Corrigé de l'examen du 10 juillet 2007

Exercice 1. (i) $\sum_{n\in\mathbf{N}} |a_n x_n|^2 \le \|a\|_\infty^2 \sum_{n\in\mathbf{N}} |x_n|^2 = \|a\|_\infty^2 \|x\|_2^2 < +\infty$, ce qui prouve que $(a_n x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^2$ et $\|f(x)\|_2 \le \|a\|_\infty \|x\|_2$. Comme f est linéaire, cette dernière inégalité montre que f est continue (et $\|f\| \le \|a\|_\infty$).
(ii) Si f est surjective, il existe $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^2$ avec $f(x) = e_i$. On a alors $a_i x_i = 1$, et donc $a_i \neq 0$ pour tout $i \in \mathbf{N}$. Maintenant, si $f(x) = 0$, on a $a_n x_n = 0$ pour tout n, et comme aucun des a_n n'est nul, cela implique que $x_n = 0$ pour tout n. Le noyau de f est donc réduit à 0, ce qui montre que f est injective.

Il en résulte que f est bijective, et comme elle est continue et ℓ^2 est complet, son inverse f^{-1} est aussi continue d'après le théorème de l'image ouverte. On a alors $f^{-1}(e_n) = a_n^{-1} e_n$, et donc $|a_n^{-1}| = \|a_n^{-1} e_n\|_2 \le \|f^{-1}\| \|e_n\|_2 = \|f^{-1}\|$. D'où le résultat avec $C = \|f^{-1}\|^{-1}$.

Exercice 2. (i) La fonction f est sommable ainsi que $t \mapsto t f(t)$. Il en résulte ((ii) du th. III.2.10) que $\hat{f}$ est bien définie et est de classe $\mathscr{C}^1$. De plus, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et $f^{(N)}(t) = \frac{(-3)(-4)\cdots(-N-2)}{(t+i)^{3+N}}$ est sommable; il en résulte ((i) du th. III.2.10) que $|t^N \hat{f}(t)| \to 0$ quand $|t| \to +\infty$, pour tout $N \in \mathbf{N}$.
(ii) $\hat{g}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2\pi t(1+ix)}\, dt = [\frac{e^{-2\pi t(1+ix)}}{-2\pi(1+ix)}]_0^{+\infty} = \frac{1}{2\pi(1+ix)}$. Comme $t^2 g(t)$ est sommable, sa transformée de Fourier est $\frac{1}{(-2i\pi)^2}\hat{g}^{(2)}(x) = \frac{2}{(2i\pi)^3}\frac{1}{(x-i)^3}$ ((ii) du th. III.2.10); en particulier elle est sommable. On peut donc appliquer la formule d'inversion de Fourier dans L^1, ce qui nous donne $\overline{\mathscr{F}}\big(\frac{2}{(2i\pi)^3}\frac{1}{(x-i)^3}\big) = t^2 g(t)$. Comme $\overline{\mathscr{F}}\big(\frac{1}{(x-i)^3}\big)(t) = \int_{\mathbf{R}} e^{2i\pi\, tx} \frac{1}{(x-i)^3}\, dx = (-1)^3 \hat{f}(t)$, grâce au changement de variable $x = -y$, on obtient finalement $\hat{f}(t) = \frac{(-2i\pi)^3}{2} t^2 g(t)$.
(iii) La fonction $F_t(z)$ est méromorphe sur $\mathbf{C}$, holomorphe en dehors d'un pôle d'ordre 3 en $z = -i$, et comme

$$e^{-2i\pi\, tz} = e^{-2\pi t} e^{-2i\pi\, t(z+i)} = e^{-2\pi t}(1 - 2i\pi\, t(z+i) + \frac{1}{2}(2i\pi\, t(z+i))^2 + \cdots),$$

on a $F_t(z) = e^{-2\pi t}(\frac{1}{(z+i)^3} - \frac{2i\pi\, t}{(z+i)^2} + \frac{(2i\pi\, t)^2}{2(z+i)} + \cdots)$, et donc $\mathrm{Res}(F_t, -i) = \frac{(2i\pi)^2}{2} t^2 e^{-2\pi t}$.

Supposons $t \ge 0$. Si $R > 1$, soit γ_R le lacet formé du segment $[-R, R]$ et du demi-cercle C_R^- paramêtré par $t \mapsto Re^{-i\pi t}$, pour $t \in [0, 1]$. Soient

$$I_1(R) = \int_{[-R,R]} F_t(z)\, dz \quad \text{et} \quad I_2(R) = \int_{C_R^-} F_t(z)\, dz.$$

On a $I(\gamma_R, -i) = -1$, et donc

$$\int_{\gamma_R} F_t(z) dz = 2i\pi I(\gamma_R, -i)\mathrm{Res}(F_t, -i) = \frac{(-2i\pi)^3}{2} t^2 e^{-2\pi t}, \quad \text{quel que soit } R > 1.$$

Maintenant, $I_1(R) \to \hat{f}(t)$ quand $R \to +\infty$. Par ailleurs, $|e^{-2i\pi tz}| \leq 1$, si $\mathrm{Im}(z) \leq 0$, et $|z+i| \geq |z|-1 = R-1$, si $z \in C_R^-$. On en déduit la majoration $|F_t(z)| \leq \frac{1}{(R-1)^3}$, si $z \in C_R^-$ et donc $|I_2(R)| \leq \frac{1}{(R-1)^3}\mathrm{lg}(C_R^-) = \frac{\pi R}{(R-1)^3} \to 0$ quand $R \to +\infty$. En passant à la limite, cela nous donne $\hat{f}(t) = \frac{(-2i\pi)^3}{2}t^2 e^{-2\pi t}$.

Si $t \leq 0$, on remplace le demi-cercle C_R^- par le demi-cercle C_R^+ dans le demi-plan supérieur. On a alors $I(\gamma_R, -i) = 0$, et la même méthode que ci-dessus montre que $\hat{f}(t) = 0$.

Exercice 3. (i) Comme S_3 a trois classes de conjugaison, il a aussi 3 représentations irréductibles W_1, W_2 et W_3, et comme $(\dim W_1)^2 + (\dim W_2)^2 + (\dim W_3)^2 = 6$ d'après la formule de Burnside, la seule possibilité est que deux des dimensions valent 1 et la troisième 2.

(ii) $\psi = \chi_1 + \chi_2 + 2\theta$ est le caractère de la représentation régulière d'après le (i) du cor. VII.2.16; on a donc $\psi(e) = 6$, $\psi(s) = 0$ et $\psi(t) = 0$, d'après la formule générale pour le caractère de la représentation régulière (alinéa 2.3 du § VII.1). Ceci nous fournit la table

	e	s	t
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
$\chi_1 + \chi_2 + 2\theta$	6	0	0
θ	2	0	-1

(iii) Comme V est une représentation de permutation, $\chi(g)$ est le nombre de points fixes de g (alinéa 2.3 du § VII.1), c'est-à-dire le nombre d'éléments h de S_3 tels que $ghg^{-1} = h$, ou encore le nombre d'éléments de S_3 commutant avec g. On a donc $\chi(g) = |Z_g| = |S_3| \cdot |C_g|^{-1}$. On en déduit que $\chi(e) = 6$, $\chi(s) = 2$ et $\chi(t) = 3$.

Si W' est une représentation irréductible, alors la multiplicité de W' dans V est $\langle \chi_{W'}, \chi \rangle$ d'après le cor. VII.2.11. Comme

$\langle \chi_1, \chi \rangle = \frac{1}{6}(6 + 3 \cdot (1 \cdot 2) + 2 \cdot (1 \cdot 3)) = 3$,

$\langle \chi_2, \chi \rangle = \frac{1}{6}(6 + 3 \cdot (-1 \cdot 2) + 2 \cdot (1 \cdot 3)) = 1$

$\langle \theta, \chi \rangle = \frac{1}{6}(2 \cdot 6 + 3 \cdot (0 \cdot 2) + 2 \cdot (-1 \cdot 3)) = 1$,

on a $V = 3 \cdot \mathbf{1} \oplus \epsilon \oplus W$.

Exercice 4. (i) Si $a > 1$ et $\mathrm{Re}(s) > a$, alors $|\frac{1}{(n+x)^s}| \leq \frac{1}{(n+x)^a}$. Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^a} < +\infty$, la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{1}{(n+x)^s}$ converge normalement sur $\mathrm{Re}(s) > a$. Il résulte du (ii) du th. IV.2.11 que la somme $F(x, s)$ de cette série est holomorphe sur $\mathrm{Re}(s) > a$. Ceci étant vrai pour

tout $a > 1$, la fonction $F(x,s)$ est holomorphe sur $\mathrm{Re}(s) > 1$.
(ii) On a $\frac{1}{(n+x)^s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} e^{-(n+x)t}t^{s-1}dt$, si $\mathrm{Re}(s) > 0$. Les sommes partielles de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+x)t}t^{s-1}$ sont majorées en valeur absolue par $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+x)t}t^{\mathrm{Re}(s)-1} = \frac{te^{-tx}}{1-e^{-t}}t^{\mathrm{Re}(s)-2}$ qui est sommable, si $\mathrm{Re}(s) - 2 > -1$ car à décroissance rapide en $+\infty$ et équivalente à $t^{\mathrm{Re}(s)-2}$ en 0. On peut donc, si $\mathrm{Re}(s) > 1$, utiliser le théorème de convergence dominée pour échanger somme et intégrale, ce qui nous donne

$$F(x,s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} e^{-(n+x)t}t^{s-1}dt = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+x)t}t^{s-1}dt = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1-e^{-t}}t^{s-1}dt.$$

(iii) Posons $g_x(t) = \frac{te^{-tx}}{1-e^{-t}}$. Alors g_x est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+$ comme restriction d'une fonction holomorphe en dehors de $2i\pi\mathbf{Z} - \{0\}$, et à décroissance rapide à l'infini. On est donc dans les conditions d'application de la prop. VI.2.7, et $M(g_x, s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\frac{te^{-tx}}{1-e^{-t}}t^{s-1}dt$ admet un prolongement holomorphe à $\mathbf{C}$ vérifiant $M(g_x, 0) = g_x(0) = 1$. Or on a $\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1)$, et donc $F(x,s) = \frac{1}{s-1}M(g_x, s-1)$. Le résultat s'en déduit.

Exercice 5. (i) Soit $\Omega' = \{z \in \Omega,\ |f(z) - g(z)| < |f(z)|\}$. Alors Ω' est un ouvert comme image réciproque de l'ouvert $\{(x,y),\ x < y\}$ de $\mathbf{R}^2$ par l'application continue $z \mapsto (|f(z) - g(z)|, |f(z)|)$, et Ω' contient C par hypothèse. Maintenant, si $z \in \Omega'$, on a $|\frac{g(z)}{f(z)} - 1| < 1$, ce qui permet de définir h comme la composée de $\frac{g}{f} : \Omega' \to D(1, 1^-)$ et $\log : D(1,1^-) \to \mathbf{C}$, où log est la détermination principale du logarithme. On a alors $h' = \frac{(e^h)'}{e^h} = \frac{(g/f)'}{g/f} = \frac{g'}{g} - \frac{f'}{f}$.
(ii) La fonction $\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}$ admet $-h$ comme primitive sur Ω' et donc a une intégrale nulle sur tout lacet contenu dans Ω'. En particulier, si γ est le cercle C parcouru dans le sens direct, alors $\int_\gamma \big(\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}\big)\,dz = 0$. On peut aussi évaluer cette intégrale par la formule des résidus: on a $I(\gamma, a) = 1$, si $|a| < 1$ et $I(\gamma, a) = 0$, si $|a| > 1$; on en déduit, compte-tenu de la formule $\mathrm{Res}(\frac{F'}{F}, z_0) = v_{z_0}(F)$, que si F ne s'annule pas sur C, alors $\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{F'(z)}{F(z)}\,dz$ est le nombre de zéros de F dans D, comptés avec multiplicité. Comme f ne s'annule pas sur C par hypothèse, et g non plus puisque $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$, si $z \in C$, on déduit de la formule $\int_\gamma \big(\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}\big)\,dz = 0$ que f et g ont le même nombre de zéros dans D, comptés avec multiplicité.
(iii) D étant compact et G continue sur D, il existe $z_0 \in D$ tel que $|G|$ atteigne son maximum en z_0, et le principe du maximum montre que $z_0 \in C$. Comme $|G(z_0)| < 1$, par hypothèse, on a $|G(z)| < 1$, si $z \in D$, et donc $G(D) \subset D$. En appliquant le (ii) à $f(z) = z$ et $g(z) = z - G(z)$, on en déduit que f et g ont le même nombre de zéros dans D, et comme f a un unique zéro en 0, cela implique que g a un unique zéro et donc que G a un unique point fixe dans D.