0}, \tag{19}$$

ce qui, dans le cas euclidien, redonne bien $\mathrm{Hess}\,\theta \geq -\mathrm{Id}$. La situation riemannienne est bien plus compliquée et la richesse du transport optimal est précisément qu'il dépend de la structure géodésique et de la fonction $d^2/2$.

Les applications du transport de mesure sur $\mathbb{R}^n$ à la théorie de Brunn-Minkowski ont une longue histoire. Knothe [**Kno57**] a introduit un transport qualifié parfois de « triangulaire » qu'il a utilisé pour démontrer l'inégalité de Brunn-Minkowski. Ce transport de Knothe a été utilisé par Bourgain pour établir des résultats de concentration sur les corps convexes, et par Gromov pour retrouver l'inégalité isopérimétrique. McCann [**McC94, McC97**] a été le premier à utiliser le transport de Brenier pour démontrer l'inégalité de Prékopa–Leindler. Il faut aussi mentionner les travaux importants de Barthe [**Bar98a, Bar98b**] où le transport de Brenier est utilisé pour démontrer des inégalités de convolution gaussiennes (Brascamp-Lieb, Brascamp-Lieb inverse, Young).

Méthodes variationnelles, méthodes de semi-groupes ou stochastiques. — Dans certaines situations – par exemple gaussiennes – on est amené à travailler sur un espace X avec une probabilité μ et un certain opérateur différentiel L. Cet opérateur L induit une notion de gradient (ou plus précisément une forme de Dirichlet sur X). Typiquement, L est un laplacien adapté à la mesure μ.

Dans ce cadre, la méthode variationnelle consiste à utiliser la structure $L^2(\mu)$ dans des problèmes d'optimisation. En général, on veut montrer une inégalité faisant intervenir $\|\nabla f\|_{L^2(\mu)}$. On peut aussi parler de méthode duale (ou d'estimation *a priori*), puisqu'on est amené à poser

$$f = Lu$$

et à utiliser une formule d'intégration par parties pour

$$\int (Lu)^2\, d\mu.$$

Cette méthode recoupe donc aussi ce qu'on a coutume d'appeler la *méthode de Bochner*. Nous ne chercherons pas à donner ici une formulation formelle précise. Signalons simplement que nous utiliserons ce type de méthode pour étudier des formes complexes de l'inégalité de Prékopa et pour démontrer certaines inégalités spectrales de type gaussien.

L'algèbre cachée dans cette méthode apparaît aussi lorsque l'on fait du calcul stochastique d'Itô, ce qui a été formalisé dans le cadre général des semi-groupes Markovien $P_t = e^{tL}$ par Bakry et Émery. Nous considérerons essentiellement le semi-groupe de la chaleur

$$\partial_t f = \frac{1}{2}\Delta f$$

sur une variété riemannienne. La méthode de semi-groupe a connu un grand succès dans l'établissement d'inégalités de type Sobolev logarithmique ou de concentration, entre autres. Nous reviendrons sur ce point dans la première et la dernière partie. De fait, il existe une certaine compétition entre les méthodes de semi-groupe et les méthodes de transport. Nous

nous offrirons le luxe de changer de bord au cours de cet exposé ! Lorsqu'on démontre une inégalité en utilisant un semi-groupe, on montre qu'en fait une certaine quantité est croissante le long du semi-groupe. Ainsi, la méthode de semi-groupe donne une information très forte qui va au-delà de l'inégalité elle-même. Il arrive qu'en fait on puisse avoir une information encore plus forte, à savoir la croissance de cette quantité sur chaque trajectoire du processus Markovien sous-jacent. C'est pourquoi, l'approche par calcul stochastique (qui est en quelque sorte en amont de la méthode par semi-groupe) peut aussi se révéler instructive, même si, en fin de compte, on se contente d'utiliser la forme « moyennée » donnée par le semi-groupe.

Notons P_t le semi-groupe de la chaleur sur $\mathbb{R}^n$. Borell [**Bor93, Bor00**] a donné plusieurs preuves par semi-groupe de l'inégalité de Prékopa-Leindler. Il a également mis en valeur une formule stochastique qui, bien que nous ne l'ayons pas explicitement utilisée dans nos travaux publiés, a été, surtout récemment, une source d'inspiration importante. Afin de l'expliciter, donnons-nous un mouvement brownien standard $(B_t)_{t\geq 0}$ sur $\mathbb{R}^n$ muni de sa filtration naturelle $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, et notons, pour $t > 0$ fixé, $\mathcal{U}_t(\mathcal{F})$ l'ensemble des processus $(U_s)_{s\leq t}$ à valeur dans $\mathbb{R}^n$ progressivement mesurables par rapport à $(\mathcal{F}_s)_{0\leq s\leq t}$. A l'aide de la formule d'Itô, on montre la formule suivante, que nous appellerons *formule de Borell* (observée dans [**Bor00**]) : pour $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (suffisamment régulière) et $x \in \mathbb{R}^n$ fixé,

$$-\log P_t\big(e^{-V}\big)(x) \;=\; \inf_{u\in\mathcal{U}_t(\mathcal{F})} \mathbb{E}\Big[V\big(X_t^u\big) + \frac{1}{2}\int_0^t |u_s|^2\, ds\Big] \tag{20}$$

où $X_t^u = x + B_t + \int_0^t u_s\, ds$. Le processus $(X_s^u)_{s\leq t}$ est donc le processus partant de x de *drift* u :

$$dX_s^u = dB_s + u_s\, ds.$$

Si l'on introduit $V_s = -\log(P_{t-s}e^V)$ pour $s \leq t$, qui vérifie l'équation

$$\partial_s V_s = \frac{1}{2}\big(\Delta V_s - |\nabla V_s|^2\big),$$

alors on constate qu'il y a égalité dans (20) précisément lorsque $u_s = -\nabla V_s(X_s^u)$, c'est-à-dire pour le processus

$$dX_s = dB_s - \nabla V_s(X_s)\, ds. \tag{21}$$

On remarquera que ce processus dépend du $t > 0$ que l'on s'est fixé au départ.

Élément de comparaison : $\log\int e^V$. — Nous allons brièvement, et sans être nécessairement rigoureux, donner un élément de comparaison entre les méthodes décrites plus haut. Nous avons déjà vu que la fonctionnelle $\log\int e^V$ était naturelle. Nous allons nous placer ici dans un cadre gaussien sur $\mathbb{R}^n$. La première estimation possible consiste à utiliser l'inégalité de Jensen,

$$\log\int e^V\, d\gamma_n \geq \int V\, d\gamma_n,$$

mais on perd beaucoup en général. Utilisons les méthodes présentées plus haut pour avoir une meilleure estimation.

Nous allons écarter la méthode variationnelle. L'expression $\log\int e^V$ se combine mal avec du calcul L^2 et c'est pour cela que, lorsqu'on veut avoir une approche L^2, on travaille avec une forme « dérivée » de $\log \int e^V$ (penser à l'information *versus* l'entropie) sur laquelle on peut élaborer une approche variationnelle, comme le suggère le travail de Ball, Barthe et Naor [**BBN03**]. Nous illustrerons cette approche dans la partie consacrée à la forme complexe du théorème de Prékopa.

Notons $g_n(x) = e^{-|x|^2/2}/(2\pi)^{n/2}$ la densité gaussienne. Commençons par calculer $\log \int e^V \, d\gamma_n$ en faisant un changement de variable $y = T(x)$ pour une application (suffisamment régulière) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Si l'on enchaîne avec l'inégalité de Jensen, on a

$$\log\int e^V \, d\gamma_n = \log\int e^{V(T)}|\det dT| g_n(T) \geq \int \Big[V(T) + \log|\det dT| + \log g_n(T) - \log g_n\Big] \, d\gamma_n.$$

On voit qu'il y a égalité si

$$\frac{e^{V(T)}\, g_n(T)\, |\det dT|}{g_n} = \text{constante} = \int e^V \, d\gamma_n,$$

c'est-à-dire précisément quand T transporte γ_n sur $e^V \, d\gamma_n / \int e^V \, d\gamma_n$. Ainsi, en écrivant $T = \mathrm{Id} + S$ pour $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et en développant les carrés dans l'expression $\log g_n(T) - \log g_n = -|x+S|^2/2 + |x|^2/2$, on a :

Formule 1

$$\log\int e^V \, d\gamma_n = \sup_{T = \mathrm{Id}+S} \int \Big[V(T(x)) + \log|\det dT_x| - S(x)\cdot x - |S(x)|^2/2\Big] \, d\gamma_n(x). \tag{22}$$

De plus il y a égalité lorsque $T = \mathrm{Id} + S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ transporte γ_n sur $e^V \, d\gamma_n / \int e^V \, d\gamma_n$. En particulier, il y a égalité si $T(x) = \nabla\varphi(x) = x + \nabla\theta(x)$ est le transport de Brenier (17) entre γ_n et $e^V \, d\gamma_n / \int e^V \, d\gamma_n$.

L'autre formule que l'on peut utiliser est la formule de Borell (20) en $t = 1$ pour $x = 0$ puisque $\int e^V \, d\gamma_n = P_1(e^V)(0)$.

Formule 2

$$\log\int e^V \, d\gamma_n \; = \; \sup_{u\in\mathcal{U}_t} \mathbb{E}\Big[V\big(X_1^u \, ds\big) - \frac{1}{2}\int_0^1 |u_s|^2 \, ds\Big] \tag{23}$$

avec $X_1^u = B_1 + \displaystyle\int_0^1 u_s \, ds$. De plus, il y a égalité pour un bon choix de *drift* u.

Pour voir ces formules en action, décrivons comment elles permettent d'obtenir l'inégalité de Prékopa–Leindler sous sa forme gaussienne (p. 10), et pour simplifier les notations, prenons $t = 1/2$. Si l'on écrit $f = e^{V_0}$, $g = e^{V_1}$ et $h = e^{V_{1/2}}$, l'hypothèse (12) devient, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$V_{1/2}\big(\frac{x+y}{2}\big) \geq \frac{V_0(x) + V_1(y)}{2} - |y-x|^2/8. \tag{24}$$

Le but est donc de montrer que $\int e^{V_{1/2}} \, d\gamma_n \geq \sqrt{\int e^{V_0} \, d\gamma_n \, \int e^{V_1} \, d\gamma_n}$. Par homogénéité, on peut supposer que $\int e^{V_0} \, d\gamma_n = \int e^{V_1} \, d\gamma_n = 1$, et montrer que $\int e^{V_{1/2}} \, d\gamma_n \geq 1$.

Avec la **formule 1** (qui n'est pas la plus rapide...), on va prendre deux transports de Brenier $T_0 = \nabla\phi_0 = \mathrm{Id} + S_0$ et $T_1 = \nabla\phi_1 = \mathrm{Id} + S_1$ entre γ_n et, respectivement, $e^{V_0} d\gamma_n$ et

$e^{V_1}d\gamma_n$, dont on sait qu'ils donnent une égalité dans la formule. Pour calculer $\int e^{V_{1/2}}\,d\gamma_n$, on utilise l'application test

$$T := \frac{T_0+T_1}{2} = \mathrm{Id} + = \mathrm{Id}\, + S \quad \text{ avec } S := \frac{S_0+S_1}{2}.$$

Le but est de minorer l'expression en faisant apparaître les formules pour V_0 et V_1. Le terme $S(x)\cdot x$ est linéaire et donc se sépare bien en $S_0(x)\cdot x/2$ et $S_1(x)\cdot x/2$. Pour le déterminant, on utilise le fait qu'il soit log-concave sur les matrices positives :

$$\log\det dT \geq \frac{1}{2}\log\det dT_0 + \frac{1}{2}\log\det dT_1.$$

Le terme quadratique se combine avec l'hypothèse sur les fonctions, puisque $T_0-T_1 = S_0-S_1$:

$$\begin{aligned} V_{1/2}\big(\frac{T_0+T_1}{2}\big) - |S|^2/2 &\geq \frac{V_0(T_0)+V_1(T_1)}{2} - |S_0-S_1|^2/8 - |S|^2/2 \\ &= \frac{V_0(T_0)+V_1(T_1)}{2} - |S_0-S_1|^2/8 - |S_0+S_1|^2/8 \\ &= \frac{V_0(T_0)-|S_0|^2/2}{2} + \frac{V_1(T_1)-|S_1|^2/2}{2} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'égalité du parallélogramme (on remarquera qu'une inégalité serait suffisante, ce qui veut dire qu'on utilise seulement de l'uniforme convexité). Cela montre bien que $\log\int e^{V_{1/2}}\,d\gamma_n$ est plus grand que la demi-somme des mêmes expressions avec V_0 et V_1, ce qui donne le résultat voulu.

Si l'on utilise, comme le fait Borell, la **formule 2**, on prend deux *drifts* optimaux u^0 et u^1 pour V_0 et V_1, et le *drift*

$$v := \frac{u^0+u^1}{2}$$

pour estimer $\log\int e^{V_{1/2}}\,d\gamma_n$. On remarque que $X^v_s = \frac{X^{u^0}_s + X^{u^1}_s}{2}$. Comme dans la fin de la preuve précédente, l'hypothèse sur les fonctions se combine avec le terme quadratique $|v_s|^2$, mais on doit utiliser en plus une inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} V_{1/2}\big(\frac{X^{u_0}_1 + X^{u^1}_1}{2}\big) - \frac{1}{2}\int_0^1 \Big|\frac{u^0_s+u^1_s}{2}\Big|^2 ds &\geq \frac{V_0(X^{u^0}_1)+V_1(X^{u^1}_1)}{2} - \Big|\int_0^1 (u^0_s-u^1_s)\,ds\Big|^2/8 \\ &\qquad - \int_0^1 \Big|u^0_s+u^1_s\Big|^2 ds/8 \\ &\geq \frac{V_0(X^{u^0}_1)+V_1(X^{u^1}_1)}{2} - \int_0^1 \Big|u^0_s-u^1_s\Big|^2 ds/8 \\ &\qquad - \int_0^1 \Big|u^0_s+u^1_s\Big|^2 ds/8 \\ &= \frac{V_0(X^{u^0}_1) - \frac{1}{2}\int_0^1 |u^0_s|^2}{2} + \frac{V_1(X^{u^1}_1) - \frac{1}{2}\int_0^1 |u^1_s|^2}{2} \end{aligned}$$

On retrouve bien à droite la demi-somme des expressions (optimales) pour V_0 et V_1, ce qui achève la démonstration.

Ces deux preuves de l'inégalité de Prékopa-Leindler, leurs ingrédients, apparaîtront en filigrane de nombreuses fois dans notre exposé.

1. INÉGALITÉS DE SOBOLEV LOGARITHMIQUES ET DE SOBOLEV OPTIMALES PAR TRANSPORT DE MESURE

Dans [**BL00**], Bobkov et Ledoux ont montré, en étendant l'approche de Maurey [**Mau91**], que l'on pouvait déduire de l'inégalité de Prékopa-Leindler (p. 6) des inégalités de Sobolev logarithmiques. Il nous a alors semblé naturel de chercher à voir si, en remontant d'un cran vers la source, le transport de mesure ne permettait pas une approche simple de l'inégalité de Sobolev logarithmique. Les travaux d'Otto [**Ott01**] puis d'Otto et Villani [**OV00**] avaient mis en lumière des liens riches et profonds entre l'inégalité de Sobolev logarithmique et l'interpolation des mesures (au sens du transport optimal). L'approche d'Otto et Villani reposait sur l'interpolation des densités le long du transport et sur les EDP satisfaites par ces densités.

Dans [**C02b**] nous avons proposé une approche simple et directe des inégalités de Sobolev logarithmiques (de type gaussien) en utilisant le transport de Brenier. Avec Wilfrid Gangbo et Christian Houdré [**CGH04**], nous avons considéré un cadre plus général. Ces travaux nous ont naturellement amené à étudier des inégalités dimensionnelles importantes, et provenant d'un domaine *a priori* différent, à savoir les inégalités de Sobolev dans $\mathbb{R}^n$. Avec Bruno Nazaret et Cédric Villani, nous avons proposé dans [**CNV04**] une approche par transport des inégalités de Sobolev et de Gagliardo-Nirenberg *optimales*.

1.1. Inégalités de Sobolev logarithmiques

Les inégalités de Sobolev logarithmiques (ou de log-Sobolev) donnent une information de type isopérimétrique en grandes dimension et permettent de contrôler la convergence de l'entropie vers son minimum pour des systèmes contenant un grand nombre de particules. Pour cette dernière raison elles interviennent en mécanique statistique et en théorie cinétique. Les travaux de Bakry, Émery, Talagrand et Ledoux, entre autres, ont mis en valeur leurs liens avec les problèmes de type isopérimétrique et de concentration de la mesure, et aussi, à la suite de Nelson et Gross, avec des questions d'hypercontractivité des semi-groupes. Ledoux [**Led99, Led00, Led01**] a fourni une exposition détaillée et pédagogique de ces aspects.

L'inégalité de log-Sobolev pour la mesure gaussienne standard γ_n sur $\mathbb{R}^n$, sous la forme due à Gross, s'écrit :

$$\int f \log f \, d\gamma_n \leq \frac{1}{2} \int \frac{|\nabla f|^2}{f} \, d\gamma_n,$$

pour toute fonction suffisamment régulière $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\displaystyle\int f\, d\gamma_n = 1$. Le terme de gauche (resp. de droite) est l'*entropie* (resp. l'*information de Fisher*) de f – ou, si l'on préfère, de la densité de probabilité $f\, d\gamma_n$ – par rapport à γ_n. On remarquera que la dimension n'intervient pas et que l'on peut énoncer le même résultat en dimension infinie (par exemple dans un espace de Gauss).

Voici la preuve par transport donnée dans [**C02b**]. Introduisons le transport de Brenier $T = \nabla\varphi$ entre $f\, d\gamma_n$ et γ_n. On introduit la fonction $\theta(x) := \varphi(x) - |x|^2/2$ de sorte que le transport s'écrit $\nabla\varphi(x) = x + \nabla\theta(x)$. L'application $\nabla\theta(x) = T(x) - x$ est le déplacement et on a $\mathrm{Hess}_x\,\varphi = I + \mathrm{Hess}_x\,\theta$. L'équation de Monge-Ampère (16) devient

$$f(x)e^{-|x|^2/2} = e^{-|x+\nabla\theta(x)|^2/2}\det\big(I + \mathrm{Hess}_x\,\theta\big).$$

En prenant le log de cette équation et en développant les carrés, on trouve

$$\log f = -|\nabla\theta|^2/2 - x\cdot\nabla\theta + \log\det\big(I + \mathrm{Hess}_x\,\theta\big).$$

Comme $\log(1+t) \le t$ si $1+t \ge 0$, on a $\log\det\big(I + \mathrm{Hess}\,\theta\big) \le \mathrm{tr}\,\mathrm{Hess}\,\theta = \Delta\theta$ et donc

$$\log f \le -|\nabla\theta|^2/2 - x\cdot\nabla\theta + \Delta\theta.$$

Intégrons cette inégalité par rapport à $f\, d\gamma_n$ et remarquons que, par intégration par parties (on a fait apparaître le générateur d'Ornstein-Uhlenbeck classique qui est le laplacien gaussien),

$$\int (\Delta\theta - x\cdot\nabla\theta)\, f\, d\gamma_n = -\int \nabla\theta\cdot\nabla f\, d\gamma_n.$$

On obtient donc

$$\int f\log f\, d\gamma_n \le -\frac{1}{2}\int |\nabla\theta|^2 f\, d\gamma\; - \int \nabla\theta\cdot\nabla f\, d\gamma_n.$$

En utilisant

$$-a\cdot b \le \frac{1}{2}|a|^2 + \frac{1}{2}|b|^2, \tag{25}$$

on retrouve exactement l'inégalité voulue : $\displaystyle\int f\log f\, d\gamma_n \le \frac{1}{2}\int \frac{|\nabla f|^2}{f}\, d\gamma_n$.

On peut démontrer de la même façon l'inégalité de transport de Talagrand, mais on doit alors transporter γ_n sur $f\, d\gamma_n$. Plus généralement, il est naturel de s'intéresser au changement d'entropie le long du transport. On peut considérer aussi une mesure de probabilité plus générale, typiquement une probabilité log-concave μ telle que $d\mu = e^{-V}dx$ avec $\mathrm{Hess}\,V \ge \mathrm{Id}$ (condition considérée par Bakry et Émery). Étant donné une densité de probabilité, on introduit l'entropie relative par rapport à μ de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ telle $\displaystyle\int f\, d\mu = 1$,

$$\mathrm{Ent}_\mu(f) := \int f\log f\, d\mu. \tag{26}$$

On a :

Théorème 1.1 ([**C02b**]). — *Soit μ une probabilité sur $\mathbb{R}^n$ de la forme $d\mu(x) = e^{-V(x)}dx$, où V de classe C^2 est telle que* $\mathrm{Hess}\,V \ge c\,\mathrm{Id}$ *pour un certain $c \in \mathbb{R}$. Soit $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$*

deux fonctions positives (à support compact pour simplifier), telles que f est C^1 et $\int f\,d\mu = \int g\,d\mu = 1$. Soit $T(x) = x + \nabla\theta(x)$ le transport de Brenier entre $f\,d\mu$ et $g\,d\mu$. Alors on a :

$$\mathrm{Ent}_\mu(g) - \mathrm{Ent}_\mu(f) \geq \int \nabla f \cdot \nabla\theta\,d\mu + \frac{c}{2}\int |\nabla\theta|^2 f\,d\mu. \tag{27}$$

La preuve est identique en utilisant en lieu et place du développement des carrés que

$$V(x+y) - V(x) \geq \nabla V(x)\cdot y + c|y|^2/2. \tag{28}$$

Lorsque $c > 0$ (cas d'un potentiel V uniformément convexe), on peut déduire du théorème précédent des inégalités de Sobolev logarithmiques et de transport. En prenant $g \equiv 1$ (ou plutôt $g \to 1$) dans (27) et en utilisant $-a\cdot b \leq \frac{1}{2c}a^2 + \frac{c}{2}b^2$ pour se débarrasser du $\nabla\theta$, on retrouve l'inégalité de Sobolev logarithmique de Bakry-Émery [**BÉ85**]

$$\mathrm{Ent}_\mu(f) \leq \frac{1}{2c}\int \frac{|\nabla f|^2}{f}\,d\mu.$$

En prenant $f \equiv 1$ dans (27) on trouve, puisque $T(x) = x + \nabla\theta$ transporte μ sur $g\,d\mu$ (c'est même le transport optimal),

$$\mathrm{Ent}_\mu(g) \geq \frac{c}{2}\,d_W^2(\mu,\, g\,d\mu),$$

où d_W est la distance de Kantorovich-Rubinstein (p. 11). Dans le cas de la mesure gaussienne $\mu = \gamma_n$, cette inégalité est due à Talagrand [**Tal96**] à la suite de travaux de Marton. Le cas plus général retrouvé ici a été observé par Otto et Villani [**OV00**], Bobkov et Ledoux [**BL00**] et Blower [**Blo03**].

Il est naturel de s'intéresser à des conditions d'uniforme convexité plus générales que (28) et à d'autres entropies (et donc à d'autres informations) . C'est ce que nous avons fait dans notre travail avec Gangbo et Houdré. On peut étendre les résultats précédents et par exemple obtenir l'inégalité de log-Sobolev généralisée suivante :

Théorème 1.2 **([CGH04])**. — *Soit μ une probabilité sur $\mathbb{R}^n$ de la forme $d\mu = e^{-V}\,dx$. On suppose qu'il existe une fonction convexe $c : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$V(a+b) \geq V(a) + \nabla V(a)\cdot b + c(b), \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}^n. \tag{29}$$

Alors, pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $\int f\,d\mu = 1$ on a

$$\int f\log f\,d\mu \leq \int c^*\Big(-\frac{\nabla f}{f}\Big)\,f\,d\mu$$

où c^* désigne la transformée de Legendre de c.

En fait, on un un résultat général (sans hypothèse de convexité sur c) analogue à celui du théorème 1.1 :

$$\mathrm{Ent}_\mu(g) - \mathrm{Ent}_\mu \geq (f) \geq \int \nabla f\cdot\nabla\theta\,d\mu + \int c\big(\nabla\theta\big)\,f\,d\mu.$$

La démonstration du théorème suit en grande partie le cas gaussien donnée plus haut. Au lieu de développer les carrés on utilise (29), et à la place de (25), on utilise

$$-a\cdot b \leq c(a) + c^*(-b).$$

En général, c est paire. Quand V est uniformément convexe, $\operatorname{Hess} V \geq \lambda I$, la condition (29) est vérifiée pour $c(b) := \lambda|b|^2/2$ et on retrouve alors le résultat de Bakry-Émery puisque $c^*(a) = |a|^2/(2\lambda)$. Mais le théorème s'applique aussi au cas d'un potentiel V uniformément p-convexe par rapport à une certaine norme $\|\cdot\|$. On retrouve alors une inégalité de log-Sobolev due à Bobkov et Ledoux [**BL00**]. Remarquons que si deux couples (V_1, c_1) et (V_2, c_2) vérifient chacun la condition (29), alors le couple $(V_1 + V_2, c_1 + c_2)$ la vérifie aussi. En particulier on peut considérer la somme de potentiels p et q-convexes (et alors le c correspondant n'est plus homogène).

On peut aussi considérer des fonctionnelles d'entropie plus générales comme les entropies de Rényi. Il convient ici de changer un peu de terminologie et de travailler avec des densités ρ (par rapport à la mesure de Lebesgue) sur $\mathbb{R}^n$. Ainsi, ρ va jouer le rôle de $f\, d\mu$. On considère pour un potentiel V et $m \neq 1$, l'entropie

$$H_m(\rho) := \int \frac{1}{m-1}\rho^m + \int \rho V.$$

Cette fonctionnelle entropie est minimale pour la densité

$$\rho_{\infty,m}(x) := \left(\sigma_m + \frac{1-m}{m} V(x)\right)_+^{-1/(1-m)},$$

où σ_m est une constante de normalisation. Dans le cas quadratique $V(x) = |x|^2/2$, cette densité s'appelle un profil de *Barenblatt*. On la retrouvera dans l'étude des inégalités de Sobolev – en fait, dans le cas $V(x) = |x|^2/2$, les inégalités considérées ici s'obtiennent aussi comme des cas limite d'inégalités de Gagliardo-Nirenberg, voir [**DPD02**]. Pour faire le lien avec les notations précédentes, notons que lorsque $m \to 1$, on $\rho_{\infty,1} = e^{-V}$ et que

$$H_1(\rho) - H_1(\rho_{\infty,1}) = \operatorname{Ent}_{\rho_{\infty,1}}(\rho/\rho_{\infty,1}).$$

Le terme de gauche est justement l'entropie relative à $\rho_{\infty,1}$. Lorsque qu'on travaille avec de telles entropies, on ne peut plus parler de log-Sobolev (il n'y a plus de log), et on peut se demander quelle est la fonctionnelle *information* à considérer. L'information apparaît souvent comme la production (infinitésimale) d'entropie le long d'un processus d'évolution. Pour un potentiel V et une fonction (qui représente un coût) c strictement convexe, et pour simplifier, paire, de transformée de Legendre c^*, nous avons, dans [**CGH04**] considéré l'équation cinétique (parabolique-elliptique)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left[-\rho \nabla c^*\left(\nabla\left(\frac{m}{m-1}\,\rho^{m-1} + V\right)\right)\right] = 0 \tag{30}$$

dont la solution (pour une densité de probabilité de départ ρ_0) converge vers $\rho_{\infty,m}$. Remarquons que le terme dans la divergence s'écrit très formellement $-\rho\nabla c^*\big[\nabla\big(\frac{\delta H_m}{\delta\rho}\big)\big]$. Cela nous amène à définir (en regardant l'évolution de l'entropie H_m) l'information (ou plutôt la production d'entropie) relative à $\rho_{\infty,m}$ suivante

$$I_{c_*}(\rho|\rho_{\infty,m}) = \int \nabla\big(\frac{m}{m-1}\rho^{m-1} + V\big) \cdot \nabla c^*\big[\nabla\big(\frac{m}{m-1}\rho^{m-1} + V\big)\big]\,\rho.$$

On montre, en suivant la méthode précédente (mais les notations sont plus compliquées) que, sous l'hypothèse (29), on a

$$H_m(\rho) - H_m(\rho_{\infty,m}) \leq \int c^*\big(\nabla\big(\frac{m}{m-1}\rho^{m-1} + V\big)\big)\,\rho \leq I_{c_*}(\rho|\rho_{\infty,m}).$$

Notons que cette inégalité permet en retour de contrôler la convergence de l'entropie H_m pour les solutions de l'équation (30). Cela étend des résultats obtenus dans le cas $c(x) = |x|^2/2$ par Arnold, Carrillo, Juengel, Markovich et Unterreiter [**AMTU01, CJM$^+$01**] en utilisant une méthode de semi-groupe à la Bakry-Émery, et par Del Pino et Dolbeault [**DPD02**] en utilisant des méthodes fines de calcul des variations – travail dont nous avons eu connaissance assez tard, lorsque nous avons commencé à nous intéresser aux inégalités de Sobolev. Mentionnons pour finir que notre méthode nous permet de traiter le cas où l'on ajoute à l'entropie un terme non local de la forme

$$\int \rho\, W * \rho,$$

où $W * \rho$ est la convolée de ρ avec un nouveau potentiel convexe W. Nous retrouvons alors des résultats de Carrillo, McCann et Villani [**CMV03**].

1.2. Inégalités de Sobolev et de Gagliardo-Nirenberg optimales

Nous allons maintenant présenter notre travail avec Nazaret et Villani [**CNV04**] qui propose une approche par transport des inégalités de Sobolev et de Gagliardo-Nirenberg optimales.

Nous avons montré dans l'introduction que l'inégalité de Brunn-Minkowski permet de retrouver l'inégalité isopérimétrique. Gromov [**MS86**] en a donné une preuve directe à l'aide du transport de Knothe. Dans ce travail remarquable, Gromov considère en fait la forme (équivalente) fonctionnelle optimale de l'isopérimétrie appelée parfois inégalité de Sobolev L^1. On peut évidemment récrire sa preuve à l'aide du transport de Brenier. En revanche, il n'était pas clair que cette approche pût être utile pour les autres inégalités de Sobolev. L'espoir est en fait venu de travaux en EDP de Del Pino et Dolbeault [**DPD02**]. Ces derniers ont démontré des inégalités de Gagliardo-Nirenberg (qui sont des extensions de Sobolev) en utilisant des équations cinétiques non-linéaires. Or il se trouve que ces équations admettent une interprétation de flot gradient par rapport au transport optimal. L'approche de Del Pino et Dolbeault repose cependant sur des méthodes variationnelles assez sophistiquées (unicité de solutions pour des équations elliptiques non-linéaires, réarrangement, propriétés de l'équation différentielle d'Euler-Lagrange non-linéaire en dimension 1). Disons, sans entrer plus dans les détails, que l'existence du travail de Del Pino et Dolbeault, plus que son contenu, nous a encouragés à chercher une approche par transport de mesure.

Les inégalités de Sobolev classiques font intervenir la norme euclidienne $|\cdot|$ sur $\mathbb{R}^n$, mais dans notre approche, il est naturel de travailler avec une norme quelconque. Dans la suite, $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$. La norme duale de $\|\cdot\|$ est donnée, pour $x \in \mathbb{R}^n$, par

$$\|x\|_* = \sup_{\|y\|=1} x \cdot y.$$

Pour $p \in [1, +\infty[$ on note q son conjugué :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Dualité et convexité se lisent aussi dans le fait que la transformée de Legendre de la fonction convexe $y \longrightarrow \|y\|^p/p$ est égale à $x \longrightarrow \|x\|_*^q/q$. On a donc :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \qquad x \cdot y \leq \frac{1}{p}\|x\|_*^p + \frac{1}{q}\|y\|^q. \tag{31}$$

Pour des fonctions à valeurs vectorielles, $X, Y : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, on a, en intégrant ponctuellement l'inégalité précédente et en optimisant,

$$\int X \cdot Y \leq \left(\int \|X\|_*^p\right)^{1/p} \left(\int \|Y\|^q\right)^{1/q}. \tag{32}$$

On peut aussi dire que pour un espace vectoriel normé (de dimension finie) $(E, \|\cdot\|)$, le dual de $L^p(\mathbb{R}^n, E)$ (les fonctions sont à valeurs dans E) s'identifie à $L^q(\mathbb{R}^n, E^*)$.

Pour $p \in [1, n[$, on définit le coefficient de Sobolev critique

$$p^\star := \frac{np}{n-p}.$$

Les espaces L^p sont ici formés de fonctions sur $\mathbb{R}^n$. On rappelle que $W^{1,p} = \{f \in L^p\ ;\ \nabla f \in L^p\}$ où $\nabla f \in L^p$ veut dire que les dérivées distributionnelles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont dans L^p, ou de façon équivalente, que $\nabla f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ et $\int |\nabla f|^p < +\infty$. L'espace ne change évidemment pas si on remplace $|\cdot|$ par une autre norme sur $\mathbb{R}^n$, mais sa norme se transforme en une norme équivalente. Le seul moment où on a besoin d'une norme sur $\mathbb{R}^n$ est lorsqu'on considère la norme du gradient, et il serait donc plus naturel d'introduire seulement maintenant une norme arbitraire sur $\mathbb{R}^n$. Comme on peut identifier $\nabla f \in \mathbb{R}^n$ à un vecteur de l'espace dual, nous allons considérer la norme $\|\nabla f\|_*$.

L'injection de Sobolev classique dit que, pour $p \in [1, n)$ on a $W^{1,p} \subset L^{p^\star}$. En d'autres termes, il existe une constante $c > 0$, telle que, pour tout $f \in W^{1,p}$,

$$\left(\int \|\nabla f\|_*^p\right)^{1/p} \geq c \left(\int |f|^{p^\star}\right)^{1/p^\star} = c\,\|f\|_{L^{p^\star}}.$$

L'espace naturel pour étudier cette inégalité est l'espace de Sobolev homogène $\dot{W}^{1,p} \supset W^{1,p}$ défini par

$$\dot{W}^{1,p} := \{f \in L^{p^\star}\ ;\ \nabla f \in L^p\}.$$

On cherche donc la constante optimale $c = S_{n,p}(\|\cdot\|)$ dans l'inégalité précédente. Plus que la valeur de cette constante (qui n'est guère instructive), on voudrait connaître explicitement un *minimiseur* $f \in \dot{W}^{1,p}$ du problème variationnel

$$S_{n,p}(\|\cdot\|) := \inf_{f \in \dot{W}^{1,p}} \frac{\left(\int \|\nabla f\|_*^p\right)^{1/p}}{\|f\|_{L^{p^\star}}}.$$

Et encore mieux, on aimerait avoir une description exacte de *tous* les minimiseurs.

Étant donné $p \in]1,n[$, on introduit la fonction $h_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$,

$$h_p(x) := (\sigma_p + \|x\|^q)^{-(n-p)/p} = (\sigma_p + \|x\|^q)^{-n/p^\star} ,$$

où $\sigma_p > 0$ est choisi pour que $\|h_p\|_{L^{p^\star}}^{p^\star} = \displaystyle\int (\sigma_p + \|x\|^q)^{-n}\, dx = 1$.

Nous montrons le résultat suivant, qui introduit une nouvelle forme de dualité :

Théorème 1.3 **([CNV04])**. — *Soit $p \in [1,n[$, et soit $f \in \dot W^{1,p}$ et $g \in L^{p^\star}$ telles que $\|f\|_{L^{p^\star}} = \|g\|_{L^{p^\star}} = 1$. Alors on a :*

$$\frac{\displaystyle\int |g|^{p^\star(1-1/n)}}{\left(\displaystyle\int \|y\|^q |g(y)|^{p^\star}\, dy\right)^{1/q}} \;\leq\; \frac{p(n-1)}{n(n-p)} \left(\int \|\nabla f\|_*^p\right)^{1/p} \tag{33}$$

avec égalité si $f = g = h_p$.

Nous en déduisons immédiatement l'inégalité de Sobolev optimale suivante, complétée dans [**CNV04**] par la caractérisation des cas d'égalité :

Théorème 1.4 **(Inégalité de Sobolev L^p optimale pour $1 < p < n$)**

Parmi les fonctions $f \in \dot W^{1,p}$, la quantité

$$\frac{\left(\displaystyle\int \|\nabla f\|_*^p\right)^{1/p}}{\|f\|_{L^{p^\star}}} \tag{34}$$

est minimale pour $f = h_p$.

De plus, $f \in \dot W^{1,p}$ est un minimiseur de (34), si et seulement si $f(x) = \lambda\, h_p(\mu x + x_0)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Pour $p = 1$ (qui correspond à l'isopérimétrie), on étend (33) et (34) aux fonctions à variations bornées et l'infimum est atteint pour $h_1(x) = \dfrac{1}{\mathrm{vol}(B)^{(n-1)/n}}\, 1_B(x)$ où $B = \{x\ ;\ \|x\| \leq 1\}$.

La nouveauté de [**CNV04**] n'est certainement pas l'énoncé de ce second théorème qui était presqu'entièrement connu. L'inégalité de Sobolev optimale pour $p \in]1,n[$ a été démontrée au milieu des années 70, indépendamment par Talenti et T. Aubin. Leur méthode repose sur le réarrangement décroissant (symétrisation) et sur la résolution du problème de minimisation en dimension 1 (à travers l'équation d'Euler-Lagrange associée). La description des cas d'égalité dans le cas de la norme euclidienne $|\cdot|$ est due à Brothers et Ziemer [**BZ88**] et repose sur l'étude des cas d'égalité dans le processus de symétrisation. L'inégalité de Sobolev optimale pour une norme quelconque pour $p \in]1,n[$ a été démontrée, en étendant la méthode de symétrisation d'Aubin et Talenti, par Alvino, Ferone, Trombetti, et P.L. Lions [**AFTL97**]. Remarquons que le cas $p = 1$ était contenu dans l'étude de Gromov et que le problème isopérimétrique correspondant s'appelle aussi *problème de Wulf*. Les cas d'égalité pour une norme quelconque dans l'inégalité de Sobolev L^p n'avaient pas été traités avant [**CNV04**], mais, depuis la méthode de Brothers et Ziemer a été étendue à ce cas dans des travaux d'Esposito et C. Trombetti, et Ferone et Volpicelli . Ce qu'il y a de nouveau dans [**CNV04**], c'est surtout la méthode de démonstration puisque que nous n'allons pas utiliser de méthodes variationnelles : pas de symétrisation, d'équation d'Euler-Langrange ni d'équations différentielles. Notre approche est simple et géométrique, et elle met aussi en lumière des liens entre la théorie de Brunn-Minkowski et les inégalités de Sobolev. Signalons à ce propos que Bobkov et Ledoux [**BL06**] ont très récemment complètement éclairci ces liens. En étendant leur travail [**BL00**], ils montrent en effet que l'on peut retrouver les inégalités de Sobolev optimales à partir de certaines formes fonctionnelles de l'inégalité de Brunn-Minkowski.

Notre méthode de démonstration du théorème 1.3 consiste à introduire le transport de Brenier de $T(x) = \nabla\varphi(x)$ entre $f^{p^\star}$ et $g^{p^\star}$. Dans l'équation de Monge-Ampère, on utilise l'inégalité arithmético-géométrique sous la forme

$$\det{}^{1/n} \operatorname{Hess}_x \varphi \leq \frac{\operatorname{tr} \operatorname{Hess}_x \varphi}{n} = \frac{\Delta\varphi(x)}{n},$$

ce qui permet de faire une intégration par parties. L'autre inégalité utilisée est simplement celle de Hölder (32). Pour prouver que $f = g = h_p$ donne une égalité dans (33), on montre que, dans la preuve de l'inégalité, il y a, dans ce cas, égalité à chaque étape (c'est souvent ce principe qui nous a guidé dans les preuves par transport quand on a la chance d'avoir un candidat à être extrémal). Dans ce cas, on a $\nabla\varphi(x) = x$ et $\operatorname{Hess}_x \varphi = \mathrm{Id}$; par conséquent, on ne perd rien dans l'inégalité arithmético-géométrique. La propriété caractéristique de h_p est précisément de donner un cas d'égalité dans d'inégalité de Hölder (32) quand

$$X = X(x) = \nabla h_p(x) \quad \text{et} \quad Y = Y(x) = h_p(x)^{p^\star/q}\, x.$$

Signalons que la même méthode permet de traiter aussi des inégalités de Sobolev à trace (faisant intervenir un terme de bord qui apparaît dans l'intégration par parties), comme l'ont remarqué Maggi et Villani [**MV05**].

Pour terminer, remarquons que la structure des fonctions extrémales de l'inégalité de Sobolev est très simple : toutes s'obtiennent à partir de h_p par une *similitude* (translation + dilatation). Dans le cas $p = 2$, l'inégalité est cependant invariante par toutes les *transformations conformes* (invariance exploitée pour cette inégalité et pour d'autres inégalités proches par Beckner, Lieb, Carlen et Loss). Dans une preuve par transport, il faut que lorsque l'on transporte une fonction extrémale sur une autre, il y ait égalité à toutes les étapes. Le fait que certaines transformations conformes ne soient pas des transports de Brenier (par exemple une rotation n'est pas, en général, le gradient d'une fonction convexe) peut apparaître comme un obstacle. Si l'approche par transport fonctionne, c'est que l'ensemble des fonctions extrémales, pour ce qui est des symétries, est *moins riche* que la fonctionnelle étudiée : lorsqu'on passe d'une extrémale à une autre par une transformation conforme, on peut aussi trouver une similitude qui fait l'affaire. Or les similitudes sont des transports de Brenier (qui donnent bien – et forcément – égalité à chaque étape). On peut observer un phénomène similaire pour les inégalités d'Hardy-Littlewood-Sobolev, mais, malheureusement, on ne connaît pas pour l'instant d'approche par transport.

Notre approche permet aussi de considérer des inégalités plus générales appelées inégalités de *Gagliardo-Nirenberg* sur $\mathbb{R}^n$:

$$\|f\|_{L^r} \le G_n(p,r,s)\|f\|_{L^s}^{1-\theta} \left(\int \|\nabla f\|_*^p\right)^{\theta/p}, \tag{35}$$

où $p \in]1,n[$, $1 \le s < r \le p^\star$, et $\theta = \theta(n,p,r,s) \in]0,1[$ est imposé par *scaling*. Formellement, l'inégalité se déduit de l'inégalité de Sobolev en utilisant l'inégalité de Hölder pour le terme $\|f\|_{L^{p^\star}}$, mais on perd ainsi *a priori* la constante optimale, même si l'on part de Sobolev optimal. L'inégalité de Gagliardo-Nirenberg a sa géométrie propre. Nous démontrons dans [**CNV04**] par transport de mesure une forme optimale de l'inégalité (35), en exhibant une fonction extrémale, dans le cas où les paramètres restent dans la famille suivante :

$$\begin{cases} p(s-1) = r(p-1) & \text{quand } r,s > p \\ p(r-1) = s(p-1) & \text{quand } r,s < p. \end{cases} \tag{36}$$

Cette famille est exactement celle pour laquelle Del Pino et Dolbeault ont obtenu les inégalités de Gagliardo-Nirenberg optimales dans le cas de la norme euclidienne. Remarquons que l'inégalité de Sobolev correspond au cas limite $r = p^\star$, pour lequel $\theta = 1$.

La fonction extrémale dans Gagliardo-Nirenberg (35) est donnée par

$$h_{\alpha,p}(x) := \Big(\sigma_{\alpha,p} + (\alpha-1)\|x\|^q\Big)_+^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

où $\sigma_{\alpha,p} > 0$ est tel que $\|h_{\alpha,p}\|_{L^{\alpha p}} = 1$ et $\alpha \in]0, \frac{n}{n-p}]$, $\alpha \neq 1$, est utilisé pour paramétrer les coefficients s, p, r comme suit :

$$s = \alpha(p-1)+1,\ r = \alpha p \ \text{ si } \alpha > 1, \quad \text{et}, \quad s = \alpha p,\ r = \alpha(p-1)+1 \ \text{ si } \alpha < 1.$$

À la place de l'inégalité arithmético-géométrique, on utilise le fait que la fonction,

$$M \longmapsto \frac{1}{1-\gamma}\,(\det M)^{1-\gamma}$$

est concave sur les matrices symétriques positives tant que $\gamma \ge 1 - 1/n$, d'où l'on tire que

$$(1-\gamma)^{-1}\,(\det \operatorname{Hess}\varphi)^{1-\gamma} \le (1-\gamma)^{-1}(1-n(1-\gamma)) + \operatorname{tr}(\operatorname{Hess}\varphi).$$

On pose $\gamma := \frac{\alpha(p-1)+1}{\alpha p} = 1 - \frac{\alpha-1}{\alpha p}$ qui vérifie bien $\gamma \ge 1 - 1/n$ puisque $\alpha \in]0, n/(n-p)]$. Le terme constant, qui n'existait pas lorsque l'on utilisait simplement $\det^{1/n} \le \operatorname{tr}/n$, fait apparaître dans l'argument un terme en f supplémentaire, ce qui permet d'avoir différentes normes de f dans l'inégalité. Et, à la place de l'inégalité de Hölder, on utilise l'inégalité de Young (31) sous la forme

$$\int f^{\alpha(p-1)}\,\nabla f\cdot\nabla\varphi \le \frac{1}{p\mu^p}\int \|\nabla f\|_*^p + \frac{\mu^q}{q}\int f^{\alpha p}\|\nabla\varphi\|^q.$$

On termine par une optimisation en $\mu > 0$.

2. CADRE RIEMANNIEN : BRUNN-MINKOWSKI, TRANSPORT ET COURBURE

Nous présentons dans cette partie nos travaux [**CMS01, CMS06**] en collaboration avec Robert McCann et Michael Schmuckenschläger sur les extensions aux variétés riemanniennes des inégalités de type Brunn-Minkowski. Le point le plus intéressant est de voir comment la courbure intervient dans les inégalités, à l'instar de ce qui passe dans le calcul Γ_2 de Bakry-Émery. Cependant, la seule approche connue pour établir ces inégalités est par transport de mesure. Notre étude met aussi en lumière l'interaction entre le transport de mesure et la structure géodésique des variétés.

Soit M^n une variété riemannienne de dimension n. On notera d la distance géodésique et $d$vol l'élément de volume riemannien . Enfin, $(T_xM^n, \cdot, |\cdot|)$ désignera la structure euclidienne sur l'espace tangent T_xM^n en $x \in M^n$. Pour $x, y \in M^n$ et $t \in [0,1]$, on note $Z_t(x,y)$ le barycentre de x et y donné par

$$Z_t(x,y) = \{z \in M^n \; ; \; d(x,z) = td(x,y) \;\text{ et }\; d(z,y) = (1-t)d(x,y)\}.$$

Lorsque $x \notin cut(y)$, le *cut-locus* de y, alors $Z_t(x,y)$ est réduit à un point et la courbe $t \longrightarrow Z_t(x,y)$ est exactement la géodésique minimale joignant x à y. Pour un ensemble $A \subset M^n$, on note $Z_t(x,A) = \bigcup_{y\in A} Z_t(x,y)$. La quantité essentielle qui permet de mesurer la distorsion du volume le long de la géodésique $t \longrightarrow Z_t(x,y)$ est (voir figure p. 28)

$$v_t(x,y) := \lim_{r\to 0} \frac{\mathrm{vol}[Z_t(x, B_r(y))]}{\mathrm{vol}[B_{tr}(y)]}.$$

Cette limite existe et appartient à $]0,+\infty]$, avec $v_1(x,y) \equiv 1$. Remarquons que sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, on a $v_t \equiv 1$. Intuitivement, on a $v_t \geq 1$ si la courbure et positive, et $v_t \leq 1$ si la courbure est négative. Notre théorème principal est l'extension riemannienne suivante du **théorème de Borell-Brascamp-Lieb** (voir pages 7 et 7 pour les notations) :

Théorème 2.1 ([**CMS01**]). — *Soit $p \geq -1/n$. Étant donnés $t \in [0,1]$ et $f, g : M^n \to \mathbb{R}_+$ on pose pour $z \in M^n$,*

$$h_t(z) := \sup_{z\in Z_t(x,y)} \mathcal{M}_t^p\left(\frac{f(x)}{v_{1-t}(y,x)}\,,\,\frac{g(y)}{v_t(x,y)}\right).$$

Alors on a, $\displaystyle\int_{M^n} h_t \,\mathrm{dvol} \geq \mathcal{M}_t^{p/(1+np)}\left(\int_{M^n} f\,\mathrm{dvol}\,,\,\int_{M^n} g\,\mathrm{dvol}\right).$

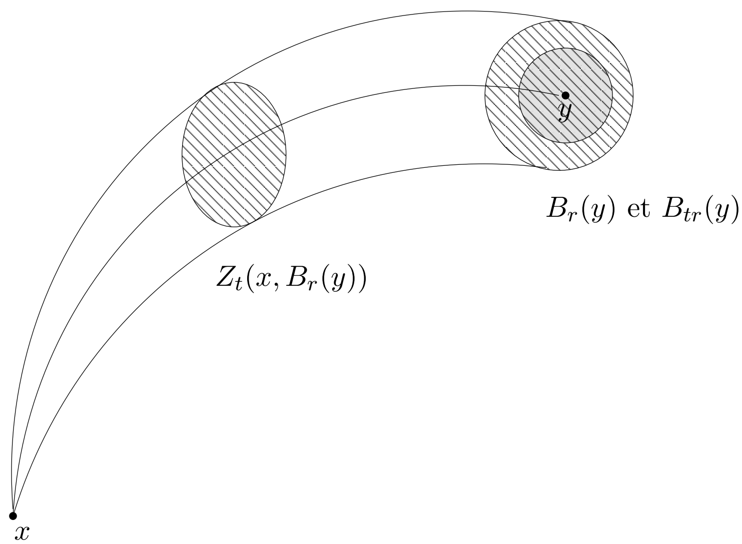

FIG. 1. Construction de $Z_t(x, B_r(y))$

En particulier pour $p = 0$, on retrouve une forme riemannienne de l'inégalité de Prékopa-Leindler. Dans les cas de la sphère et de l'espace hyperbolique (où les coefficients v_t se calculent facilement), nous avions prouvé cette extension (sans faire intervenir explicitement les coefficients v_t) dans un travail précédent [**C99a**].

Lorsqu'on connaît une minoration de la courbure de Ricci de M^n, on peut minorer les coefficients $v_t(x, y)$ par un facteur ne dépendant que de la distance $d(x, y)$. Introduisons pour $k \in \mathbb{R}$,

$$S_k(d) := \frac{\sin(\sqrt{k}\, d)}{\sqrt{k}\, d} = \begin{cases} (\sin d)/d & \text{pour } k = 1 \quad \text{(cas sphérique)} \\ 1 & \text{pour } k = 0 \quad (\mathbb{R}^n) \\ (\sinh d)/d & \text{pour } k = -1 \quad \text{(cas hyperbolique)} \end{cases} . \tag{37}$$

Si l'on a sur M^n la minoration $\mathrm{Ric} \geq k(n-1)\mathrm{Id}$, alors on vérifie, en utilisant le théorème de comparaison de Bishop que, pour tout $x, y \in M^n$,

$$v_t(x, y) \geq \left(\frac{S_k\big(td(x, y)\big)}{S_k\big(d(x, y)\big)} \right)^{n-1}, \tag{38}$$

avec égalité si M^n a une courbure sectionnelle constante égale à k. Par exemple, on peut énoncer de la manière suivante le cas $p = -1/n$ (duquel tous les autres se déduisent) dans le cas $\mathrm{Ric} \geq k(n-1)\mathrm{Id}$: si $\int_{M^n} f \, d\mathrm{vol} = \int_{M^n} g \, d\mathrm{vol} = 1$, alors $\int_{M^n} h_t \, d\mathrm{vol} \geq 1$, où

$$h_t(z) := \sup_{z \in Z_t(x,y)} \Bigg[(1-t) \left(\frac{\sin((1-t)\sqrt{k} d(x, y))}{(1-t)\sin(\sqrt{k} d(x, y))} \right)^{(n-1)/n} f(x)^{-1/n} + \\ t \left(\frac{\sin(t\sqrt{k} d(x, y))}{t \sin(\sqrt{k} d(x, y))} \right)^{(n-1)/n} g(y)^{-1/n} \Bigg]^{-n}$$

Dans le cas $p = 0$, lorsqu'on utilise $\mathrm{Ric} \geq k(n-1)\mathrm{Id}$, on voit que la condition sur les fonctions est exactement, pour $x, y \in M$ et $z \in Z_t(x,y)$,

$$h(z) \geq \left(\frac{S_k(d)}{S_k((1-t)d)^{1-t}\, S_k(td)^t} \right)^{n-1} f(x)^{1-t} g(y)^t.$$

On peut montrer facilement la majoration $\frac{S_k(d)}{S_k((1-t)d)^{1-t}\, S_k(td)^t} \leq e^{-t(1-t)\,k\,d^2/2}$. Par conséquent, la condition précédente peut à son tour être remplacée par

$$h(z) \geq e^{-(n-1)k\,t(1-t)\,d^2(x,y)/2}\, f(x)^{1-t} g(y)^t. \tag{39}$$

En comparant ce résultat avec le Prékopa–Leindler gaussien de la page 10, on voit l'analogie qui existe entre la courbure du potentiel V (en l'occurrence, gaussien) et celle de la variété.

Il est du coup naturel de s'intéresser à ces inégalités lorsque que l'on met sur M une mesure μ de la forme $d\mu(x) = e^{-V(x)}\,dx$. Les résultats suivants ne font plus intervenir la dimension, et la variété riemannienne sera simplement notée M (et non plus M^n) Dans ce cas, on ne connaît pas d'énoncé aussi précis que le théorème 2.1, mais on peut énoncer un résultat avec une hypothèse à la Bakry-Émery où la courbure de la variété et celle du potentiel se combinent :

$$\mathrm{Hess}_x V + \mathrm{Ric}_x \geq \lambda I \qquad \forall x \in M \tag{40}$$

pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Nous avons établi le résultat suivant :

Théorème 2.2 **([CMS06])**. — *Soit μ une mesure sur une variété riemannienne M, de la forme $d\mu = e^{-V}\,\mathrm{dvol}$ où V et la courbure de Ricci vérifient* (40) *pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $t \in [0,1]$ et $f, g, h : M \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telles que $\forall x, y \in M$ et $z \in Z_t(x,y)$,*

$$h(z) \geq e^{-\lambda\,t(1-t)\,d^2(x,y)/2}\, f(x)^{1-t}\, g(y)^t. \tag{41}$$

Alors on a : $\displaystyle\int_M h\,d\mu \geq \left(\int_M f\,d\mu\right)^{1-t} \left(\int_M g\,d\mu\right)^t.$

En suivant Maurey [**Mau91**], on peut déduire des inégalités de Prékopa-Leindler des inégalités de concentration de la mesure lorsque $\lambda > 0$. Supposons que la mesure μ de densité e^{-V} est une probabilité sur M, et appliquons le théorème avec $t = 1/2$, $h \equiv 1$ et $g = 1_A$ pour un certain $A \subset M$. Alors, la meilleure fonction $f = e^F$ possible vérifiant la condition (41) est donnée par $F(y) := \inf\{\lambda d^2(x,y)/4\,;\ x \in A\}$, de sorte que

$$\int_M e^{\lambda\, d^2(\cdot,A)/4}\,d\mu \leq \frac{1}{\mu(A)}.$$

Ce type d'inégalité a été mis en valeur et abondamment étudié par Talagrand (voir par exemple [**Tal95**]). En utilisant l'inégalité de Tchebichev, on trouve l'inégalité de concentration suivante :

$$\mu\left(\{x \in M\,;\ d(x,A) \geq \varepsilon\}\right) \leq \frac{e^{-\lambda\,\varepsilon^2/4}}{\mu(A)}. \tag{42}$$

Dans le cas d'une variété riemannienne compacte sur laquelle $\mathrm{Ric} \geq \lambda\mathrm{Id}$, $\lambda > 0$, on retrouve, pour la mesure de volume normalisée, l'inégalité de concentration obtenue par Gromov et Milman [**GM83**]) comme conséquence de l'inégalité isopérimétrique de Lévy-Gromov.

Les démonstrations des théorèmes 2.1 et 2.2 reposent sur le transport optimal de mesure sur les variétés, mais sont d'un esprit légèrement différent. Dans les deux cas, on introduit un transport

$$F(x) = \exp_x(\nabla\theta(x))$$

entre deux densités de probabilité f et g, et l'application interpolée

$$F_t(x) := \exp_x(t\nabla\theta(x)) = Z_t(x, F(x)).$$

On utilise l'équation

$$f(x) = g(F(x)) \det(dF_x),$$

qui est vérifiée (en un sens faible mais suffisant) $f(x)d\mathrm{vol}(x)$-pp. L'idée implicite est de faire un changement de variables $z = F_t(x)$, ce qui amène à estimer, pour un x_0 **fixé**, le déterminant jacobien $\det\big(d(F_t)_{x_0}\big)$. L'observation simple mais cruciale est que, comme $y \longrightarrow F_t(y)$ est toujours une géodésique, pour $v \in T_{x_0}M$ le champ de vecteurs $d(F_t)_{x_0}(v) \in T_{F_t(x_0)}M$ est un champ de Jacobi le long de la géodésique $t \longrightarrow F_t(x_0)$. Rappelons qu'un champ de Jacobi est un champ de déformation d'une géodésique par des géodésiques. Si l'on fixe un repère orthonormé tournant le long de cette géodésique, on a que $d(F_t)_{x_0}$ est une matrice de champs de Jacobi. Dans [**CMS01**] on présente une étude minutieuse de $d(F_t)_{x_0}$ que l'on calcule en fonction de la matrice $\mathrm{Hess}_{x_0}\theta$ et des matrices

$$Y_t := d[\exp_{x_0}]_{t\nabla\theta(x_0)} \quad \text{et} \quad H_t := [\mathrm{Hess}_x\, d^2\big(\cdot, F_t(x_0)\big)/2]_{x=x_0}.$$

Les matrices Y_t et H_t sont riches d'informations concernant l'interaction entre volume et courbure. La « monotonie » du transport intervient à travers la condition (19) : $\mathrm{Hess}_{x_0}\theta + H_1 \geq 0$. Dans [**CMS06**], on utilise plus explicitement l'équation différentielle satisfaite par les coordonnées $Y(t) \in \mathbb{R}^n$ d'un champ de Jacobi dans un repère repère orthonormé tournant le long d'une géodésique $\{\gamma(t)\}_{t\in[0,1]}$:

$$Y''(t) + R(t)Y(t) = 0,$$

où $R(t)$ est la matrice de l'opérateur

$$\begin{array}{rcl} T_{\gamma(t)}M & \longrightarrow & T_{\gamma(t)}M \\ v & \longrightarrow & R(\dot\gamma(t), v)\dot\gamma(t), \end{array}$$

$R_x : T_xM \times T_xM \times T_xM \longrightarrow T_xM$ désignant le tenseur de Riemann en $x \in M$, et $\dot\gamma(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t) \in T_{\gamma(t)}M$ le vecteur tangent en $t \in [0,1]$. En choisissant correctement le repère tournant, la matrice R est de la forme

$$R = R^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

et la trace de $R(t)$ redonne la courbure de Ricci dans la direction $\dot\gamma(t)$:

$$\mathrm{tr}\, R(t) = \mathrm{Ric}_{\gamma(t)}\big(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\big).$$

Ainsi, la matrice $A(t) = d(F_t)_{x_0}$ de champs de Jacobi le long de la géodésique $t \longrightarrow F_t(x_0)$ vérifie l'équation différentielle

$$A''(t) + R(t)A(t) = 0.$$

La trace de $R(t)$ (et donc la courbure de Ricci) intervient naturellement dans la dérivée du déterminant de $A(t)$, et ainsi cette équation permet d'obtenir des inéquations différentielles pour

$$\alpha(t) = \log\det d(F_t)_{x_0}.$$

Ces inéquations différentielles se combinent avec celles que l'on a sur $V(F_t(x_0))$ et amènent de façon naturelle à utiliser (40). Signalons enfin que dans [**CMS01**] on est amené à établir de nombreuses propriétés de régularité faible pour F_t et pour les densités interpolées $F_t\#(f(x)\,d\mathrm{vol}(x))$, et à utiliser les liens entre le transport optimal et la fonction $d(\cdot, x_0)^2/2$. Sur $\mathbb{R}^n$, cette fonction a une hessienne constante égale à l'identité, mais la situation est singulièrement différente sur une autre variété. Nous avons également établi certaines propriétés du *cut-locus* qui sont peut-être intéressantes pour elles-mêmes.

On peut retrouver à partir du théorème 2.2 et en suivant la méthode de Bobkov et Ledoux [**BL00**], l'inégalité de Sobolev logarithmique de Bakry-Émery. Dans [**CMS06**] nous proposons une approche directe par transport, à partir des outils utilisés pour démontrer le théorème 2.2, de l'extension suivante du théorème 1.1 (p. 18) (la notation Ent_μ est la même (26) que dans la partie précédente) :

Théorème 2.3. — *Soit μ une probabilité sur M de la forme $d\mu = e^{-V}\,d\mathrm{vol}$ où V et la courbure de Ricci vérifient* (40) *pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $f, g : M \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions régulières à support compact telles que $\int_M f\,d\mu = \int_M g\,d\mu = 1$. Si $F(x) := \exp_x(\nabla\theta(x))$ désigne le transport optimal de $f\,d\mu$ sur $g\,d\mu$, alors on a :*

$$\mathrm{Ent}_\mu(g) - \mathrm{Ent}_\mu(f) \geq \int_M \nabla f \cdot \nabla\theta\,d\mu + \frac{\lambda}{2}\int_M |\nabla\theta|^2 f\,d\mu. \tag{43}$$

Comme dans la partie précédente (voir p. 18), on peut en déduire l'inégalité de Sobolev logarithmique de Bakry-Émery, ainsi qu'une inégalité de transport à la Talagrand observée formellement par Otto et Villani [**OV00**].

Pour terminer, disons quelques mots sur les travaux récents de Sturm [**Stu**], et de Lott et Villani [**LV**], dont certains résultats recoupent en partie ceux de [**CMS06**], mais qui surtout offrent d'autres perspectives puisque leur objectif est d'obtenir une notion de courbure de Ricci sur les espaces métriques. Certains de nos résultats riemanniens [**CMS01, CMS06**] peuvent s'interpréter comme une *convexité de déplacement* de certaines fonctionnelles. La notion de convexité de déplacement a été introduite par McCann [**McC94, McC97**]. Soit (M, μ) un espace métrique mesuré possédant des géodésiques (on parle d'espace de longueur) et $\mathcal{P}_{ac}(M, \mu)$ l'espace des densités de probabilités (par rapport à μ). On identifie implicitement les densités $\rho \in \mathcal{P}_{ac}(M, \mu)$ et les mesures de probabilités $\rho\,d\mu$. Une fonctionnelle $\mathcal{H}$ sur l'espace $\mathcal{P}_{ac}(M, \mu)$ est *déplacement convexe* si, pour $\rho_0, \rho_1 \in \mathcal{P}_{ac}(M, \mu)$, F le transport optimal de ρ_0 sur ρ_1 et F_t le transport interpolé (par exemple $(1-t)x + tF(x)$ sur l'espace euclidien ou $\exp_x(t\nabla\theta(x))$ sur une variété avec les notations précédentes), la fonction

$$t \longrightarrow \mathcal{H}\big(F_t\#\rho_0\big) \quad \text{est convexe sur } [0,1].$$

Il s'agit donc de la notion de convexité géodésique sur l'espace métrique $(\mathcal{P}_{ac}(M, \mu), d_W)$ des densités de probabilités munies de la distance de Kantorovich-Rubinstein d_W définie p. 11 (on néglige ici, pour simplifier, l'existence de géodésiques sur cet espace métrique). On a également une notion analogue d'uniforme convexité avec constante λ : si l'on note $\rho_t = F_t \# \rho_0$ la densité interpolée, on impose

$$(1-t)\mathcal{H}(\rho_0) + t\mathcal{H}(\rho_1) - \mathcal{H}(\rho_t) \geq \lambda\, t(1-t) d_W^2(\rho_0, \rho_1)/2.$$

Il découle de [**CMS06**] que, comme l'avaient formellement établi Otto et Villani, la fonctionnelle entropie sur $\mathcal{P}_{ac}(M, d\mathrm{vol})$ associée à la probabilité $\mu = e^{-V}$,

$$\mathcal{H}(\rho) := \int_M \rho \log \rho \, d\mathrm{vol} + \int_M \rho V \, d\mathrm{vol} = \int_M \left(\frac{\rho}{e^{-V}}\right) \log\left(\frac{\rho}{e^{-V}}\right) d\mu,$$

que l'on peut donc aussi voir comme une fonctionnelle sur $\mathcal{P}_{ac}(M, \mu)$, est uniformément déplacement convexe avec constante λ si l'hypothèse (40) est vérifiée. Ce résultat a aussi été observé par Sturm (voir également son travail avec Von Renesse [**vRS05**]), et Lott et Villani, qui en fait ont montré bien plus : la réciproque est également vraie. Ainsi, la convexité de déplacement de l'entropie permet de définir une notion de courbure de Ricci, ou pour être plus précis, une notion de *minoration* de la courbure de Ricci pour le couple (M, μ). Or on voit que la notion de convexité de déplacement peut se définir pour des probabilités sur un espace métrique mesuré quelconque (possédant des géodésiques). Cela n'est que le début de l'histoire. Par exemple, ces auteurs ont récemment réussi à introduire une condition fonctionnelle qui permet de retrouver non seulement la courbure de Ricci, mais aussi la dimension. Ils sont donc en mesure de définir une notion de courbure-dimension sur les espaces métriques mesurés. Nous renvoyons, pour plus de détails et de commentaires bibliographiques à l'excellent exposé de Villani à Saint-Flour [**Vil05**].

Signalons pour finir que le théorème 2.1 ne rentre pas dans le cadre des travaux de Sturm, Lott et Villani puisqu'il est vrai indépendamment de l'existence d'une minoration de la courbure de Ricci. On peut faire la conjecture que ce résultat (peut-être dans une version légèrement modifiée) est vrai sur n'importe quel espace sur lequel on a une notion de mesure et des géodésiques. Ce sont en effet les seuls ingrédients nécessaires pour définir les coefficients de distorsion v_t dont nous pensons que le rôle est important.

3. CADRE COMPLEXE : THÉORÈME DE PRÉKOPA ET FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES

Nous allons donner une nouvelle démonstration et une extension [**C05**] du théorème de Berndtsson [**Ber98**] qui est une version complexe du théorème de Prékopa (p. 9) où la convexité est remplacée par la plurisousharmonicité. Nous présenterons ensuite quelques applications du théorème de Berndtsson et de l'interpolation complexe, en partie pour l'étude de l'inégalité de Santaló (tirée de [**C02a**]).

3.1. Une nouvelle approche du théorème de Berndtsson

On rappelle qu'une fonction est plurisousharmonique si sa restriction à tout droite complexe est sous-harmonique.La plurisousharmonicité est une notion locale et pour une fonction régulière ϕ, elle est équivalente au fait que la Hessienne complexe $\left(\dfrac{\partial^2\phi}{\partial w_i \partial \overline{w_j}}(w)\right)_{1\leq i,j\leq n}$ soit une matrice (hermitienne) positive en tout point de l'ensemble de définition de ϕ. La classe d'ensembles associée aux fonctions plurisousharmoniques est formée des ensembles pseudo-convexes. Un sous-ensemble de niveau d'une fonction plurisousharmonique est ensemble pseudo-convexe, et la réciproque est presque vraie – il y a des subtilités importantes qui n'existent pas dans le cas réel, mais qui ne posent pas de problèmes pour les questions considérées ici. On notera $\boldsymbol{d\lambda}$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}^N \cong \mathbb{R}^{2N}$. Le résultat de Berndtsson s'énonce (dans une forme légèrement simplifiée) comme suit :

Théorème 3.1 **(Berndtsson [Ber98]).** — *Soit $\varphi : \mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{C}\times\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction plurisousharmonique et soit $\Phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$e^{-\Phi(z)} = \int_{\mathbb{C}^n} e^{-\varphi(z,w)}\, d\lambda(w). \tag{44}$$

Si l'on suppose que

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \forall w \in \mathbb{C}, \forall w \in \mathbb{C}^n, \quad \varphi(z,w) = \varphi(z, e^{i\theta} w), \tag{45}$$

alors la fonction Φ est sous-harmonique.

Sous sa forme plus générale (qui s'en déduit), le résultat s'énonce comme suit : soit $\Omega \subset \mathbb{C}^{n+1}$ ensemble pseudo-convexe et $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction plurisousharmonique tels que sur chaque section en $z \in \mathbb{C}$,

$$\Omega(z) := \{w \in \mathbb{C}^n \; ; \; (z,w) \in \Omega\},$$

on ait

$$0 \in \Omega(z) \quad \text{et} \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \;\forall w \in \Omega(z) : \quad e^{i\theta} w \in \Omega(z), \quad \text{et} \;\; \varphi(z, e^{i\theta} w) = \varphi(z,w); \tag{46}$$

alors la fonction Φ définie par

$$e^{-\Phi(z)} = \int_{\Omega(z)} e^{-\varphi(z,w)}\, d\lambda(w) \tag{47}$$

est sous-harmonique. On remarquera que l'hypothèse d'invariance sur l'ensemble et sur la fonction φ a lieu seulement sur les fibres au-dessus de z fixé.

En comparant avec le théorème de Prékopa (p. 9), on voit que, dans le cas complexe, il y a une hypothèse d'invariance (45) nouvelle – en l'occurrence une invariance par l'action du tore S^1 sur chaque fibre. Cependant, l'exemple de la fonction sur $\mathbb{C}^2$, $\varphi(z,w) = |w - \overline{z}|^2 - |z|^2 = |w|^2 - 2\Re(zw)$, qui est plurisousharmonique comme somme d'une fonction plurisousharmonique et d'une fonction harmonique, montre que le résultat ne peut être vrai en toute généralité sans hypothèses supplémentaires. Le problème vient peut-être du fait que la notion de plurisousharmonicité est une notion dans laquelle la structure complexe des sous-espaces – un sous-espace vectoriel E est un sous-espace complexe si $E = iE$ – intervient, alors que cette structure est transparente pour la mesure de Lebesgue. L'exemple précédent montre justement que l'on peut glisser un défaut de convexité (ou plutôt de sous-harmonicité) sur un espace qui n'est pas complexe, en l'occurrence $\{(z,w) \; ; \; w = \overline{z}\}$. Signalons que Berndtsson a également montré que le résultat était vrai sous la condition d'invariance à la Reinhardt suivante :

$$\forall \theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R}, \; \forall w \in \mathbb{C}, \forall w \in \mathbb{C}^n, \quad \varphi(z, w_1, \ldots, w_n) = \varphi(z, e^{i\theta_1} w_1, \ldots, e^{i\theta_n} w_n).$$

Mais ce cas est moins intéressant car il peut, en fait, se déduire d'une forme du théorème de Prékopa-Leindler réel. Il peut néanmoins aussi être retrouvé avec l'approche développée ici.

La preuve de Berndtsson repose sur les estimés L^2 de Hörmander (voir [**Hör90**]) pour l'opérateur $\overline{\partial}$, une réciproque partielle de ces estimés et un procédé de tensorisation qui consiste à rajouter arbitrairement des dimensions et à passer à la limite dans les estimés L^2. Ainsi cette preuve ne suit-elle aucune des preuves connues du théorème de Prékopa réel. Il n'est pas inintéressant de remarquer que l'on peut adapter la preuve de Berndtsson au cas réel. La version réelle des estimés d'Hörmander n'est autre qu'une des inégalités de Brascamp-Lieb [**BL76a**] (qui, bien que démontrée plus tard, est un cas particulier du résultat complexe d'Hörmander) et le processus de limite s'apparente à une méthode de Laplace. Évidemment, cette méthode est, dans le cas réel, bien trop compliquée.

Le but de notre travail [**C05**] est de proposer une nouvelle approche du résultat de Berndtsson qui s'inspire de la récente preuve *locale* du théorème de Prékopa découverte par Ball, Barthe et Naor [**BBN03**] (voir aussi [**ABBN04**]). Cette preuve consiste, pour le théorème de Prékopa (p. 9), à trouver une formule permettant de calculer ϕ'' et permettant ainsi de lire localement la convexité de ϕ. Notre but est de trouver une formule pour

$$\Delta\Phi = 4\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial \overline{z}}$$

à partir de (44). Il est suffisant de calculer $\Delta\Phi(0)$. La question intrigante est de savoir à quel moment on va devoir s'écarter du cas réel et imposer certaines conditions supplémentaires garantissant que $\Delta\Phi(0) \geq 0$. Sur $\mathbb{R}^n$, on peut travailler de manière assez flexible sans introduire trop de formalisme fonctionnel, en partie parce que la structure des fonctions f telles que $df = 0$ est simple. La situation est différente sur $\mathbb{C}^n$ – les fonctions telles que $\overline{\partial} f = 0$ sont précisément les fonctions holomorphes. Nous allons transférer certaines idées de Ball, Barthe et Naor dans un formalisme L^2 et utiliser la théorie L^2 de l'opérateur $\overline{\partial}$.

Afin de présenter le résultat principal et la méthode, il faut fixer un peu les notations et présenter la théorie L^2 du $\overline{\partial}$. Pour simplifier, plaçons-nous sur $\mathbb{C}^n$ tout entier ; nous renvoyons à [**C05**] pour le cas d'un domaine pseudo-convexe général.

Rappelons que pour une fonction u régulière sur un certain $\mathbb{C}^N$ et $w \in \mathbb{C}^N$, la forme de Levi en w est la forme hermitienne associée à la Hessienne complexe de u : pour $\xi \in \mathbb{C}^N$,

$$\mathcal{L}u_w(\xi) := \sum_{j,k=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial w_j \partial \overline{w_k}}(w)\, \xi_j \overline{\xi_k}.$$

Cette forme hermitienne est positive lorsque u est une fonction plurisousharmonique.

Fixons une fonction $\phi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ plurisousharmonique C^2 – cette fonction est destinée à être $\varphi(0, \cdot)$. Notons $L^2(e^{-\phi}) = L^2(\mathbb{C}^n, e^{-\phi})$ l'espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$\int_{\mathbb{C}^n} f(w)\overline{g(w)} e^{-\phi(w)}\, d\lambda(w).$$

On utilise aussi l'espace de Hilbert des $(0, 1)$-formes,

$$L^2_{(0,1)}(e^{-\phi}) = \left\{ \alpha = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j d\overline{w_j}\ ;\ \alpha_j \in L^2(e^{-\phi}) \right\},$$

avec le produit scalaire

$$\int_{\mathbb{C}^n} \alpha \cdot \overline{\beta}\, e^{-\phi} = \int_{\mathbb{C}^n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j(w) \overline{\beta_j(w)} \right) e^{-\phi(w)}\, d\lambda(w).$$

Rappelons que si f est régulière, on définit $\overline{\partial} f = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{w_j}}\, d\overline{w_j}$ et que, pour une u plus générale, on définit $\overline{\partial} u$ au sens des distributions (les fonctions tests étant les fonctions régulières à support compact). On a ici affaire à une condition de Neumann à l'infini. L'opérateur $\overline{\partial}$ est vu comme un opérateur (fermé) non-borné de $L^2(e^{-\phi})$ dans $L^2_{(0,1)}(e^{-\phi})$ de domaine dense

$$\mathcal{D}(\overline{\partial}) = \{u \in L^2(e^{-\phi})\ ;\ \overline{\partial} u \in L^2_{(0,1)}(e^{-\phi})\}.$$

Son adjoint sera noté $\overline{\partial}^*_\phi : L^2_{(0,1)}(e^{-\phi}) \longrightarrow L^2(e^{-\phi})$. Sur une $(0, 1)$-forme régulière α, il est donné par $\overline{\partial}^*_\phi \alpha = -e^{\phi} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(e^{-\phi}\alpha_j)}{\partial w_j}$. On introduit l'opérateur L sur $L^2(e^{-\phi})$ suivant :

$$L := -\overline{\partial}^*_\phi \circ \overline{\partial}. \tag{48}$$

L'opérateur L est auto-adjoint et a un domaine dense. Pour $f \in \mathcal{D}(\overline{\partial})$ et $g \in \mathcal{D}(L)$, on a

$$\int_{\mathbb{C}^n} f\overline{Lg}\, e^{-\phi} = -\int_{\mathbb{C}^n} \overline{\partial} f \cdot \overline{\overline{\partial} g}\, e^{-\phi}. \tag{49}$$

Signalons que, dans la preuve, on recourt à la formule d'intégration par parties suivante, qui est un cas particulier de la formule d'Hörmander [**Hör65**] : pour toute $g \in \mathcal{D}(L)$ régulière,

$$\int_{\mathbb{C}^n} |Lg|^2\, e^{-\phi} = \int_{\mathbb{C}^n} \left[\mathcal{L}\phi_w(\overline{\partial} g(w)) \,+ \sum_{j,k} \left| \frac{\partial^2 g}{\partial \overline{w}_j \partial \overline{w_k}}(w) \right|^2 \right] e^{-\phi(w)}\, d\lambda(w) \tag{50}$$

où l'on a fait l'identification $\overline{\partial} g = \left(\frac{\partial g}{\partial \overline{w}_1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial \overline{w}_n} \right) \in \mathbb{C}^n$. Dans le cas réel (qui s'en déduit), cette formule est aussi connue sous le nom de formule de Bochner.

Soit H_ϕ le sous-espace fermé constitué des fonctions holomorphes de $L^2(e^{-\phi})$:

$$H_\phi = \{h \in L^2(e^{-\phi})\ ;\ \overline{\partial} h = 0\} = \ker L. \tag{51}$$

Un résultat classique d'existence (théorie de Hörmander [**Hör90, Hör65**]) et de régularité (avec conditions de Neumann) pour l'opérateur $\overline{\partial}$ nous assure que si $f \in L^2(e^{-\phi})$ est une fonction régulière *orthogonale* à H_ϕ, alors il existe $g \in \mathcal{D}(L)$ régulière telle que $f = Lg$. Remarquons que les fonctions constantes appartiennent à H_ϕ. On les met de côté en introduisant le sous-espace de H_ϕ suivant

$$\mathcal{H}_\phi := \left\{ h \in L^2(e^{-\phi})\ ;\ \overline{\partial} h = 0 \text{ et } \int_{\mathbb{C}^n} h(w) e^{-\phi(w)}\, d\lambda(w) = 0 \right\}, \tag{52}$$

qui est précisément l'orthogonal dans H_ϕ des fonctions constantes : $H_\phi = \mathbb{C}1 \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{H}_\phi$. Pour résumer, on voit que toute fonction $f \in L^2(e^{-\phi})$ admet une décomposition (de type Hodge) en somme de termes orthogonaux :

$$f(w) = \frac{\int_{\mathbb{C}^n} f\, e^{-\phi}}{\int_{\mathbb{C}^n} e^{-\phi}} + H(w) + Lg(w) \tag{53}$$

$H \in \mathcal{H}_\phi$ (52) et $g \in L^2(e^{-\phi})$. Les deux premiers termes donnent la composante holomorphe de f. Notre formule principale, qui peut être vue comme une version complexe de l'ingrédient central de la *main formula* de Ball, Barthe et Naor, est la suivante :

Théorème 3.2 **([C05])**. — *Soit $\varphi : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction régulière telle que $\phi := \varphi(0,\cdot) : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ soit plurisousharmonique. Considérons la décomposition dans $L^2(e^{-\phi})$ de $w \longrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial z}(0,w)$ suivante :*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(0,w) = \frac{\int_{\mathbb{C}^n} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(0,\cdot)\, e^{-\phi}}{\int_{\mathbb{C}^n} e^{-\phi}} + H(w) + Lg(w), \tag{54}$$

avec $H \in \mathcal{H}_\phi$ (52) et $g \in L^2(e^{-\phi})$ régulière. Si Φ est la fonction définie par

$$e^{-\Phi(z)} = \int_{\mathbb{C}^n} e^{-\varphi(z,w)}\, d\lambda(w),$$

alors, en écrivant $(1, \overline{\partial} g) := \Big(1, \frac{\partial g}{\partial \overline{w}_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial \overline{w}_n}\Big) \in \mathbb{C}^{n+1}$, *on a*

(55)
$$e^{-\Phi(0)} \Delta\Phi(0)/4 \;=\; \int_{\mathbb{C}^n} \Big[\mathcal{L}\varphi_{(0,w)}\big(1, \overline{\partial} g(w)\big) + \sum_{j,k} \Big| \frac{\partial^2 g}{\partial \overline{w}_j \partial \overline{w_k}}(w) \Big|^2 - |H(w)|^2 \Big] \, e^{-\phi(w)} \, d\lambda(w).$$

Lorsque φ est plurisousharmonique des $(n+1)$ variables, alors $\mathcal{L}\varphi_{(0,w)}\big(\xi\big) \geq 0$ pour tout $w \in \mathbb{C}^n$ et $\xi \in \mathbb{C}^{n+1}$. On voit qu'alors le seul terme qui peut empêcher $\Delta\Phi(0)$ d'être positif est le terme en H, et donc la condition naturelle est de supposer que H est nul. On en déduit :

Théorème 3.3 **([C05] Une extension du théorème de Berndtsson)**
Soit $\varphi : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction plurisousharmonique. On suppose que la fonction*

$$w \longrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial z}(0, w)$$

est orthogonale dans $L^2(e^{-\varphi(0,\cdot)})$ *à l'espace*

$$\mathcal{H}_{\varphi(0,\cdot)} = \Big\{ h \in L^2(e^{-\varphi(0,\cdot)}) \;;\; \overline{\partial} h = 0 \;\; et \; \int_{\mathbb{C}^n} h(w) e^{-\varphi(0,w)} \, d\lambda(w) = 0 \Big\}. \tag{56}$$

Alors la fonction Φ *définie par* (44) *satisfait* $\Delta\Phi(0) \geq 0$.

Il est intéressant de voir comment on retrouve le résultat de Berndtsson, car cela éclaire son hypothèse d'invariance. Soit donc $\varphi : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction plurisousharmonique vérifiant (45). La fonction $e^{-\varphi(0,\cdot)}$ – évidemment – mais aussi la fonction $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}(0, \cdot)$ vérifient alors la même invariance. On déduit de cela que la composante holomorphe dans $\mathcal{H}_{\varphi(0,\cdot)}$ de $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(0, \cdot)$ (qui s'obtient comme une projection dans $L^2(e^{-\varphi(0,\cdot)})$) vérifie aussi cette invariance. Or une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^n$ invariante par l'action de S^1 est nécessairement constante (c'est ici que l'invariance intervient). Donc la projection sur les fonctions holomorphes de $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(0, \cdot)$ est une fonction constante, ce qui est une autre manière de dire que $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(0, \cdot)$ est orthogonale à $\mathcal{H}_{\varphi(0,\cdot)}$. On a donc bien, sous l'hypothèse d'invariance (45), que $\Delta\Phi(0) \geq 0$. Comme 0 est ici un point quelconque, on déduit que Φ est sous-harmonique.

Parmi les avantages éventuels de notre approche, on remarquera que son caractère purement fonctionnel permet de considérer le cas où la fibre au dessus de z est une variété complexe M (on peut faire les mêmes calculs pour $\varphi : \mathbb{C} \times M \longrightarrow \mathbb{R}$), tandis que l'hypothèse d'invariance de Berndtsson n'a de sens que sur $\mathbb{C}^n$ puisqu'elle utilise la structure linéaire. Notre méthode suggère aussi qu'il existe peut-être des liens structurels entre certains opérateurs différentiels et des théorèmes de type Prékopa pour des classes de fonctions définies à l'aide de ces opérateurs – convexité et plurisousharmonicité pouvant être définis localement à l'aide d'opérateurs de dérivation. Signalons enfin que Berndtsson [**Ber05**] a récemment utilisé une extension de cette méthode pour montrer une superbe généralisation du théorème 3.1 donnant des propriétés de plurisousharmonicité du noyau de Bergman.

3.2. Liens avec l'interpolation complexe. Inégalité de Santaló

Dans cette partie consacrée à des applications géométriques du résultat de Berndtsson, nous garderons la notation $d\lambda$ pour la mesure de Lebesgue mais nous préférerons la notation vol lorsque l'on travaillera avec des ensembles (donc $\lambda = \mathrm{vol}$).

Nous allons travailler avec des *espaces normés complexes* de dimension finie n, c'est-à-dire avec des espaces de la forme $X = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_X)$. Une *boule* de $\mathbb{C}^n$ est une boule unité $B_X := \{w \in \mathbb{C}^n\,;\ \|w\|_X \leq 1\}$ pour une certaine norme $\|\cdot\|_X$ sur $\mathbb{C}^n$. De façon équivalente, une boule de $\mathbb{C}^n$ est donc un convexe compact d'intérieur non vide et $\mathbb{C}$-symétrique au sens d'invariant par l'action $(w, \theta) \longrightarrow e^{i\theta} w$ de S^1 sur $\mathbb{C}^n$. On voit donc ici le lien avec l'hypothèse d'invariance de Berndtsson. Remarquons qu'une boule de $\mathbb{C}^n$ est un corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^{2n}$, alors que la réciproque est fausse en général.

Étant donné deux espaces $X = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_X)$ et $Y = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_Y)$ on note $[X, Y]_z = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_z)$ l'espace interpolé complexe de Caldéron entre X et Y en $z \in C := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Re(z) \leq 1\}$. Rappelons que $[X, Y]_z = [X, Y]_\theta$ avec $\theta = \Re(z)$. Par extension, si K et L sont deux boules de $\mathbb{C}^n$, on notera

$$[K, L]_z$$

la boule unité de l'espace interpolé en z entre les espaces ayant respectivement les boules K et L comme boule unité.

Ce qui rend les choses agréables en dimension finie, c'est que l'on a toujours que $[X, Y]_z^* = [X^*, Y^*]_z$ où $Z^* = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_*)$ désigne le dual (complexe) de $Z = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ dans la dualité

$$\langle w^1, w^2 \rangle := \sum_{k=1}^n w_k^1 w_k^2 \tag{57}$$

et $\|w\|_* := \sup_{\|w'\| \leq 1} |\langle w, w' \rangle|$. On tire de cela la formule suivante, que l'on pourra donc prendre comme définition de la norme interpolée $\|\cdot\|_z$ en z entre X et Y : pour $z \in \mathbb{C}$ et $w \in \mathbb{C}^n$,

$$\|w\|_z = \sup_{f \in B_N(X^*, Y^*)} |\langle f(z), w \rangle| \tag{58}$$

où

$$B_N(X^*, Y^*) := \{f \in \mathcal{F} \mid \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(it)\|_{X^*} \leq 1 \text{ et } \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(1 + it)\|_{Y^*} \leq 1\},$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \ := \ & \{f : C \longrightarrow \mathbb{C}^n \mid f \text{ continue bornée sur } C, \text{ holomorphe sur } \Re(z) \in (0,1) \text{ et telle que} \\ & \lim_{t \to \pm\infty} f(t + \alpha i) = 0 \text{ pour } \alpha = 0 \text{ ou } 1\}. \end{aligned}$$

Pour $f \in \mathcal{F}$, $z \in C$ et $w \in \mathbb{C}^n$, on voit que la fonction $(z, w) \longrightarrow \langle f(z), w \rangle$ est holomorphe, et donc si l'on prend son module on obtient une fonction plurisousharmonique. Par conséquent, comme un sup de fonctions plurisousharmoniques est plurisousharmonique, on déduit de la formule (58) que la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (z, w) & \longrightarrow & \|w\|_z \end{array}$$

est plurisousharmonique. Soit encore, pour K et L deux boules de $\mathbb{C}^n$, et leurs boules interpolées $[K,L]_z$, l'ensemble (qui n'est pas convexe !)

$$\bigcup_{z\in C}\{z\}\times[K,L]_z\subset\mathbb{C}^{n+1}$$

est pseudo-convexe.

En appliquant le résultat de Berndtsson avec $\varphi=0$ dans (47), on obtient, puisque $[K,L]_z$ est une boule et donc vérifie l'hypothèse (46), que la fonction

$$z\longrightarrow-\log(\mathrm{vol}([K,L]_z))$$

est sous-harmonique. Mais comme par construction de l'interpolation cette fonction ne dépend que de $\Re(z)$, *la sous-harmonicité implique la convexité* de cette fonction (c'est une propriété simple mais utile des fonctions ne dépendant que de la partie réelle de la variable). On a donc montré le

Théorème 3.4 **([C02a])**. — *Soit K et L deux boules de $\mathbb{C}^n$ et soit $[K,L]_z=[K,L]_{\Re(z)}$ leurs boules interpolées. Alors la fonction $t\longrightarrow\mathrm{vol}\big([K,L]_t\big)$ est log-concave sur $[0,1]$ et donc, pour $t\in[0,1]$,*

$$\mathrm{vol}\big([K,L]_t\big)\geq\mathrm{vol}(K)^{1-t}\mathrm{vol}(L)^t. \tag{59}$$

Remarquons que ce résultat peut aussi s'obtenir à partir de la forme simplifiée du théorème 3.1 en travaillant sur tout $\mathbb{C}^n$ avec la fonction plurisousharmonique $\varphi(z,w):=\|w\|_z$ où $\|\cdot\|_z$ est la norme interpolée de boule $[K,L]_z$, puisque pour toute norme $\|\cdot\|$ de boule unité K on a

$$\int_{\mathbb{C}^n}e^{-\|w\|}\,d\lambda(w)=c_n\mathrm{vol}(K)$$

où $c_n>0$ est une constante dépendant seulement de n.

Il est intéressant de remarquer que l'inégalité (59) *améliore* l'inégalité de Brunn-Minkowski (3) pour les boules de $\mathbb{C}^n$. En effet, en utilisant des propriétés du noyau de Poisson, on peut voir que

$$[K,L]_t\subset(1-t)K+tL. \tag{60}$$

On verra un cas particulier éclairant de cette inclusion plus loin.

Une des propriétés utiles de l'interpolation, que nous avons déjà utilisée, est qu'elle se combine très bien avec la dualité (ce qui n'est pas le cas de la somme de Minkowski). Étant donné un espace vectoriel normé complexe $X=(\mathbb{C}^n,\|\cdot\|_X)$, on définit l'espace conjugué $\overline{X}=(\mathbb{C}^n,\|\cdot\|_{\overline{X}})$ par $\|w\|_{\overline{X}}:=\|\overline{w}\|_X$ où $\overline{w}=(\overline{w}_1,\ldots\overline{w}_n)$ (la définition pour un espace vectoriel normé complexe X général est légèrement plus fastidieuse et revient à conjuguer la multiplication des scalaires) . La raison de cette opération, qui peut sembler étrange, est que nous avons défini la dualité à l'aide d'une forme bilinéaire complexe (57), alors que la structure hermitienne ℓ_2 est définie à l'aide d'une forme sesquilinéaire. Si X est un espace vectoriel complexe de dimension n et si $\overline{X}^*$ désigne son dual conjugué (peut importe l'ordre des opérations) alors

$$[X,\overline{X}^*]_{1/2}\cong\ell_2^n(\mathbb{C})=\ell_2^{2n}(\mathbb{R}).$$

Si K est une boule de $\mathbb{C}^n$, il est naturel de définir le polaire à l'aide de la structure euclidienne réelle :

$$K^\circ := \{w \in \mathbb{C}^n \ ; \ \forall \xi \in K, \ \big|\Re\big(\langle w, \overline{\xi}\rangle\big)\big| \leq 1\}.$$

Par conséquent, si K est la boule unité de $X = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_X)$, alors K° est exactement la boule unité de $\overline{X}^*$ car on a aussi, en utilisant la $\mathbb{C}$-symétrie de K,

$$K^\circ = \{w \in \mathbb{C}^n \ ; \ \forall \xi \in K, \ \big|\langle w, \overline{\xi}\rangle\big| \leq 1\}.$$

Par conséquent, on a, pour toute boule K de $\mathbb{C}^n$,

$$[K, K^\circ]_{1/2} = B_2^{2n}$$

où B_2^{2n} est la boule euclidienne standard de $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$. On tire donc de (59) que

$$\mathrm{vol}(K)\mathrm{vol}(K^\circ) \leq \mathrm{vol}(B_2^{2n})^2.$$

Cette inégalité est l'inégalité de Blaschke-Santaló [**San49**] (on dit aussi, plus brièvement, de Santaló) dans le cas particulier des boules de $\mathbb{C}^n$. L'inégalité de Santaló dit plus généralement que le produit du volume d'un corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$ et du volume de son polaire est maximal pour la boule euclidienne (voir [**MP90**]).

Nous pouvons considérer des mesures plus générales que la mesure de Lebesgue. En appliquant le résultat de Berndtsson avec $\varphi(z, w) = \varphi(w)$ pour un φ vérifiant les hypothèses d'invariance et $\Omega(z) = [K, L]_z$ dans (47) on obtient

Théorème 3.5 **(**[**C02a**]**).** — *Soit μ une mesure sur $\mathbb{C}^n$ vérifiant la condition suivante :*

$$(H) \ \begin{cases} d\mu(w) = e^{-\varphi(w)}\, d\lambda(w) \\ \varphi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R} \ \textit{ est plurisousharmonique et } \ \varphi(e^{i\theta} w) = \varphi(w), \ \ \forall \theta \in \mathbb{R}, \ \forall w \in \mathbb{C}^n. \end{cases}$$

Soit aussi K et L deux boules de $\mathbb{C}^n$ et $[K, L]_z$ les boules interpolées. Alors la fonction $t \longrightarrow \mu([K, L]_t)$ est log-concave et donc

$$\mu([K, L]_t) \geq \mu(K)^{1-t} \mu(L)^t. \tag{61}$$

Ainsi, toute mesure μ vérifiant la condition (H) vérifie l'inégalité de Santaló

$$\mu(K)\mu(K^\circ) \leq \mu(B_2^{2n}), \tag{62}$$

pour toute boule K de $\mathbb{C}^n$. Un cas de mesure μ vérifiant la condition (H) est une mesure log-concave sur $\mathbb{C}^n$ qui a l'invariance requise et l'exemple typique est la mesure gaussienne γ_{2n}. Nous pensons que l'inégalité (62) est vraie sur $\mathbb{R}^n$ pour tout corps convexe symétrique K et toute mesure log-concave paire.

Remarquons que pour $a, b > 0$ et K une boule de $\mathbb{C}^n$, on a

$$[aK, bK]_t = a^{1-t} b^t K.$$

Cela suggère que l'interpolation a plus à voir avec une moyenne géométrique des boules qu'avec une moyenne arithmétique. Dans ce cas particulier, l'inclusion (60) se résume à

$$a^{1-t} b^t \leq (1-t)a + tb.$$

Nous constatons donc que toute mesure de la forme (H) vérifie que la fonction $\lambda \longrightarrow \mu(e^\lambda K)$ est log-concave. Dans le cas de la mesure gaussienne, c'est un cas particulier de la (B)-conjecture que nous étudierons plus loin.

4. CADRE GAUSSIEN : CONVEXITÉ ET MESURE GAUSSIENNE

4.1. Mesures log-concaves par rapport à la gaussienne et corrélation

Certaines propriétés de la mesure gaussienne découlent seulement du fait que c'est une mesure avec un potentiel uniformément convexe. Nous avons déjà vu le cas des inégalités de Sobolev logarithmiques et de transport. Cependant, certaines inégalités fines reposent sur la structure particulière de la mesure gaussienne. L'exemple le plus frappant est l'inégalité isopérimétrique gaussienne découverte indépendamment par Sudakov et Tsirel'son, et Borell : à mesure gaussienne fixée, ce sont les demi-espaces qui minimisent la mesure de surface gaussienne. Si l'on introduit la fonction répartition gaussienne $\phi(t) = \gamma_1(]-\infty, t[) = \int_{-\infty}^{t} e^{-s^2/2}\,\frac{ds}{\sqrt{2\pi}}$, alors la fonction isopérimétrique gaussienne est définie par $I = \phi' \circ \phi^{-1}$:

$$I(a) = \int_{\partial H} d\gamma_n\,, \qquad \text{où } H \text{ est un demi-espace tel que } \gamma_n(H) = a.$$

Bobkov [**Bob97**] a mis en valeur la forme fonctionnelle suivante de l'isopérimétrie. Pour $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$ régulière, on a

$$I\left(\int f d\gamma_n\right) \leq \int \sqrt{I^2(f) + |\nabla f|^2}\, d\gamma_n. \tag{63}$$

En appliquant cette inégalité à une fonction indicatrice, on retrouve la forme géométrique de l'isopérimétrie gaussienne. On peut aussi retrouver, en faisant un DL au voisinage de $f \cong 1$, l'inégalité de log-Sobolev gaussienne. Bakry et Ledoux [**BL96**] ont montré que l'inégalité (63) reste vraie si l'on remplace γ_n par une mesure de probabilité μ vérifiant

$$d\mu(x) = e^{-V(x)}\, dx \quad \text{ avec } \quad \mathrm{Hess}_x V \geq \mathrm{Id}\,, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{64}$$

Cela donne une estimation isopérimétrique pour μ, la fonction I restant néanmoins la fonction isopérimétrique gaussienne et non pas celle de la mesure μ.

Dans notre travail avec Franck Barthe et Matthieu Fradelizi [**BCF01**], nous étudions une forme inverse de (63) que nous avons appris de Beckner (mais qui était aussi implicite dans [**BL96**]) : pour $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$ régulière à support compact,

$$\sqrt{\left(\int I(f)\, d\gamma_n\right)^2 + \left|\int \nabla f\, d\gamma_n\right|^2} \leq I\left(\int f\, d\gamma_n\right). \tag{65}$$

Nous montrons que ce type d'inégalité est adapté pour l'étude du problème géométrique suivant, dit *problème du shift*, qui consiste à déterminer (ou à estimer), pour une mesure de probabilité μ, les ensembles dont la mesure change le plus lorsqu'on les translate. Bobkov [**Bob99**] a résolu le problème pour la mesure gaussienne (les demi-espaces sont encore extrémaux) et caractérisé les mesures μ vérifiant l'inégalité de *shift* de type gaussien suivante : pour $A \subset \mathbb{R}^n$ et $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\mu(A+v) \leq \phi\big(\phi^{-1}(\mu(A)) + c|v|\big)$$

pour une constante $c > 0$ fixée. En utilisant une méthode de semi-groupe (un Ornstein-Uhlenbeck adapté) nous montrons que toute probabilité μ de la forme $d\mu(x) = e^{-V(x)}\,dx$ avec $\|\,\mathrm{Hess}\,V\| \leq \mathrm{Id}$ – ce qui apparaît comme une condition inverse de (64) – satisfait l'inégalité (65), avec μ à la place de γ_n. Nous montrons aussi une propriété de tensorisation pour cette inégalité : si la mesure μ la satisfait, alors la mesure produit $\mu^{(k)}$ sur $\mathbb{R}^{nk}$ aussi. On complète aussi l'étude par l'équivalence entre cette inégalité et une forme inverse de l'inégalité de Sobolev logarithmique (ce qui fait le parallèle, pour des formes inverses, avec l'étude de Bakry et Ledoux). On peut aussi remarquer que le problème du *shift* gaussien est lié au problème de la maximisation de la *norme du barycentre* d'un ensemble de mesure donnée. En effet, une forme *a priori* plus faible de (65) (mais dont nous avons montré qu'elle était équivalente), observée par Bobkov, est que pour $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ régulière à support compact, on a

$$\left|\int \nabla f\, d\gamma_n\right| \leq I\left(\int f\, d\gamma_n\right). \tag{66}$$

Comme $\displaystyle\int \nabla f\, d\gamma_n = \int x f(x) d\gamma_n(x)$, l'inégalité appliquée à $f = 1_A$, pour $A \subset \mathbb{R}^n$, devient

$$\left|\int_A x\, d\gamma_n\right| \leq I(\gamma_n(A)) \tag{67}$$

Cette inégalité traduit le fait que les demi-espaces maximisent la norme du barycentre à mesure gaussienne fixée. En fait, on a un principe bien plus général (et par ailleurs trivial à établir) : si μ est une probabilité sur $\mathbb{R}^n$ qui ne charge pas les hyperplans et qui a un moment d'ordre 1 fini, Ψ une fonction convexe sur $\mathbb{R}^n$ et $a \in [0,1]$, on a

$$\sup_{\mu(A)=a} \Psi\Big(\int_A x\, d\mu(x)\Big) = \sup\left\{\Psi\Big(\int_H x\, d\mu(x)\Big)\,;\ H \text{ demi-espace tel que } \mu(H) = a\right\};$$

de plus, si Ψ atteint son minimum en au plus un point (comme dans le cas (67) où $\psi = |\cdot|$), seuls les demi-espaces sont extrémaux (bien entendu *modulo* un ensemble de mesure nulle pour μ).

Une mesure vérifiant (64) est une mesure log-concave par rapport à la gaussienne, puisqu'elle peut s'écrire sous la forme $d\mu(x) = e^{-W(x)}\,d\gamma_n(x)$ avec W convexe. Il est naturel d'autoriser que μ ait un support (convexe) éventuellement plus petit que $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une mesure μ est une *mesure log-concave par rapport à γ_n*, si

$$d\mu(x) = e^{-V(x)}\,d\gamma_n(x) \quad \text{avec} \quad V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \text{ convexe.} \tag{68}$$

Rappelons que V est continue sur son *domaine* donné par l'ensemble convexe $\mathrm{int}\big(\{x \in \mathbb{R}^n\ ;\ V < +\infty\}\big)$, et que l'on peut facilement approcher une mesure μ de la forme (68) par une mesure de la forme (64) qui a une densité régulière sur $\mathbb{R}^n$ tout entier. Plus généralement, on dit qu'*une mesure μ est log-concave par rapport à une mesure ν*, si γ_n est remplacée par ν dans (68).

Nous avons déjà vu que beaucoup d'inégalités valables pour la mesure gaussienne étaient vraies également pour les mesures de la forme (64). On doit à Caffarelli un résultat qui permet d'expliquer en partie ce phénomène. Le résultat de Caffarelli s'énonce pour une mesure gaussienne quelconque (pas nécessairement la mesure gaussienne standard) :

Théorème 4.1 **(Caffarelli [Caf00])**. — *Soit ν une mesure gaussienne, $d\nu(x) = e^{-Q(x)}\,dx$ où Q est une forme quadratique, et $\tilde\nu$ une mesure log-concave par rapport à ν. Alors le transport de Brenier $T = \nabla\varphi$ de ν sur $\tilde\nu$ est une contraction :*

$$0 \le \mathrm{Hess}\,\varphi \le \mathrm{Id}\,.$$

Nous ne discuterons pas ici des problèmes de régularité du transport (nous sommes heureusement dans un cadre où les résultats de régularité de Caffarelli s'appliquent). Un cas typique de mesure log-concave par rapport à une gaussienne ν est la restriction (que l'on prend en général normalisée) de la mesure ν à un ensemble convexe $K \subset \mathbb{R}^n$,

$$\nu_K(A) := \frac{\nu(A\cap K)}{\nu(K)} \qquad \text{pour tout } A \subset \mathbb{R}^n. \tag{69}$$

Dans [**C02b**], nous avons utilisé le résultat de Caffarelli pour l'étude d'inégalités de corrélation gaussiennes. Nous retrouvons entre autres un cas particulier de la conjecture de la corrélation gaussienne démontré par Hargé en utilisant le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck. La *conjecture de la corrélation gaussienne* stipule que pour K, L deux convexes symétriques de $\mathbb{R}^n$,

$$\gamma_n(K\cap L) \ge \gamma_n(K)\gamma_n(L). \tag{70}$$

Pitt [**Pit77**] a montré qu'elle est vraie en dimension $n = 2$, mais le meilleur résultat connu en dimension n est dû à Hargé [**Har99**] qui a montré que l'inégalité (70) est vraie lorsqu'un des deux corps convexes symétriques est un ellipsoïde. Cela étend, par approximation, le résultat de Šidák [**Šid67**] affirmant que l'inégalité est vraie lorsque l'un des ensembles est une bande (symétrique).

Donnons-nous un ellipsoïde $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n\ ;\ Ax\cdot x \le 1\} = \sqrt{A^{-1}}B_2^n$, où A est une matrice symétrique définie positive etB_2^n la boule euclidienne standard de $\mathbb{R}^n$. En faisant le changement de variables $x = \sqrt{A}y$, nous voyons que nous devons montrer que, pour tout corps convexe symétrique $K \subset \mathbb{R}^n$, on a

$$\nu(K\cap B_2^n) \ge \nu(K)\nu(B_2^n)$$

où ν est la mesure gaussienne donnée par $d\nu(y) = e^{-A^{-1}y\cdot y}/\sqrt{(2\pi)^n \det A}$. Soit encore, en utilisant la mesure ν restreinte à K définie en (69),

$$\nu_K(B_2^n) \ge \nu(B_2^n).$$

D'après le résultat de Caffarelli, on sait que le transport de Brenier $T = \nabla\varphi$ de ν sur ν_K est une contraction. Comme ces deux mesures sont symétriques, par unicité du transport de Brenier, T est impaire, et donc en particulier $T(0) = 0$. Par conséquent, $|T(x)| \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et donc $T^{-1}(B_n^2) \supset B_2^n$. L'inégalité voulue découle alors de la définition de la mesure image $\nu_K(B_2^n) = \nu(T^{-1}(B_2^n)) \geq \nu(B_2^n)$.

La symétrie a été utilisée uniquement sous la forme $T(0) = 0$. Cette méthode permet aussi de montrer certaines inégalités de corrélation pour des ensembles convexes non symétriques. Nous exhibons en particulier certaines formes non-symétriques du résultat de Šidák, qui sont à comparer à des versions non-symétriques obtenues par E. Werner et Szarek. Ces résultats peuvent aussi se démontrer en utilisant le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck.

La corrélation gaussienne est un exemple où se rencontrent ensembles convexes symétriques de $\mathbb{R}^n$ et mesure gaussienne γ_n. La (B)-conjecture en est un autre exemple.

4.2. La (B)-conjecture

La question suivante est due à Banaszczyk et a été popularisée par Latała [**Lat02**] sous le nom de (B)-conjecture : étant donné un convexe symétrique $K \subset \mathbb{R}^n$, a-t-on

$$\gamma_n\big(\sqrt{ab}\,K\big) \geq \sqrt{\gamma_n(a\,K)\,\gamma_n(b\,K)} \tag{71}$$

pour tout $a, b > 0$? Nous démontrons que ce résultat est vrai sous la forme équivalente suivante :

Théorème 4.2 ([**CFM04**]). — *Pour tout convexe symétrique $K \subset \mathbb{R}^n$, la fonction*

$$\lambda \longrightarrow \gamma_n\big(e^{\lambda}\,K\big)$$

est log-concave sur $\mathbb{R}$.

Il résulte de l'inégalité de Prékopa–Leindler que la fonction $t \longrightarrow \gamma_n(tK)$ est log-concave. Ce que nous voulons, c'est donc une amélioration de ce résultat qui fait penser à l'amélioration (61) de l'inégalité de Brunn-Minkowski (voir les commentaires suivant le théorème 3.5). Le problème est qu'il n'y a pas (pour l'instant ?) de notion réelle sur $\mathbb{R}^n$, géométriquement utile, d'interpolation analogue à l'interpolation complexe, sauf dans le cas des corps inconditionnels. En effet, on peut définir, dans le cas inconditionnel, $[K, L]_t$ de sorte que $[aK, bL]_t = a^{1-t}b^t[K, L]_t$, et cette définition se combine bien avec une version multiplicative de l'inégalité de Prékopa–Leindler (tout ici peut s'obtenir par changement de variables logarithmique). Nous avons exploité ce point de vue dans [**CFM04**] pour démontrer des versions générales de (B)-conjecture pour les ensembles et les mesures inconditionnelles.

Dans le cas d'un corps convexe général K, on exploite la structure propre à la mesure gaussienne. Pour montrer que $\lambda \longrightarrow \gamma_n\big(e^{\lambda}\,K\big)$ est log-concave, il suffit de montrer que la dérivée seconde en $\lambda = 0$ se comporte comme il faut, ce qui revient, après calcul, à montrer que, pour γ_K, la mesure gaussienne normalisée restreinte à K (définie comme en (69)), on a :

$$\int\Big(|x|^2 - \int |v|^2\,d\gamma_K(v)\Big)^2\,d\gamma_K(x) \leq 2\int |x|^2\,d\gamma_K(x) = \frac{1}{2}\int \big|\nabla(|x|^2)\big|\,d\gamma_K(x). \tag{72}$$

La mesure γ_K est une mesure log-concave par rapport à la gaussienne et peut donc s'approcher par une mesure μ de la forme (64). Par ailleurs la mesure γ_K est paire, et donc $\int x\, d\gamma_K(x) = 0$. L'inégalité (72) découle alors d'une inégalité spectrale plus générale.

Proposition 4.3 **([CFM04])**. — *Soit μ une mesure de la forme $d\mu(x) = e^{-V(x)}\, dx$ avec* $\operatorname{Hess} V \geq \operatorname{Id}$ *. Pour toute fonction régulière $f \in L^2(\mu)$, telle que $\int f\, d\mu = 0$ et $\int \nabla f\, d\mu = 0$, on a*

$$\int f^2\, d\mu \leq \frac{1}{2} \int |\nabla f|^2\, d\mu. \tag{73}$$

Il est bien connu que, pour une mesure μ comme dans la proposition, on a, pour toute fonction f régulière telle que $\int f\, d\mu = 0$,

$$\int f^2\, d\mu \leq \int |\nabla f|^2\, d\mu. \tag{74}$$

Cette inégalité découle de l'inégalité de Sobolev logarithmique de Bakry-Émery que nous avons étudiée, mais aussi d'un résultat antérieur plus général de Brascamp-Lieb [**BL76a**]. Cette inégalité est équivalente à une estimation du trou spectral pour la mesure μ. Dans la proposition précédente, nous voulons améliorer l'inégalité en supposant en plus que f est aussi orthogonale à un certain sous-espace (de dimension n), qui, dans le cas gaussien, serait justement le sous-espace propre (formé des fonctions linéaires) associé à la première valeur propre non nulle. L'idée est que nous passons ainsi à la deuxième valeur propre.

Nous proposons deux démonstrations de la proposition. La première consiste à observer que l'inégalité est évidemment vraie dans le cas gaussien $\mu = \gamma_n$ où l'on a une analyse spectrale exacte, la deuxième valeur propre étant justement 2. Pour passer à la mesure μ, on utilise le résultat de Caffarelli (théorème 4.1) qui garantit que l'on peut passer de γ_n à μ par une contraction. La deuxième méthode consiste à utiliser une méthode L^2, que nous avons appelée ailleurs méthode variationnelle ou par dualité. Pour montrer (73), on introduit $u \in L^2(\mu)$ telle que

$$f = Lu.$$

Le début de cette méthode à la Bochner est classique et consiste à utiliser la formule

$$\int (Lu)^2\, d\mu = \int \Big[\operatorname{Hess} V(\nabla u) \cdot \nabla u \;+ \sum_{i,j \leq n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 \Big]\, d\mu \tag{75}$$

qui se combine avec l'uniforme convexité du potentiel V. Mais, ici, on veut mieux et pour cela, on remarque que l'hypothèse sur f nous autorise à recentrer ∇u et donc à pouvoir appliquer l'inégalité de trou spectral (74) aux coordonnées $\partial_i u$ de ∇u. C'est ce qui nous permet de gagner le terme supplémentaire souhaité dans l'expression duale. On trouve ici un exemple où l'on utilise explicitement le terme $\sum \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2$ dans (75).

Terminons cette partie par quelques commentaires et questions sur les liens entre mesure gaussienne et ensembles convexes symétriques, ou aussi, par extension, fonctions log-concaves paires. Ces questions sont parfois assez délicates, car on ne sait pas toujours comment utiliser la convexité et parfois encore moins la symétrie. Nous avons déjà vu les exemples de la corrélation gaussienne et de la (B)-conjecture. On peut signaler également le résultat important de Latała et Oleszkiewicz [**LO99**] : à mesure gaussienne fixée, le convexe symétrique pour lequel la mesure gaussienne augmente le plus lorsqu'on le dilate (par un facteur plus grand que 1) est la bande symétrique. La démonstration est bien plus délicate que celle de la (B)-conjecture (et plus délicate aussi que celle du résultat analogue démontré par Sudakov et Tsirel'son dans le cas non-symétrique où l'ensemble extrémal est un demi-espace). Un autre exemple intéressant est l'inégalité de Santaló dont nous avons déjà parlé : pour tout corps convexe symétrique $K \subset \mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{vol}(K)\mathrm{vol}(K^\circ) \le \mathrm{vol}(B_2^n)^2 \tag{76}$$

où K° est le polaire de K. Dans sa thèse [**Bal86**] non-publiée (l'argument, qui repose sur la forme géométrique (76) est repris dans [**AAKM04**]) K. Ball a démontré la très belle forme fonctionnelle suivante de l'inégalité de Santaló : pour toute fonction convexe paire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on a

$$\int e^{-f} \int e^{-f^*} \le (2\pi)^n = \left(\int e^{-|x|^2/2}\right)^2, \tag{77}$$

où f^* désigne la transformée de Legendre de f. On remarque qu'il n'est pas nécessaire de supposer f convexe puisque l'inégalité s'améliore en vertu de $f \ge f^{**}$. On retrouve l'inégalité (76) en appliquant l'inégalité à $f = \|\cdot\|_K^2/2$ où $\|\cdot\|_K$ est la norme (jauge) associée à K. Dans ce cas, $f^* = \|\cdot\|_{K^\circ}^2/2$, et chaque intégrale est un multiple dépendant de la dimension du volume du corps correspondant. En faisant intervenir arbitrairement la mesure gaussienne γ_n, on peut récrire l'inégalité (77) de la manière suivante : pour $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ paire on a

$$\int e^{-\varphi}\, d\gamma_n \int e^{Q_1(\varphi)}\, d\gamma_n \le 1,$$

où $Q_c(\varphi)(x) := \inf_{y\in\mathbb{R}^n} \Big\{\varphi(y) + \dfrac{1}{2c}|y-x|^2\Big\}$. La propriété (τ) de Maurey, qui découle du théorème de Prékopa-Leindler sous sa forme gaussienne (p. 10) avec $t = 1/2$, $h = 1$,$f = e^{-\varphi}$ et $g = e^{Q_2\varphi}$ donne

$$\int e^{-\varphi}\, d\gamma_n \int e^{Q_2(\varphi)}\, d\gamma_n \le 1,$$

pour toute fonction φ, sans hypothèse de parité. Ainsi, le but est d'améliorer cette inégalité (en passant de Q_2 à Q_1) sous l'hypothèse que φ est paire. Pour l'instant, on ne connaît pas d'argument fonctionnel pour le faire.

5. SEMI-GROUPES, ENTROPIE ET INÉGALITÉS DE BRASCAMP-LIEB

Carlen, Lieb et Loss [**CLL04**] ont introduit une nouvelle approche des inégalités de convolution basée sur le semi-groupe de la chaleur. Ce travail a révolutionné la compréhension des inégalités de type Brascamp-Lieb et a fortement inspiré les développements décrits dans cette partie. Nous allons présenter notre étude [**BC04**] avec Franck Barthe, traitant principalement des inégalités de Brascamp-Lieb inverses, et notre travail [**BCM06**], avec Franck Barthe et Bernard Maurey, proposant une nouvelle approche et des extensions des inégalités sphériques introduites par Carlen, Lieb et Loss.

5.1. Inégalités de Brascamp-Lieb

L'inégalité de convolution d'Young sur $\mathbb{R}$ dit que, pour $f \in L^p$, $g \in L^q$, et $h \in L^r$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, on a

$$\|f * g\|_{L^r} \leq C_{p,q,r} \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^r}.$$

Il résulte des travaux de Brascamp et Lieb [**BL76b**] et Beckner [**Bec75**] que la meilleure constante $C_{p,q,r}$ dans cette inégalité est en général strictement plus petite que 1 et que les fonctions extrémales sont des gaussiennes. En calculant la norme L^r grâce à une fonction test h dans $L^{r'}$ avec $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$, on voit, en remplaçant $f \geq 0$ par $f^{1/p}$ (*idem* pour g et h), que l'on est amené à estimer

$$A := \iint f(x)^{1/p}\, g(y-x)^{1/q}\, h(-y)^{1/r'}\, dxdy$$

en terme de $(\int_{\mathbb{R}} f)^{1/p} (\int_{\mathbb{R}} g)^{1/q} (\int_{\mathbb{R}} h)^{1/r'}$, et la condition sur les coefficients devient une condition de *scaling* naturelle : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r'} = 2$. On peut avoir sur A deux points de vue différents. On remarque que si H est l'hyperplan de $\mathbb{R}^3$ donné par $H = e^{\perp}$ où $e = (1,1,1)$, alors

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{H \subset \mathbb{R}^3} f(u)^{1/p} g(v)^{1/q} h(w)^{1/r'}\, dudvdw.$$

On voit ici de possibles applications géométriques, en particulier pour l'étude du volume des sections du cube, comme l'a remarqué Ball [**Bal89**]. On peut récrire A sous la forme

$$A = \int_{\mathbb{R}^2} f(X \cdot v_1)^{1/p} g(X \cdot v_2)^{1/q} h(X \cdot v_3)^{1/r'}\, dX,$$

où $v_1 = (1,0) \in \mathbb{R}^2$, $v_2 = (1,-1)$ et $v_3 = (0,-1)$. Cette forme suggère de s'intéresser à des généralisations à plus de trois fonctions/vecteurs, et c'est de cela que traitent les inégalités de Brascamp-Lieb [**BL76b**].

Nous allons étudier les inégalités de Brascamp-Lieb en nous plaçant dans un cadre géométrique motivé par la géométrie des corps convexes et les travaux de Ball. En fait, c'est aussi, du point de vue théorique, le cadre général.

On fixe une fois pour toutes des vecteurs $u_1, \dots, u_m$ de $\mathbb{R}^n$ et des nombres $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}_+$ qui *décomposent l'identité*, au sens où

$$c_i > 0, \quad |u_i| = 1, \quad \sum_{i=1}^m c_i\, u_i \otimes u_i = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}. \tag{78}$$

On remarquera que l'on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$x = \sum_{i=1}^m c_i (x\cdot u_i) u_i, \quad \text{et} \quad |x|^2 = \sum_{i=1}^m c_i (x\cdot u_i)^2. \tag{79}$$

Remarquons aussi que l'on a $\displaystyle\sum_{i=1}^m c_i = n$ et que la forme duale de l'inégalité $|x|^2 \le \sum c_i (x\cdot u_i)^2$ (qui est ici une égalité) est :

$$\forall \theta_1, \dots, \theta_m \in \mathbb{R}, \quad \left|\sum_{i=1}^m c_i\, \theta_i\, u_i\right|^2 \le \sum_{i=1}^m c_i\, \theta_i^2. \tag{80}$$

La version géométrique mise en valeur par Ball de l'inégalité de Brascamp-Lieb est la suivante : étant donné des fonctions positives $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i(x\cdot u_i)^{c_i}\, dx \le \prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} f_i\right)^{c_i}. \tag{81}$$

Barthe [**Bar98b**] a montré l'inégalité inverse suivante : si $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ et $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ sont telles que, pour tout $(\theta_1, \dots, \theta_m) \in \mathbb{R}^m$,

$$h\Big(\sum_{i=1}^m c_i \theta_i u_i\Big) \ge \prod_{i=1}^m f_i(\theta_i)^{c_i}, \tag{82}$$

alors on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \ge \prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} f_i\right)^{c_i}. \tag{83}$$

Si l'on applique cette inégalité avec $n = 1$, $m = 2$ et la décomposition triviale $u_1 = u_2 = 1$, $c_1 = 1-t$ et $c_2 = t$, on retrouve l'inégalité de Prékopa-Leindler (p. 6) en dimension 1.

Jusqu'à il y a peu, la preuve la plus simple de ces inégalités reposait sur le transport de Brenier (voir [**Bar98b**]). Carlen, Lieb et Loss [**CLL04**] ont ouvert une nouvelle voie en proposant une preuve par semi-groupe de la chaleur de l'inégalité de Brascamp-Lieb dans sa forme générale que nous n'énoncerons pas ici. Ils démontrent qu'en choisissant un semi-groupe de la chaleur pour une structure euclidienne particulière (qui, dans le cas géométrique décrit ici, est justement la structure usuelle), le membre de gauche dans l'inégalité de Brascamp-Lieb augmente au cours du temps. Et, comme les solutions du semi-groupe de la chaleur sont asymptotiquement des gaussiennes, on retrouve ainsi le résultat de Brascamp-Lieb selon lequel les gaussiennes sont les fonctions extrémales de l'inégalité.

Rétrospectivement, on peut penser que les articles de Borell [**Bor93, Bor00**], où l'on trouve des approches par semi-groupe et par calcul stochastique de l'inégalité de Prékopa-Leindler, annonçaient la pertinence de l'approche par semi-groupe pour ces problèmes. Plus récemment, Borell [**Bor03**] à proposé un nouvel argument de semi-groupe pour l'étude de l'inégalité d'Ehrhard (qui est une magnifique forme gaussienne extrêmement précise de l'inégalité de Brunn-Minkowski), dont nous nous sommes inspirés pour étudier la forme inverse de l'inégalité de Brascamp-Lieb.

Dans [**BC04**], nous montrons que le semi-groupe de la chaleur permet une démonstration simple de l'inégalité de Brascamp-Lieb inverse (83), ce qui complète l'étude de Carlen-Lieb-Loss. Nous remarquons aussi que dans le cas géométrique étudié ici, l'argument par semi-groupe est particulièrement simple (la raison cachée étant que les gaussiennes optimales dans l'inégalité de Brascamp-Lieb sont alors toutes identiques).

Plutôt que de reprendre cet argument, nous préférons saisir l'occasion de ce mémoire pour présenter une variante – plus sophistiquée – qui repose sur la formule de Borell (20), que nous rappelons. Soit $\mathcal{F}$ une filtration (ayant les bonnes propriétés usuelles), $(B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}$-mouvement brownien sur un certain $\mathbb{R}^N$, P_t le semi-groupe de la chaleur sur $\mathbb{R}^N$, et pour un temps fixé $t > 0$, $\mathcal{U}_t(\mathcal{F})$ l'ensemble des processus progressivement mesurables par rapport $(\mathcal{F}_s)_{0\leq s\leq t}$ à valeur dans $\mathbb{R}^N$. Pour $V : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, on a

$$-\log P_t\big(e^{-V}\big)(0) \;=\; \inf_{U\in\mathcal{U}_t(\mathcal{F})} \mathbb{E}\Big[V\big(X_t^U\big) + \frac{1}{2}\int_0^t |U_s|^2\, ds\Big] \tag{84}$$

où $X_t^U = B_t + \int_0^t U_s\, ds$, c'est-à-dire que X_t^U est la valeur au temps t du processus partant de 0 et vérifiant, pour $s \leq t$,

$$dX_s^U = dB_s + U_s\, ds.$$

On rappelle qu'il existe processus optimal (21), donné par un *drift* optimal caractérisé par $U_s = -\nabla\big(-\log P_{t-s}(e^{-V})\big)(X_s^U)$, pour lequel on a égalité dans la formule. On renvoie à la page 14 pour plus de précisions.

Commençons par démontrer l'inégalité de Brascamp-Lieb (81). Introduisons les fonctions $F_i = -\log(f_i) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ($f_i = e^{-F_i}$). On définit la fonction F sur $\mathbb{R}^n$ par

$$F(y) := \sum_{i=1}^m c_i\, F_i(y\cdot u_i) \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

On prend le *drift* optimal $U \in \mathcal{U}_t(\mathcal{F})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ dans la formule de Borell pour e^{-F}. On introduit alors

$$U_s^i := U_s\cdot u_i \in \mathcal{U}_t(\mathcal{F})$$

et $B_t^i := B_t\cdot u_i$, qui est encore un $\mathcal{F}$-mouvement brownien, mais sur $\mathbb{R}$ maintenant. La décomposition de l'identité (79) nous donne alors

$$U_s = \sum c_i U_s^i\, u_i \quad\text{ et }\quad |U_s|^2 = \sum c_i\,(U_s^i)^2.$$

On a :

$$\begin{aligned} -\log P_t\left(e^{-F}\right)(0) &= \mathbb{E}\left[F\big(B_t + \int_0^t U_s\,ds\big) + \frac{1}{2}\int_0^t |U_s|^2\,ds\right] \\ &= \sum_{i=1}^m c_i\,\mathbb{E}\left[F_i\big(B_t^i + \int_0^t U_s^i\,ds\big) + \frac{1}{2}\int_0^t (U_s^i)^2\,ds\right]. \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Borell à e^{-F_i} avec comme *drift* test U^i on a

$$\mathbb{E}\left[F_i\big(B_t^i + \int_0^t U_s^i\,ds\big) + \frac{1}{2}\int_0^t (U_s^i)^2\,ds\right] \geq -\log\left(P_t\,e^{-F_i}(0)\right).$$

Par conséquent, on trouve

$$-\log P_t\left(e^{-F}\right)(0) \geq -\sum c_i\,\log\left(P_t\,e^{-F_i}(0)\right), \tag{85}$$

soit encore, en faisant $t \to \infty$ et en utilisant que $\sum c_i = n$,

$$-\log\int e^{-F} \geq -\sum c_i\,\log\int e^{-F_i},$$

ce qui revient à (81) avec les notations $f_i = e^{-F_i} \geq 0$.

Démontrons de même l'inégalité de Brascamp-Lieb inverse (82)-(83). On remplace encore les fonctions f par e^{-F}. Soit donc $F_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tel que, pour tout $\theta_i \in \mathbb{R}$,

$$H(\sum c_i\theta_i\,u_i) \leq \sum c_i F_i(\theta_i).$$

On fixe un $\mathcal{F}$-mouvement brownien $B = (B_t)_{t\geq 0}$ sur $\mathbb{R}^n$. Alors $B^i := B \cdot u_i$ est un $\mathcal{F}$-mouvement brownien sur $\mathbb{R}$. Soit $U_s^i \in \mathcal{U}_t(\mathcal{F})$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$) le *drift* optimal dans la formule de Borell (84) (en dimension 1) pour e^{-F_i}. On définit alors $U \in \mathcal{U}_t(\mathcal{F})$ (à valeurs dans $\mathbb{R}^n$) par

$$U_s := \sum c_i U_s^i\,u_i.$$

On utilise la formule de Borell en dimension n pour e^{-H} avec U comme *drift* test. On remarque d'abord que $\sum c_i B^i\,u_i = B$ d'après (79) et donc que

$$H\left(B_t + \int_0^t U_s\,ds\right) = H\left(\sum c_i\big[B_t^i + \int_0^t U_s^i\,ds\big]\,u_i\right) \leq \sum c_i F_i\left(B_t^i + \int_0^t U_s^i\,ds\right).$$

Par ailleurs, on a aussi, d'après (80),

$$|U_s|^2 = \left|\sum c_i U_s^i\,u_i\right|^2 \leq \sum c_i (U_s^i)^2.$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} -\log P_t\left(e^{-H}\right)(0) &\leq \mathbb{E}\left[H\big(B_t + \int_0^t Y_s\,ds\big) + \frac{1}{2}\int_0^t |Y_s|^2\,ds\right] \\ &\leq \sum c_i\,\mathbb{E}\left[F_i\big(B_t^i + \int_0^t U_s^i\,ds\big) + \frac{1}{2}\int_0^t (U_s^i)^2\,ds\right] \\ &= -\sum c_i\,\log\left(P_t\,e^{-F_i}(0)\right). \end{aligned} \tag{86}$$

Par homogénéité ($\sum c_i = n$), on a, quand $t \to \infty$, $-\log\left(\int e^{-H}\right) \leq -\sum c_i \log\left(\int e^{-F_i}\right)$, ce qui est exactement l'inégalité voulue (83) avec les nouvelles notations.

Remarquons que l'argument par semi-groupe donne plus. En effet, les inégalités (85) et (86) nous disent que les inégalités se propagent le long du temps. Par ailleurs, nous avons fait tendre t vers $+\infty$ pour retrouver les inégalités, mais nous aurions pu nous arrêter à $t = 1$ et énoncer les inégalités sous forme gaussienne. Ces inégalités, où l'on intègre par rapport à la mesure gaussienne sont équivalentes aux inégalités usuelles (tout comme c'est le cas pour l'inégalité de Prékopa-Leindler).

Par ailleurs, cette méthode permet de traiter de la même manière le cas du semi-groupe P_t^ψ dont le générateur est l'*opérateur de Schrödinger*

$$Lf := \frac{1}{2}\Delta f + \psi f \tag{87}$$

pour un potentiel $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. En effet, on a la formule suivante (utilisée par Borell [**Bor00**]) :

$$-\log P_t^\psi\big(e^{-V}\big)(0) \;=\; \inf_{U \in \mathcal{U}_t(\mathcal{F})} \mathbb{E}\Big[V\big(X_t^U\big) - \int_0^t \psi(X_s^U)\, ds + \frac{1}{2}\int_0^t |U_s|^2\, ds\Big],$$

le *drift* optimal étant encore donné par $U_s = -\nabla\big(-\log P_{t-s}^\psi(e^{-V})\big)(X_s^U)$. Toujours dans le cas de la décomposition de l'identité (78), on obtient, en reprenant la démonstration ci-dessus, l'extension suivante des inégalités de Brascamp-Lieb et de Barthe :

Proposition 5.1. — *Soit $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ et $\psi_1, \dots, \psi_m : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Si l'on définit $f, \psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x) := \prod_{i=1}^m \big(f_i(x \cdot u_i)\big)^{c_i} \quad \text{et} \quad \Psi(x) := \sum_{i=1}^m c_i\, \psi_i(x \cdot u_i).$$

Alors, pour $t \geq 0$ on a, $P_t^\psi(f)(0) \leq \prod_{i=1}^m \left(P_t^{\psi_i}(f_i)(0)\right)^{c_i}$.

Supposons données deux fonctions $H, \Psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout $(\theta_1, \dots, \theta_m) \in \mathbb{R}^m$,

$$H\Big(\sum_{i=1}^m c_i \theta_i u_i\Big) \geq \prod_{i=1}^m f_i(\theta_i)^{c_i} \quad \text{et} \quad \Psi\Big(\sum_{i=1}^m c_i \theta_i u_i\Big) \geq \sum_{i=1}^m c_i\, \psi_i(\theta_i).$$

Alors, pour $t \geq 0$ on a, $P_t^\Psi(H)(0) \geq \prod_{i=1}^m \left(P_t^{\psi_i}(f_i)(0)\right)^{c_i}$.

En faisant tendre t vers l'infini, on peut en déduire des inégalités de Brascamp-Lieb et de Barthe pour la plus petite valeur propre de (l'opposé de) l'opérateur donné par (87).

5.2. Généralités sur les versions gaussiennes et sphériques

Dans [**CLL04**], Carlen, Lieb et Loss proposent aussi une inégalité de type Brascamp-Lieb sur la sphère. La forme sphérique permet d'avoir un nouveau point de vue sur les inégalités de Brascamp-Lieb, que l'on peut mettre en lumière à l'aide de la forme gaussienne implicite dans les preuves du paragraphe précédent.

On se place dans la même situation (78) que précédemment. On dit qu'une fonction $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ne dépend que de $u \in \mathbb{R}^n$, $|u| = 1$, si $g(x) = \tilde{g}(x \cdot u)$ pour une certaine $\tilde{g} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On a l'inégalité suivante : pour tout $g_1, \ldots, g_m : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$, si chaque g_i ne dépend que de u_i, alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m g_i^{c_i}\, d\gamma_n \leq \prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^n} g_i\, d\gamma_n \right)^{c_i}. \tag{88}$$

On passe de cette version à la version (81) en posant $g_i(x) = f_i(x \cdot u_i) e^{(x \cdot u_i)^2/2}$ et en utilisant (79). Cette version présente l'avantage de mettre en valeur le rôle des invariances des fonctions. Dans [**BC04**] on remarque que cette forme se démontre en quelques lignes en utilisant le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck $Q_t = e^{tL}$, de générateur

$$L = \Delta - x \cdot \nabla.$$

On utilise localement (80) et la propriété essentielle que, si g_i ne dépend que du u_i, alors $Q_t g_i$ aussi ne dépend que de u_i, et $\nabla(Q_t g_i)(x)$ est de la forme $\theta_t(x) u_i$.

Si G est une probabilité de densité par rapport à la gaussienne γ_n, on définit la marginale $\Pi_u G$ de G dans la direction $u \in \mathbb{R}^n$, $|u| = 1$, par

$$\Pi_u G(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(P_u x + P_{u^\perp} y)\, d\gamma_n(y),$$

où P_E désigne la projection orthogonale sur le sous-espace $E \subset \mathbb{R}^n$. On remarque que $\Pi_u G$ est une densité de probabilité par rapport à γ_n qui ne dépend que de u. On peut aussi voir $\Pi_u G$ comme la projection dans $L^2(\gamma_n)$ de G sur l'espace des fonctions qui ne dépendent que de u. En utilisant une forme gaussienne de la dualité (10), on déduit de (88) l'inégalité de sous-additivité suivante : pour toute densité de probabilité G par rapport à γ_n,

$$\sum_{i=1}^m c_i \mathrm{Ent}_{\gamma_n}(\Pi_{u_i} G) \leq \mathrm{Ent}_{\gamma_n}(G),$$

où Ent_{γ_n} désigne l'entropie relative (26) par rapport à la gaussienne. Le cas particulier – qui par ailleurs peut s'obtenir directement en utilisant l'inégalité de Jensen – correspondant à la décomposition de l'identité triviale $\sum_{i=1}^n e_i \otimes e_i = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$, où e_i est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, donne donc

$$\sum_{i=1}^n \mathrm{Ent}_{\gamma_n}(\Pi_{e_i} G) \leq \mathrm{Ent}_{\gamma_n}(G). \tag{89}$$

Si l'on définit l'entropie d'un vecteur aléatoire $X \in \mathbb{R}^n$ par l'entropie (9) de la densité ρ de sa loi (par rapport à la mesure de Lebesgue), $H(X) := H(\rho) = -\int \rho \log \rho$, le résultat précédent appliqué dans $\mathbb{R}^2$ (à la base $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ et $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$) pour deux copies *iid* X et Y d'une même *variable aléatoire*, implique

$$H\Big(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\Big) + H\Big(\frac{X-Y}{\sqrt{2}}\Big) \geq H((X,Y)) = 2H(X),$$

et donc, lorsque X est symétrique,

$$H\Big(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\Big) \geq H(X),$$

ce qui est un cas particulier de l'inégalité de Shannon-Stam. On en tire une information sur le comportement de l'entropie le long du théorème de la limite centrale.

En lien avec le modèle de Kac en mécanique statistique, Carlen, Lieb et Loss ont étudié des inégalités analogues sur la sphère $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. On note σ la mesure de probabilité uniforme sur S^{n-1}. Pour une densité de probabilité f sur S^{n-1} (toutes les densités sont entendues par rapport à σ), on note f_i sa marginale par rapport à la i-ème coordonnée. Plus précisément, la fonction $f_i : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est la densité de probabilité caractérisée par le fait que $f_i(x)$ ne dépend que de x_i et que, pour toute fonction borélienne bornée $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, on a

$$\int_{S^{n-1}} \varphi(x_i) f(x) d\sigma(x) = \int_{S^{n-1}} \varphi(x_i) f_i(x) d\sigma(x).$$

Carlen, Lieb et Loss ont montré que

$$\sum_{i=1}^{n} S(f_i) \leq 2S(f), \tag{90}$$

où

$$S(g) := \int_{S^{n-1}} g \log g \, d\sigma$$

est l'entropie sphérique d'une densité de probabilité (par rapport à σ, donc). On remarquera une différence frappante par rapport à la version gaussienne (89) : le membre de droite est multiplié par un facteur 2 dont on peut montrer qu'il est optimal. Ainsi, bien que l'on ait l'habitude de voir la mesure uniforme sur une sphère de rayon $\sqrt{n}$ en dimension n grande comme proche de la mesure gaussienne, la dépendance des coordonnées sur S^{n-1},

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1,$$

crée un phénomène assez différent de ce que l'on a sur l'espace produit $(\mathbb{R}^n, \gamma_n)$. Carlen, Lieb et Loss déduisent leur inégalité d'une nouvelle version sphérique de l'inégalité de Brascamp-Lieb : étant donné des fonctions $f_1, \ldots, f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$, on a

$$\int_{S^{n-1}} \prod_{i=1}^{n} \sqrt{f_i(x_i)} \, d\sigma(x) \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{S^{n-1}} f_i(x_i) \, d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{91}$$

Là encore, la constante $c_i = c = 1/2$ est le meilleur (au sens de « plus grande ») choix possible. La méthode utilisée par ces auteurs pour montrer l'inégalité repose sur le semi-groupe de la chaleur sur S^{n-1} et sur la décomposition du laplacien sphérique comme somme de carrés d'opérateurs de dérivation (non-indépendants).

5.3. Une nouvelle approche

Dans [**BCM06**], nous proposons une nouvelle approche des inégalités sphériques étudiées par Carlen-Lieb-Loss. Pour étudier l'entropie, nous nous intéressons à l'*information de Fisher* d'une densité, ce qui permet d'utiliser plus facilement la structure L^2 pour les marginales. Le point clé est de réduire les inégalités à une inégalité locale, du type (79) ou (80). Outre le fait que les inégalités pour l'information sont plus fortes que celles pour l'entropie, cette approche permet d'étendre les résultats de Carlen, Lieb et Loss à des situations un peu plus générales, et aussi d'avoir un point de vue légèrement différent sur ces inégalités (en en particulier sur cette fameuse constante 2) qui peut s'avérer utile pour des généralisations ultérieures.

Notons encore P_E la projection orthogonale sur un sous-espace $E \subset \mathbb{R}^n$. On dit qu'une fonction f sur la sphère S^{n-1} *ne dépend que de* E si elle s'écrit $f = k \circ P_E$ pour une certaine fonction k définie sur le boule unité de E, ou encore, si

$$f = f \circ R,$$

pour toute isométrie $R \in SO_n$ laissant E fixe (point par point). On notera cet ensemble d'isométries comme suit :

$$SO(E^{\perp}) := \{R \in SO_n;\ Rx = x, \text{ pour tout}\, x \in E\}.$$

Évidemment, cette terminologie est à prendre avec précaution, puisqu'une fonction sur la sphère qui ne dépend que de x_1 (ou plutôt que de $\mathbb{R}e_1$), dépend quand même de $x_2, \dots, x_n$ en général.

Soit f une densité de probabilité sur S^{n-1}. Sa *marginale* sur E est la densité de probabilité notée $f_E : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dépendant seulement de E et telle que, pour toute fonction φ sur la sphère dépendant seulement de E, on a

$$\int_{S^{n-1}} f(x)\varphi(x)d\sigma(x) = \int_{S^{n-1}} f_E(x)\varphi(x)d\sigma(x).$$

C'est donc la projection dans $L^2(S^{n-1}, \sigma)$ de f sur l'espace des fonctions dépendant seulement de E. On remarque que l'on a la représentation suivante :

$$f_E(x) = \int_{SO(E^{\perp})} f(Rx)\, d\mu(R). \tag{92}$$

Pour $x \in S^{n-1}$, on note $x^{\perp}$ l'orthogonal de x dans $\mathbb{R}^n$, qui est aussi l'hyperplan tangent à S^{n-1} en x. On utilisera la notation suivante : pour $E \subset \mathbb{R}^n$ et $x \subset S^{n-1}$:

$$E(x) := P_{x^{\perp}} E.$$

Dans [**BCM06**], nous introduisons la définition suivante :

Définition 5.2 **(Configuration géométrique et constante de configuration)**
Une configuration géométrique $\mathcal{E}$ *dans* $\mathbb{R}^n$ *est une collection de sous-espaces de* $\mathbb{R}^n$ *(non triviaux)* $(E_1, \dots, E_k)$ *et de nombre positifs* $(c_1, \dots, c_k)$*, pour* $k \geq 1$*. On lui associe la* constante de configuration $C_n(\mathcal{E}) > 0$*, définie par*

$$C_n(\mathcal{E}) := \sup_{x,y \in S^{n-1}, \langle x,y \rangle = 0} \sum_{i=1}^{k} c_i \, |P_{E_i(x)}\, y|^2. \tag{93}$$

On rappelle que $P_{E_i(x)} = P_{P_{x^{\perp}} E_i}$. La constante de configuration est ainsi la meilleure constante dans l'inégalité

$$\forall x \in S^{n-1},\ \forall y \in x^{\perp}\,, \quad \sum_{i=1}^{k} c_i \left| P_{E_i(x)}\, y \right|^2 \leq C_n(\mathcal{E})\, |y|^2. \tag{94}$$

Ces quantités vont apparaître naturellement lorsqu'on calcule l'information de Fisher des marginales d'une densité sphérique. L'information de Fisher d'une densité f sur la sphère est définie par

$$I(f) := \int_{S^{n-1}} \frac{|\nabla f|^2}{f}\, d\sigma.$$

En s'inspirant d'un argument de Carlen [**Car91**] et en utilisant, par exemple, la formule de représentation (92) on montre la proposition qui suit.

Proposition 5.3 **([BCM06])**. — *Soit E un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, et f une densité de probabilité sur S^{n-1} ayant une information de Fisher finie. Alors l'information de Fisher de la marginale f_E par rapport à E vérifie*

$$I(f_E) \leq \int_{S^{n-1}} \frac{|P_{E(x)}\, \nabla f(x)|^2}{f(x)}\, d\sigma(x). \tag{95}$$

On constate que l'estimation (95) se combine parfaitement avec (94). On obtient ainsi :

Théorème 5.4 **(Superadditivité de l'information sphérique [BCM06])**
Soit $\mathcal{E} = \big((E_i)_{i\leq k}, (c_i)_{i\leq k}\big)$ une configuration géométrique de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) de constante de configuration $C_n(\mathcal{E})$. Alors, pour toute densité de probabilité f sur S^{n-1} d'information de Fisher finie, on a

$$\sum_{i=1}^{k} c_i\, I(f_{E_i}) \;\leq\; C_n(\mathcal{E})\, I(f).$$

Il est intéressant de remarquer que la preuve de ce résultat est vraiment élémentaire et purement fonctionnelle : on se ramène localement à la situation géométrique donnée par (94).

On peut passer de l'information I à l'entropie sphérique S en intégrant le long du semi-groupe de la chaleur $P_t = e^{t\Delta}$. En effet, on a

$$S(f) = -(S(1) - S(f)) = -\int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} S(P_t f) dt = \int_0^{\infty} I(P_t f)\, dt.$$

Pour passer à l'étude des marginales, il est important de noter que comme Δ commute avec les rotations, on a

$$P_t(f_E) = (P_t f)_E.$$

Ainsi, avec les même notations que dans le théorème précédent, on a l'inégalité de superadditivité de l'entropie suivante :

$$\sum_{i=1}^{k} c_i S(f_{E_i}) \leq C_n(\mathcal{E}) S(f). \tag{96}$$

On peut aussi démontrer avec les mêmes hypothèses des inégalités de Brascamp-Lieb sphériques, mais, pour cela, on doit utiliser la forme duale de l'inégalité (94), à savoir

$$\forall x \in S^{n-1}\,,\ \forall y_1, \dots y_n \in x^{\perp}, \qquad \left|\sum_{i=1}^{k} c_i\, P_{E_i(x)}\, y_i\right|^2 \;\leq\; C_n(\mathcal{E}) \sum_{i=1}^{k} c_i\, |y_i|^2. \tag{97}$$

Cette inégalité se combine bien avec le semi-groupe de chaleur car si f_i ne dépend que de E_i, $P_t f_i$ aussi et donc $\nabla(P_t f_i)(x) \in E_i(x)$. On montre ainsi le résultat suivant :

Théorème 5.5. — *Soit $\mathcal{E} = \big((E_i)_{i\leq k}, (c_i)_{i\leq k}\big)$ une configuration géométrique de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ de constante de configuration $C_n(\mathcal{E})$, et posons*

$$d_i = \frac{c_i}{C_n(\mathcal{E})}.$$

Si $f_1, \ldots, f_k : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ sont telles que chaque f_i ne dépend que de E_i, alors

$$\int_{S^{n-1}} \prod_{i=1}^k f_i(x)^{d_i}\, d\sigma(x) \leq \prod_{i=1}^k \left(\int_{S^{n-1}} f_i(x)\, d\sigma(x)\right)^{d_i}.$$

Pour finir, et afin de retrouver les résultats de Carlen, Lieb et Loss, il faut indiquer comment estimer la constante de configuration géométrique. Cela est particulièrement aisé lorsque les espaces E_i décomposent l'identité de $\mathbb{R}^n$. Considérons le cas où l'on a la décomposition (78), c'est-à-dire où $k = m \geq n$, $E_i = \{u_i\}$, et c_i vérifient $\sum_{i=1}^m c_i\, u_i \otimes u_i = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$. Fixons $x \in S^{n-1}$. Écrivons $P_{x^\perp} u_i = d_i\, u_i(x)$ avec $d_i = |P_{x^\perp} u_i|$ et $|u_i(x)| = 1$. On a alors $E_i(x) = \mathbb{R}u_i(x)$ et

$$P_{E_i(x)} = u_i(x) \otimes u_i(x).$$

Par ailleurs, on tire de $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^n c_i u_i \otimes u_i$ que

$$\sum_{i=1}^m c_i P_{x^\perp} u_i \otimes P_{x^\perp} u_i = P_{x^\perp},$$

et donc

$$\sum_{i=1}^m c_i\, d_i^2\, u_i(x) \otimes u_i(x) = \mathrm{Id}_{x^\perp}.$$

Cela implique $\sum c_i d_i^2 = \dim(x^\perp) = n-1$, et, comme $\sum c_i = n$, on a $\sum (c_i - c_i\, d_i^2) = 1$. On a, pour $y \in x^\perp$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m c_i |P_{E_i(x)} y|^2 = \sum_{i=1}^m c_i \big(y \cdot u_i(x)\big)^2 &= \sum_{i=1}^m c_i\, d_i^2 \big(y \cdot u_i(x)\big)^2 + \sum_{i=1}^m (c_i - c_i\, d_i^2)\big(y \cdot u_i(x)\big)^2 \\
&= |y|^2 + \sum_{i=1}^m (c_i - c_i\, d_i^2)\big(y \cdot u_i(x)\big)^2 \\
&\leq |y|^2 + |y|^2 \sum_{i=1}^m (1 - c_i\, d_i^2) \\
&= |y|^2 + |y|^2 = 2|y|^2,
\end{aligned}$$

où la seule inégalité utilisée est celle de Cauchy-Schwarz, $\big|y \cdot u_i(x)\big| \leq |y|$. On voit donc que la constante de configuration $C_n(\mathcal{E})$ pour $\mathcal{E} = \big((u_i)_{i\leq m}, (c_i)_{i\leq m}\big)$ vérifiant une décomposition de l'identité de $\mathbb{R}^n$ est au plus 2. Ainsi, dans le cas trivial où l'on considère une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, $e_1, \ldots, e_n$ avec $c_1 = \ldots, = c_n = 1$, la constante de configuration est au plus 2 (il est par ailleurs facile de voir que cette constante est dans ce cas au moins 2). Ainsi, l'inégalité de sous-additivité de l'entropie et l'inégalité de Brascamp-Lieb que nous avons établies plus haut deviennent, dans ce cas, les inégalités (90) et (91) de Carlen, Lieb et Loss.

BIBLIOGRAPHIE

[AFTL97] A. Alvino, V. Ferone, G. Trombetti & P.-L. Lions – « Convex symmetrization and applications », *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **14** (1997), no. 2, p. 275–293.

[And55] T. W. Anderson – « The integral of a symmetric unimodal function over a symmetric convex set and some probability inequalities », *Proc. Amer. Math. Soc.* **6** (1955), p. 170–176.

[AMTU01] A. Arnold, P. Markowich, G. Toscani & A. Unterreiter – « On convex Sobolev inequalities and the rate of convergence to equilibrium for Fokker-Planck type equations », *Comm. Partial Differential Equations* **26** (2001), no. 1-2, p. 43–100.

[AAKM04] S. Artstein-Avidan, B. Klartag & V. Milman – « The Santaló point of a function, and a functional form of the Santaló inequality », *Mathematika* **51** (2004), no. 1-2, p. 33–48 (2005).

[ABBN04] S. Artstein, K. M. Ball, F. Barthe & A. Naor – « Solution of Shannon's problem on the monotonicity of entropy », *J. Amer. Math. Soc.* **17** (2004), no. 4, p. 975–982 (electronic).

[BÉ85] D. Bakry & M. Émery – « Diffusions hypercontractives », Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84, Lecture Notes in Math., vol. 1123, Springer, Berlin, 1985, p. 177–206.

[BL96] D. Bakry & M. Ledoux – « Lévy-Gromov's isoperimetric inequality for an infinite-dimensional diffusion generator », *Invent. Math.* **123** (1996), no. 2, p. 259–281.

[Bal86] K. Ball – *Isometric problems in ℓ_p and sections of convex sets*, PhD Thesis, Cambridge, 1986.

[Bal88] K. Ball – « Logarithmically concave functions and sections of convex sets in $\mathbf{R}^n$ », *Studia Math.* **88** (1988), no. 1, p. 69–84.

[Bal89] ______, « Volumes of sections of cubes and related problems », Geometric aspects of functional analysis (1987–88), Lecture Notes in Math., vol. 1376, Springer, Berlin, 1989, p. 251–260.

[Bal01] ———, « Convex geometry and functional analysis », Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. I, North-Holland, Amsterdam, 2001, p. 161–194.

[BBN03] K. Ball, F. Barthe & A. Naor – « Entropy jumps in the presence of a spectral gap », *Duke Math. J.* **119** (2003), no. 1, p. 41–63.

[Bar98a] F. Barthe – « Optimal Young's inequality and its converse : a simple proof », *Geom. Funct. Anal.* **8** (1998), no. 2, p. 234–242.

[Bar98b] F. Barthe – « On a reverse form of the Brascamp-Lieb inequality », *Invent. Math.* **134** (1998), no. 2, p. 335–361.

[BCF01] F. Barthe, D. Cordero-Erausquin & M. Fradelizi – « Shift inequalities of Gaussian type and norms of barycentres », *Studia Math.* **146** (2001), no. 3, p. 245–259.

[BC04] F. Barthe & D. Cordero-Erausquin – « Inverse Brascamp-Lieb inequalities along the heat equation », Geometric aspects of functional analysis, Lecture Notes in Math., vol. 1850, Springer, Berlin, 2004, p. 65–71.

[BCM06] F. Barthe, D. Cordero-Erausquin & M. Maurey – « Entropy of spherical marginals and related inequalities », *J. Math. Pures Appl. (9)* **In press** (2006).

[Bec75] W. Beckner – « Inequalities in Fourier analysis », *Ann. of Math. (2)* **102** (1975), no. 1, p. 159–182.

[Ber98] B. Berndtsson – « Prekopa's theorem and Kiselman's minimum principle for plurisubharmonic functions », *Math. Ann.* **312** (1998), no. 4, p. 785–792.

[Ber05] ———, « Subharmonicity properties of the Bergman kernel and some other functions associated to pseudoconvex domains », Preprint (2005).

[Blo03] G. Blower – « The Gaussian isoperimetric inequality and transportation », *Positivity* **7** (2003), no. 3, p. 203–224.

[Bob97] S. G. Bobkov – « An isoperimetric inequality on the discrete cube, and an elementary proof of the isoperimetric inequality in Gauss space », *Ann. Probab.* **25** (1997), no. 1, p. 206–214.

[Bob99] ———, « The size of singular component and shift inequalities », *Ann. Probab.* **27** (1999), no. 1, p. 416–431.

[BL00] S. G. Bobkov & M. Ledoux – « From Brunn-Minkowski to Brascamp-Lieb and to logarithmic Sobolev inequalities », *Geom. Funct. Anal.* **10** (2000), no. 5, p. 1028–1052.

[BL06] ———, « From Brunn-Minkowski to sharp Sobolev inequalities », Preprint (2006).

[Bor75] C. Borell – « Convex set functions in d-space », *Period. Math. Hungar.* **6** (1975), no. 2, p. 111–136.

[Bor93] ———, « Geometric properties of some familiar diffusions in $\mathbf{R}^n$ », *Ann. Probab.* **21** (1993), no. 1, p. 482–489.

[Bor00] ———, « Diffusion equations and geometric inequalities », *Potential Anal.* **12** (2000), no. 1, p. 49–71.

[Bor03] C. Borell – « The Ehrhard inequality », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **337** (2003), no. 10, p. 663–666.

[BL76a] H. J. Brascamp & E. H. Lieb – « On extensions of the Brunn-Minkowski and Prékopa-Leindler theorems, including inequalities for log concave functions, and with an application to the diffusion equation », *J. Functional Analysis* **22** (1976), no. 4, p. 366–389.

[BL76b] ———, « Best constants in Young's inequality, its converse, and its generalization to more than three functions », *Advances in Math.* **20** (1976), no. 2, p. 151–173.

[Bre87] Y. Brenier – « Décomposition polaire et réarrangement monotone des champs de vecteurs », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **305** (1987).

[BZ88] J. E. Brothers & W. P. Ziemer – « Minimal rearrangements of Sobolev functions », *J. Reine Angew. Math.* **384** (1988), p. 153–179.

[Caf00] L. A. Caffarelli – « Monotonicity properties of optimal transportation and the FKG and related inequalities », *Comm. Math. Phys.* **214** (2000), no. 3, p. 547–563. [Erratum : *Comm. Math. Phys.* **225** (2002), no. 2, 449–450].

[Car91] E. A. Carlen – « Superadditivity of Fisher's information and logarithmic Sobolev inequalities », *J. Funct. Anal.* **101** (1991), no. 1, p. 194–211.

[CLL04] E. A. Carlen, E. H. Lieb & M. Loss – « A sharp analog of Young's inequality on S^N and related entropy inequalities », *J. Geom. Anal.* **14** (2004), no. 3, p. 487–520.

[CJM+01] J. A. Carrillo, A. Jüngel, P. . Markowich, G. Toscani & A. Unterreiter – « Entropy dissipation methods for degenerate parabolic problems and generalized Sobolev inequalities », *Monatsh. Math.* **133** (2001), no. 1, p. 1–82.

[CMV03] J. A. Carrillo, R. J. McCann & C. Villani – « Kinetic equilibration rates for granular media and related equations : entropy dissipation and mass transportation estimates », *Rev. Mat. Iberoamericana* **19** (2003), no. 3, p. 971–1018.

[C99a] D. Cordero-Erausquin – « Inégalité de Prékopa-Leindler sur la sphère », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **329** (1999), no. 9, p. 789–792.

[C99b] ———, « Sur le transport de mesures périodiques », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **329** (1999), no. 3, p. 199–202.

[C02a] ———, « Santaló's inequality on $\mathbb{C}^n$ by complex interpolation », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **334** (2002), no. 9, p. 767–772.

[C02b] ———, « Some applications of mass transport to Gaussian-type inequalities », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **161** (2002), no. 3, p. 257–269.

[C05] ———, « On Berndtsson's generalization of Prékopa's theorem », *Math. Z.* **249** (2005), no. 2, p. 401–410.

[CMS01] D. Cordero-Erausquin, R. J. McCann & M. Schmuckenschläger – « A Riemannian interpolation inequality à la Borell, Brascamp and Lieb », *Invent. Math.* **146** (2001), no. 2, p. 219–257.

[CMS06] ———, « Prékopa-Leindler type inequalities on Riemannian manifolds, mass transport and jacobi fields », *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* **In press** (2006).

[CGH04] D. Cordero-Erausquin, W. Gangbo & C. Houdré – « Inequalities for generalized entropy and optimal transportation », Recent advances in the theory and applications of mass transport, Contemp. Math., vol. 353, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, p. 73–94.

[CNV04] D. Cordero-Erausquin, B. Nazaret & C. Villani – « A mass-transportation approach to sharp Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities », *Adv. Math.* **182** (2004), no. 2, p. 307–332.

[CFM04] D. Cordero-Erausquin, M. Fradelizi & B. Maurey – « The (B) conjecture for the Gaussian measure of dilates of symmetric convex sets and related problems », *J. Funct. Anal.* **214** (2004), no. 2, p. 410–427.

[DG80] S. Das Gupta – « Brunn-Minkowski inequality and its aftermath », *J. Multivariate Anal.* **10** (1980), no. 3, p. 296–318.

[DPD02] M. Del Pino & J. Dolbeault – « Best constants for Gagliardo-Nirenberg inequalities and applications to nonlinear diffusions », *J. Math. Pures Appl. (9)* **81** (2002), no. 9, p. 847–875.

[Gar02] R. J. Gardner – « The Brunn-Minkowski inequality », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **39** (2002), no. 3, p. 355–405 (electronic).

[GM83] M. Gromov & V. D. Milman – « A topological application of the isoperimetric inequality », *Amer. J. Math.* **105** (1983), no. 4, p. 843–854.

[Har99] G. Hargé – « A particular case of correlation inequality for the Gaussian measure », *Ann. Probab.* **27** (1999), no. 4, p. 1939–1951.

[Hör65] L. Hörmander – « L^2 estimates and existence theorems for the $\bar\partial$ operator », *Acta Math.* **113** (1965), p. 89–152.

[Hör90] ———, *An introduction to complex analysis in several variables*, North-Holland Mathematical Library, vol. 7, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990.

[Kno57] H. Knothe – « Contributions to the theory of convex bodies », *Michigan Math. J.* **4** (1957), p. 39–52.

[Lat02] R. Latała – « On some inequalities for Gaussian measures », *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002)* (Beijing), Higher Ed. Press, 2002, p. 813–822.

[LO99] R. Latała & K. Oleszkiewicz – « Gaussian measures of dilatations of convex symmetric sets », *Ann. Probab.* **27** (1999), no. 4, p. 1922–1938.

[Led99] M. Ledoux – « Concentration of measure and logarithmic Sobolev inequalities », Séminaire de Probabilités, XXXIII, Lecture Notes in Math., vol. 1709, Springer, Berlin, 1999, p. 120–216.

[Led00] ______, « The geometry of Markov diffusion generators », *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* **9** (2000), no. 2, p. 305–366.

[Led01] ______, *The concentration of measure phenomenon*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 89, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[Lei72] L. Leindler – « On a certain converse of Hölder's inequality. II », *Acta Sci. Math. (Szeged)* **33** (1972), no. 3-4, p. 217–223.

[LV] J. Lott & C. Villani – « Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport », *Ann. of Math.* (to appear).

[MV05] F. Maggi & C. Villani – « Balls have the worst best sobolev inequalities », *J. Geom. Anal.* **15** (2005), no. 1, p. 331–352.

[Mau91] B. Maurey – « Some deviation inequalities », *Geom. Funct. Anal.* **1** (1991), no. 2, p. 188–197.

[Mau05] ______, « Inégalité de Brunn-Minkowski-Lusternik, et autres inégalités géométriques et fonctionnelles », *Astérisque* (2005), no. 299, p. Exp. No. 928, vii, 95–113.

[McC94] R. J. McCann – *A convexity principle for interacting gases and equilibrium crystals*, PhD Thesis, Princeton University, 1994.

[McC95] R. J. McCann – « Existence and uniqueness of monotone measure-preserving maps », *Duke Math. J.* **80** (1995), no. 2, p. 309–323.

[McC97] R. J. McCann – « A convexity principle for interacting gases », *Adv. Math.* **128** (1997), no. 1, p. 153–179.

[McC01] R. J. McCann – « Polar factorization of maps on Riemannian manifolds », *Geom. Funct. Anal.* **11** (2001), no. 3, p. 589–608.

[MP90] M. Meyer & A. Pajor – « On the Blaschke-Santaló inequality », *Arch. Math. (Basel)* **55** (1990), no. 1, p. 82–93.

[MS86] V. D. Milman & G. Schechtman – *Asymptotic theory of finite-dimensional normed spaces* (with an appendix by M. Gromov), Lecture Notes in Mathematics, vol. 1200, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[Ott01] F. Otto – « The geometry of dissipative evolution equations : the porous medium equation », *Comm. Partial Differential Equations* **26** (2001), no. 1-2, p. 101–174.

[OV00] F. Otto & C. Villani – « Generalization of an inequality by Talagrand and links with the logarithmic Sobolev inequality », *J. Funct. Anal.* **173** (2000), no. 2, p. 361–400.

[Pis89] G. Pisier – *The volume of convex bodies and Banach space geometry*, Cambridge Tracts in Math. 94, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[Pit77] L. D. Pitt – « A Gaussian correlation inequality for symmetric convex sets », *Ann. Probability* **5** (1977), no. 3, p. 470–474.

[Pré71] A. Prékopa – « Logarithmic concave measures with application to stochastic programming », *Acta Sci. Math. (Szeged)* **32** (1971), p. 301–316.

[Pré73] ______, « On logarithmic concave measures and functions », *Acta Sci. Math. (Szeged)* **34** (1973).

[vRS05] M.-K. von Renesse & K.-T. Sturm – « Transport inequalities, gradient estimates, entropy, and Ricci curvature », *Comm. Pure Appl. Math.* **58** (2005), no. 7, p. 923–940.

[San49] L. A. Santaló – « An affine invariant for convex bodies of n-dimensional space », *Portugaliae Math.* **8** (1949), p. 155–161.

[Schm95] M. Schmuckenschläger – « A concentration of measure phenomenon on uniformly convex bodies », Geometric aspects of functional analysis (Israel, 1992–1994), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 77, Birkhäuser, Basel, 1995, p. 275–287.

[Schn93] R. Schneider – *Convex bodies : the Brunn-Minkowski theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 44, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[Šid67] Z. Šidák – « Rectangular confidence regions for the means of multivariate normal distributions », *J. Amer. Statist. Assoc.* **62** (1967), p. 626–633.

[Stu] K.-T. Sturm – « On the geometry of metric measure spaces I. & II. », *Acta. Math.* (to appear).

[Tal95] M. Talagrand – « Concentration of measure and isoperimetric inequalities in product spaces », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math* No. 81, (1995), 73–205.

[Tal96] ______, « Transportation cost for Gaussian and other product measures », *Geom. Funct. Anal.* **6** (1996), no. 3, p. 587–600.

[Vil05] C. Villani – *Optimal transport : old and new*, Lecture notes, Saint-Flour 2005 (to appear in Springer's Lecture Notes).