

**Examen du 8 juillet 2008**

---

*Durée 2 heures*

---

Documents autorisés : cours polycopié et notes personnelles

---

Les 5 exercices sont totalement indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Tous les énoncés du cours peuvent être utilisés sans démonstration, mais doivent être signalés par leur nom ou par une référence précise au polycopié. Les nombres apparaissant en encadré dans la marge représentent le nombre de points (sur 20) de la question correspondante (il est donc possible, en théorie, d'obtenir une note de 28 sur 20).

**Exercice 1.** On se propose d'établir la table des caractères du groupe  $S_4$  des permutations de  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Comme les partitions de 4 sont  $4, 3 + 1, 2 + 2, 2 + 1 + 1$  et  $1 + 1 + 1 + 1$ , le groupe  $S_4$  a 5 classes de conjugaison : la classe  $C_1$  de l'élément neutre 1 (1 élément), celle  $C_2$  des transpositions (6 éléments), celle  $C_{2,2}$  des produits de deux transpositions de supports disjoints (3 éléments), celle  $C_3$  des 3-cycles (8 éléments), celle  $C_4$  des 4-cycles (6 éléments).

		<b>1</b>	$\varepsilon$	$\theta$	$\chi_1$	$\chi_2$
1	$C_1$	1	1	2	3	3
6	$C_2$	1	-1	0	1	-1
3	$C_{2,2}$	1	1	2	-1	-1
8	$C_3$	1	1	-1	0	0
6	$C_4$	1	-1	0	-1	1

FIG. 1. Table des caractères de  $S_4$

(i) Soit  $V$  la représentation de permutation associée à l'action de  $S_4$  sur  $\{1, 2, 3, 4\}$  (donc  $V = \mathbf{C}^4$  et  $\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ , si  $\sigma \in S_4$  et  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , où  $e_1, \dots, e_4$  est la base canonique de  $\mathbf{C}^4$ ).

- 2 (a) Calculer  $\chi_V$  et  $\langle \chi_V, \chi_V \rangle$ ; en déduire que  $V$  est la somme directe  $V_1 \oplus V_2$  de deux représentations irréductibles  $V_1, V_2$  non isomorphes.
- 2 (b) Déterminer les sous-espaces  $V_1$  et  $V_2$  de  $V$  et montrer, en revenant à la définition, que ce sont des représentations irréductibles de  $S_4$ .
- 1 (c) Calculer les caractères de  $V_1$  et  $V_2$ ; quelles colonnes de la table cela permet-il de remplir?
- 2 (ii) Quelle est la seconde représentation de dimension 1? Comment peut-on obtenir la seconde de dimension 3 (pourquoi est-elle irréductible et différente de celle déjà construite?).
- 2 (iii) Comment peut-on compléter la table des caractères de  $S_4$ ?

1 **Exercice 2.** (i) Montrer que  $\operatorname{tg} = \frac{\sin}{\cos}$  est somme de sa série de Taylor en 0 sur  $] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ .

1 (ii) Quel est le rayon de convergence de la série de Taylor en 0 de  $\frac{\sin \pi z}{z-1}$  ?

**Exercice 3.** Soit  $n$  entier  $\geq 2$ , et soit  $\theta \in [0, \pi]$  pas de la forme  $\frac{(2k+1)\pi}{n}$ , avec  $k \in \mathbf{N}$ . Si  $R > 1$ , soient  $I_1(R)$ ,  $I_2(R)$  et  $I_3(R)$  les intégrales de  $\frac{dz}{1+z^n}$  sur le segment  $[0, R]$ , l'arc de cercle de centre 0 allant de  $R$  à  $e^{i\theta}R$ , et le segment  $[e^{i\theta}R, 0]$ . (Faire un dessin.)

2 (i) Calculer  $I_1(R) + I_2(R) + I_3(R)$ .

1 (ii) Quelles sont les limites, quand  $R \rightarrow +\infty$ , de  $I_1(R)$ ,  $I_2(R)$  et  $I_3(R)$ .

1 (iii) En déduire, en choisissant judicieusement  $\theta$ , la valeur de  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n}$ .

**Exercice 4.** Soit  $\Omega = \{z \in \mathbf{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$ .

1,5 (i) Soit  $\alpha = a + ib \in \Omega$ , et soit  $\gamma_R$ , si  $R > 0$ , le lacet constitué des segments  $[0, R]$ ,  $[R, \frac{\alpha R}{a}]$  et  $[\frac{\alpha R}{a}, 0]$ . Que vaut  $\int_{\gamma_R} z^n e^{-z} dz$ , si  $n \in \mathbf{N}$ ? En déduire que  $\int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t} dt = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$ .

0,5 (ii) Si  $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$ , soit  $f_\lambda : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  la fonction définie par  $f_\lambda(t) = 0$ , si  $t \leq 0$ , et  $f_\lambda(t) = te^{-\lambda t}$ , si  $t \geq 0$ . Calculer  $\hat{f}_\lambda(x)$ , si  $x \in \mathbf{R}$ .

2 (iii) On remarque que  $x \mapsto x \hat{f}_\lambda(x)$  n'est pas sommable. Pouvait-on le savoir sans calculer  $\hat{f}_\lambda$ ? (On distinguera les cas  $\hat{f}_\lambda$  non sommable et  $\hat{f}_\lambda$  sommable.)

2 (iv) Établir la formule  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{(\lambda + 2i\pi n)^2} = \frac{e^\lambda}{(e^\lambda - 1)^2}$ , pour tout  $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$ .

1 (v) Comment pourrait-on obtenir une formule analogue pour  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{(-1)^n}{(\lambda + 2i\pi n)^2}$ ? (On ne demande pas de faire le calcul.)

2 (vi) Montrer que  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{(z + 2i\pi n)^2}$  converge pour tout  $z \in \mathbf{C} - 2i\pi\mathbf{Z}$  et que sa somme vaut  $\frac{e^z}{(e^z - 1)^2}$ .

1 **Exercice 5.** (i) Si  $g$  est méromorphe sur  $\mathbf{C}$ , et si  $N \in \mathbf{N}$ , on dit que  $g = O(y^N)$  s'il existe  $C, M \in \mathbf{R}$  tels que  $|g(x + iy)| \leq C|y|^N$ , si  $|y| \geq M$ . Montrer que si  $g$  est  $O(y^N)$ , alors  $g'$  est  $O(y^{N-1})$ .

3 (ii) Soit  $f$  une fonction méromorphe sur  $\mathbf{C}$ , impaire, périodique de période 1, holomorphe en dehors de pôles simples de résidu 1 en les entiers, et  $O(y^N)$ . Montrer que  $f^2 + f'$  est constante.