Éléments d'analyse et d'algèbre

1. Présentation du cours

Il s'agit d'un cours généraliste dont le but est multiple :

• fournir des outils et des concepts utilisables dans les autres sciences,

• élargir le socle de concepts sur lequel s'appuyer et préparer le terrain pour les cours de seconde année(1),

• faire sentir que les mathématiques ne sont pas une collection de théories déconnectées, établies de toute éternité, mais qu'elles constituent une science bien vivante régie par une profonde unité.

Les théories abordées dans le cours s'articulent autour des deux thèmes "transformation de Fourier" et "fonctions holomorphes". La transformation de Fourier, de par ses diverses incarnations, est une excellente illustration de l'unité des mathématiques, et le cours essaye de souligner la continuité existant entre le fini (théorie des caractères des groupes finis), le discret (séries de Fourier) et le continu (tranformée de Fourier dans $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^m)$). Ces théories sont utilisées, à des degrés divers, dans toutes les autres sciences, ce qui peut être une motivation suffisante pour essayer d'en comprendre les tenants et les aboutissants, même si on n'a pas l'âme d'un mathématicien et pas le temps ni l'envie d'en saisir toutes les finesses. Elles possèdent aussi une beauté intrinsèque, au niveau des énoncés et des méthodes, qui devrait séduire quiconque veut bien faire l'effort de passer la barrière des définitions initiales. De plus, elles se combinent harmonieusement pour aboutir à des résultats proprement magnifiques.

La théorie des caractères des groupes finis, à laquelle le début du cours est consacré, qui est objectivement la plus facile, est probablement celle qui vous déroutera le plus, compte-tenu de votre formation. Elle permet d'illustrer un certain nombre de concepts fondamentaux dont on ne peut que déplorer la disparition du programme des classes antérieures : les groupes sont faits pour agir et les symétries d'un système forment un groupe dont il est bon de comprendre l'action pour étudier le système (ce principe de symétrie est à la base d'une partie non négligeable de la physique théorique moderne). Cela permet aussi de sensibiliser aux problèmes de classification en mathématiques : il est possible de décrire complètement les représentations irréductibles d'un groupe fini donné, ce qui est un petit peu surprenant au vu de la définition, mais présente des similarités certaines (pas totalement fortuites comme vous le constaterez peut-être plus tard) avec la classification périodique des éléments en chimie ou celle des particules élémentaires en physique.

(1) Le peu de théorie des groupes finis vu dans le cours rend le cours de théorie de Galois accessible à n'importe qui, et les rudiments de transformée de Fourier préparent le terrain pour les transformées de Fourier dans L^2 et dans les distributions, qui sont les deux cas les plus utiles pour les applications extra mathématiques. J'en profite pour souligner l'existence, en début de seconde année, du cours de MAT 432, dont le programme (Espaces de Hilbert, transformée de Fourier dans L^2, et applications aux équations de la physique) a été spécialement conçu pour les élèves issus de la filière PC.

La suite du cours a pour but une introduction à la transformée et l'inversion de Fourier dans $\mathbf{R}^n$, l'objectif étant d'initier au va et vient entre une fonction et sa transformée de Fourier (problématique que vous pourrez apprécier avec la démonstration du théorème central limite du cours MAP 311, et aurez l'occasion de revoir à l'œuvre dans les cours MAT 431 et MAT 432, pour la résolution de certaines équations aux dérivées partielles issues de la physique). La transformée de Fourier dans L^1 reposant sur l'intégrale de Lebesgue, le cours comporte un chapitre consacré aux principaux théorèmes d'intégration (dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$, mais pas dans le cadre d'une théorie générale de la mesure). Cette partie du cours est dans la droite ligne de ce que vous connaissez déjà.

Enfin, une petite moitié du cours a pour objet l'étude des fonctions holomorphes telle qu'elle a été développée par Cauchy dans les années 1820-1840. Comparée à celle des fonctions d'une variable réelle, cette théorie marche tellement bien que cela en devient un peu déstabilisant quand on a pris l'habitude de voir des pièges potentiels partout. Le cours se termine par la démonstration des théorèmes de la progression arithmétique et des nombres premiers (deux sommets des mathématiques du 19-ième siècle), ce qui est l'occasion de voir fonctionner les principaux résultats de base de la théorie des fonctions holomorphes, tout en illustrant l'unité des mathématiques et en faisant prendre conscience qu'une démonstration d'un résultat ne tient pas forcément sur un tableau, et que la solution d'un problème demande parfois de concevoir une stratégie en plusieurs étapes mêlant des techniques variées(2).

2. Le déroulement du cours

L'enseignement dispensé à l'École polytechnique constitue un choc culturel assez sévère pour quelqu'un sortant d'une classe préparatoire, habitué à ce que chaque notion introduite soit traitée dans les moindres détails(3). De plus, les résultats ont tendance à avoir des démonstrations nettement plus sophistiquées, et il faut s'habituer à utiliser un résultat sans en maîtriser toutes les subtilités. Le cours ne proposera donc qu'une introduction aux trois théories qui le composent. Celle-ci est amplement suffisante pour donner une idée fidèle des tenants et aboutissants de la théorie ; elle suffit aussi pour beaucoup d'applications, et le poly apporte les compléments nécessaires à ceux qui veulent aller plus loin. Compte-tenu de l'abondance et de la variété du matériel, il est difficile (voire impossible) d'espérer le maîtriser aussi bien que ce dont vous

(2)Excellente gymnastique intellectuelle pour un futur dirigeant.

(3)J'ai tendance à penser qu'un vrai cours de maths se rapproche plus du format offert en prépa que de celui que je propose, et se fait devant un auditoire limité qui permet une interaction avec la salle, à la craie, en alternant théorèmes et exercices d'application, ce qui permet d'avancer à un rythme permettant une absorption au fur et à mesure, avec au moins deux séances par semaine pour ne pas tout oublier d'une fois sur l'autre. Le problème d'un cours de ce format est que l'on peut difficilement espérer couvrir plus de 4 pages du poly par séance, ce qui ne permettrait pas d'aller très loin, vu le temps dont on dispose.

avez l'habitude, concours obligent. D'un autre côté, une maîtrise aussi totale est en général parfaitement inutile, même pour un mathématicien[(4)].

Pour comprendre où je veux en venir avec ce cours, la comparaison avec l'apprentissage d'une langue étrangère fournit des points de repère utiles. Dans un tel apprentissage, on peut distinguer plusieurs paliers intéressants :

• niveau 1 : pouvoir demander son chemin et comprendre la réponse,
• niveau 2 : être capable de suivre des bribes de conversation,
• niveau 3 : pouvoir participer à une discussion,
• niveau 4 : parler couramment et apprécier la littérature classique.
• niveau 5 : pouvoir enseigner la langue dans son pays.
• niveau 6 : pouvoir enseigner la langue dans le pays d'origine.
• niveau 7 : écrire des romans dans la langue.

Ne pas pouvoir participer à une discussion est assez frustrant, mais pouvoir demander son chemin et comprendre la réponse est déjà assez utile... Compte-tenu des conditions d'enseignement et de l'atmosphère de l'école[(5)], je pense que tout le monde peut atteindre, avec un peu de travail personnel, un niveau intermédiaire[(6)] entre les niveaux 2 et 3 en ce qui concerne les sujets abordés dans ce cours (qui, je le souligne, concernent des notions de base, utilisées amplement en dehors des maths). Mon ambition est qu'une partie non négligeable de la promotion atteigne le niveau 3, ce qui demande un investissement un peu plus poussé, et de fournir les outils permettant à ceux qui le souhaitent de parvenir au niveau 4.

Voici la liste des concepts et résultats dont la maîtrise [(7)] me semble un objectif minimum et sur lesquels les exercices en petites classes se concentreront.

[(4)] J'ai amplement utilisé, au cours de ma carrière, les résultats qui suivent sans forcément en avoir vu de démonstration ; je n'ai jamais vraiment étudié de construction de la mesure de Lebesgue (par contre, quand j'ai pris connaissance du théorème de convergence dominée, je me suis demandé pourquoi on avait trouvé nécessaire de me le cacher jusque-là...) ou les démonstrations du théorème de Fubini, de la formule des résidus..., jusqu'à ce que je doive les rédiger pour le poly. De même, quand on m'a dit qu'une série de fonctions holomorphes était holomorphe et se dérivait terme à terme, j'ai été fort satisfait de la simplicité de cet énoncé, mais je me suis bien gardé d'aller voir la démonstration (en l'occurence, ce n'était pas forcément très malin car la démonstration repose sur une jolie idée que l'on peut réutiliser avec profit, et ne comporte pas vraiment de détails sordides à oublier le plus vite possible).

[(5)] Nous ne sommes pas dans une École Normale (ni dans une école tout-à-fait normale), où le but de l'enseignement est de former des gens arrivant à terme aux niveaux 6 ou 7, ce qui exige d'arriver au niveau 4 à l'issue d'un cours et demande un rythme autre que celui de l'X ; pour donner un point de comparaison, à Cambridge dont la logique est plus proche de celle d'une École Normale que de celle de l'X, et qui n'est pas particulièrement réputée pour sa lenteur, la théorie des fonctions holomorphes repose sur un cours magistral de 16h.

[(6)] Le niveau 2 est amplement suffisant pour l'utilisation extra-mathématique (et même pour beaucoup d'utilisations mathématiques dont le but n'est pas de généraliser une des notions).

[(7)] Par maîtrise, j'entends : savoir utiliser, mais pas forcément connaître la démonstration. Une théorie mathématique se résume souvent, pour ses utilisateurs, à quelques définitions et un petit nombre de théorèmes fondamentaux que l'on peut utiliser comme une boite noire. Ce n'est pas très éloigné de l'utilisation d'un logiciel et la maîtrise de la démonstration d'un théorème est à peu près aussi nécessaire à son utilisation que la lecture

• Représentations des groupes finis :

— définition d'une représentation d'un groupe et de son caractère,

— décomposition d'une représentation en somme directe de représentations irréductibles,

— les caractères forment une base orthonormée des fonctions centrales (version finie de la formule d'inversion de Fourier aux conséquences miraculeuses : finitude du nombre de représentations irréductibles, détermination d'une représentation par son caractère, formule de Burnside...),

— établissement de la table des caractères d'un petit groupe en étant guidé.

• Intégration et Fourier :

— théorèmes de base d'intégration (convergence dominée, Fubini, changement de variable, continuité et dérivation sous le signe somme)[(8)],

— complétude de L^1 et L^2,

— utilisation de la densité de sous-espaces sympathiques (fonctions en escaliers, fonctions $\mathscr{C}^\infty$ à support compact...) pour démontrer des résultats sur L^1 ou L^2 par continuité,

— propriétés élémentaires de la transformée de Fourier dans L^1 : formules pour les dilatations-translations, échange de la dérivation et de la multiplication par un polynôme, échange de la régularité et de la décroissance à l'infini (en incluant le théorème de Riemann-Lebesgue), formule d'inversion de Fourier (dans l'espace de Schwartz et L^1),

— formule de Poisson.

• Fonctions holomorphes :

— existence d'un développement de Taylor sur un disque de rayon maximal,

— inégalités de Cauchy permettant de majorer les dérivées d'une fonction holomorphe,

— principe du maximum,

— théorème des zéros isolés et unicité du prolongement analytique,

— construction de fonctions holomorphes par séries, produits infinis et intégrales,

— multivaluation du logarithme,

— formule des résidus pour calculer des intégrales ou localiser les zéros d'une fonction holomorphe,

— quelques techniques de prolongement analytique (fonctions Γ et ζ).

Pour donner une idée de ce que j'attends, je considère que vous avez suffisamment bien compris le cours si vous êtes capable, sans consulter le poly, d'obtenir une note ≥ 20 en moins[(9)] de 4 heures aux examens des années précédentes. Pour faciliter l'acquisition de ces concepts, je distribuerai deux problèmes de révision.

---

des lignes de code pour un logiciel (même si les démonstrations contiennent souvent des idées utilisables dans un autre contexte).

[(8)] Ils ont déjà été vus (sous une forme limitée) jusqu'à plus-soif dans les années précédentes, et donc je m'attends à ce qu'ils ne posent pas de problème spécial. En particulier, je ne compte pas m'apesantir sur les problèmes d'interversions de limites et d'intégrales ; il y a des choses nettement plus exaltantes en mathématiques...

[(9)] Arriver à le faire dans les 2 heures imparties dénote une rapidité certaine : en 2007, cela a été le cas de 5 élèves (dont un PC et un étranger), et en 2008, cela a été le cas de 13 élèves (dont 2 PC et 2 étrangers).