Examen du 10 juillet 2007

Durée 2 heures

Documents autorisés : cours polycopié et notes personnelles

Les 5 exercices sont totalement indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Tous les énoncés du cours peuvent être utilisés sans démonstration, mais doivent être signalés par leur nom ou par une référence précise au polycopié. Les nombres apparaissant en encadré dans la marge représentent le nombre de points de la question correspondante (le total est donc de 25 pour une note sur 20).

Exercice 1. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^\infty$ une suite bornée de nombres complexes.

$\boxed{1}$ (i) Montrer que, si $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^2$, alors $(a_n x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^2$, et que l'application linéaire $f : \ell^2 \to \ell^2$ ainsi définie est continue (on ne demande pas de vérifier la linéarité de f).

$\boxed{2}$ (ii) Montrer que si f est surjective, il existe $C > 0$ tel que $|a_n| \geq C$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. (On pourra commencer par montrer que f est injective en considérant un antécédent de e_i, où, si $i \in \mathbf{N}$, on a noté $e_i \in \ell^2$ la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, avec $x_n = 0$, si $n \neq i$ et $x_i = 1$.)

Exercice 2. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ définie par $f(t) = \frac{1}{(t+i)^3}$.

$\boxed{1}$ (i) Montrer que $\hat{f}$ est bien définie, est de classe $\mathscr{C}^1$, et que $|t^N \hat{f}(t)| \to 0$ quand $|t| \to +\infty$, pour tout $N \in \mathbf{N}$.

$\boxed{2}$ (ii) Soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ définie par $g(t) = e^{-2\pi t}$, si $t > 0$, et $g(t) = 0$, si $t \leq 0$. Calculer $\hat{g}$; en déduire la transformée de Fourier de $h(t) = t^2 g(t)$, puis $\hat{f}$.

$\boxed{4}$ (iii) Retrouver le résultat par la méthode des résidus. (On intégrera $F_t(z) = \frac{e^{-2i\pi\, tz}}{(z+i)^3}$ sur un contour bien choisi (faire un dessin), et on traitera en détail le cas $t \geq 0$, et rapidement le cas $t \leq 0$.)

Exercice 3. Soit S_3 le groupe des permutations de $\{1, 2, 3\}$. On note e, s et t les trois classes de conjugaison de S_3, où e est la classe de conjugaison de l'identité, s celle des transpositions et t celle des 3-cycles.

$\boxed{1}$ (i) Montrer (sans les construire) que S_3 a deux représentations irréductibles de dimension 1 et une de dimension 2.

$\boxed{2}$ (ii) On note χ_1 le caractère de la représentation triviale $\mathbf{1}$, χ_2 celui de la signature ϵ qui est l'autre représentation de dimension 1, et θ celui de la représentation W de dimension 2. De quelle représentation $\psi = \chi_1 + \chi_2 + 2\theta$ est-il le caractère ? Compléter la table

	e	s	t
χ_1			
χ_2			
$\chi_1 + \chi_2 + 2\theta$			
θ			

$\boxed{2}$ (iii) On fait agir S_3 sur lui-même par congugaison intérieure ($g \cdot x = gxg^{-1}$), et on note V la représentation de permutation associée (cf. alinéa 2.3 du § VII.1) et χ son caractère. Calculer χ. (On rappelle que, si G est un groupe fini, si $x \in G$, et si C_x est la classe de conjugaison de x et $Z_x = \{g \in G,\ gx = xg\}$ est le centralisateur de x, alors $|C_x| \cdot |Z_x| = |G|$.) En déduire les multiplicités de $\mathbf{1}$, ϵ et W dans la décomposition de V.

$\boxed{1}$ **Exercice 4**. (i) Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{1}{(n+x)^s}$ converge si $\mathrm{Re}(s) > 1$, et que la somme $F(x,s)$ de cette série est holomorphe en s sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1$.

$\boxed{2}$ (ii) Établir la formule $F(x,s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1-e^{-t}} t^{s-1}\, dt$, si $\mathrm{Re}(s) > 1$.

$\boxed{1}$ (iii) Montrer que $F(x,s)$ admet un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$, holomorphe en dehors d'un pôle simple de résidu 1 en $s = 1$.

Exercice 5. Soient $D = D(0,1)$ et $C = \partial D$ le cercle de centre 0 et de rayon 1. Soient Ω un ouvert contenant D, f holomorphe sur Ω, ne s'annulant pas sur C, et g holomorphe sur Ω, telle que $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$, si $z \in C$.

$\boxed{2}$ (i) Montrer qu'il existe $\Omega' \subset \Omega$ ouvert contenant C et h holomorphe sur Ω' tels que $\frac{g}{f} = e^h$ sur Ω'. Que vaut h' ?

$\boxed{2}$ (ii) Montrer que f et g ont le même nombre de zéros (comptés avec multiplicité) dans D. (On pourra utiliser sans démonstration le fait que, si F est holomorphe non identiquement nulle dans un voisinage de z_0, alors $\mathrm{Res}(\frac{F'}{F}, z_0)$ est l'ordre du zéro de F en z_0.)

$\boxed{2}$ (iii) Soit G holomorphe sur Ω telle que $|G(z)| < 1$, si $z \in C$. Montrer que $G(D) \subset D$ et que G a un unique point fixe dans D.