Sur la régularité des fonctions implicites

Marc Chaperon

Version provisoire, décembre 1997

La démonstration *très* elliptique du théorème de la variété pseudo-stable par R. de la Llave et C. E. Wayne [1] repose sur une version du théorème des fonctions implicites qui n'est pas... explicitée par ces auteurs mais mérite, je crois, de l'être.

Dans la suite, on se donne trois espaces normés Λ, X, Y et un germe* $F : (\Lambda \times X, 0) \to (Y, 0)$ tel que le "déploiement" $\tilde{F} : (\lambda, x) \to (\lambda, F(\lambda, x))$ soit un germe de difféomorphisme lipschitzien (bijection lipschitzienne non nécessairement différentiable mais dont l'inverse est lipschitzienne). Les zéros de F forment donc le graphe du germe $\varphi : (\Lambda, 0) \to (X, 0)$ de "fonction implicite" lipschitzienne donné par $\varphi(\lambda) = \mathrm{pr}_2 \circ \tilde{F}^{-1}(\lambda, 0)$. L'objet de cette note est d'expliciter des conditions assurant la différentiabilité de φ dans des cas où F n'est pas différentiable. Nous en déduisons une preuve sans artifice du théorème de variété pseudo-instable, pour changer du cas pseudo-stable traité dans [1].

1. Une condition pour que la fonction implicite soit différentiable.

Présentons d'abord le résultat sous sa forme la plus simple :

PROPOSITION 1. – *Supposons qu'il existe deux espaces normés X_1, Y_1, deux applications $i \in L(X_1, X)$, $j \in L(Y_1, Y)$ et deux germes $L : (\Lambda, 0) \to L(\Lambda, Y_1)$, $A : (\Lambda, 0) \to \mathrm{Iso}(Y_1, X_1)$ possédant les propriétés suivantes :*

(i) le germe $F_1 : (\Lambda \times X_1, 0) \to (Y, 0)$ défini par $F_1(\lambda, x) := F(\lambda, ix)$ est différentiable;

(ii) les zéros de F_1 forment le graphe d'un germe $\varphi_1 : (\Lambda, 0) \to (X_1, 0)$ de fonction implicite continue – par définition de F_1, $\varphi = i \circ \varphi_1$;

(iii) les dérivées partielles de F_1 en $\tilde{\varphi}_1(\lambda) := (\lambda, \varphi_1(\lambda))$ sont $\partial_1 F_1(\tilde{\varphi}_1(\lambda)) = j \circ L(\lambda)$ et $\partial_2 F_1(\tilde{\varphi}_1(\lambda)) = j \circ A(\lambda)^{-1}$.

Alors φ est différentiable et $D\varphi(\lambda) = -i \circ A(\lambda) \circ L(\lambda)$.

Démonstration. En posant $\Delta(\lambda) := -A(\lambda) \circ L(\lambda)$, nous voulons prouver que

$$\varphi(\lambda + \mu) - \varphi(\lambda) - i\Delta(\lambda)\mu = \mathbf{o}(|\mu|) \; ;$$

puisque $\tilde{F}$ est un germe de difféomorphisme lipschitzien, il revient au même de montrer que $F(\lambda + \mu, \varphi(\lambda + \mu)) - F(\lambda + \mu, \varphi(\lambda) + i\Delta(\lambda)\mu) = \mathbf{o}(|\mu|)$, c'est-à-dire, par définition de φ, que $F(\lambda + \mu, \varphi(\lambda) + i\Delta(\lambda)\mu) = \mathbf{o}(|\mu|)$, ce qui s'écrit aussi

$$F_1(\lambda + \mu, \varphi_1(\lambda) + \Delta(\lambda)\mu) = \mathbf{o}(|\mu|) \, . \qquad (*)$$

* Pour que la vie soit supportable, nous entretiendrons le flou d'usage entre les germes et leurs représentants.

Comme F_1 est différentiable et nulle au point $\tilde{\varphi}_1(\lambda)$, on a

$$F_1(\lambda+\mu, \varphi_1(\lambda)+\Delta(\lambda)\mu) - \Big(\partial_1 F_1(\tilde{\varphi}_1(\lambda)) + \partial_2 F_1(\tilde{\varphi}_1(\lambda)) \circ \Delta(\lambda)\Big)\mu = \mathbf{o}(|\mu|) \ ;$$

on en déduit (*) car, d'après (iii),

$$\partial_1 F_1(\tilde{\varphi}_1(\lambda)) + \partial_2 F_1(\tilde{\varphi}_1(\lambda)) \circ \Delta(\lambda) = j \circ \big(L(\lambda) + A(\lambda)^{-1} \circ \Delta(\lambda)\big)\,,$$

qui est nul par définition de $\Delta(\lambda)$. •

2. Une condition pour que la fonction implicite soit $C^{1,\alpha}$

Nous dirons que φ est $C^{1,\alpha}$, $0 \le \alpha \le 1$, lorsqu'elle est C^1 et a une différentielle hölderienne d'exposant α (c'est-à-dire, si $\alpha = 0$, uniformément continue, ce qui n'est une condition supplémentaire qu'en dimension infinie). Il revient au même de dire qu'il existe $\varphi^1 : (\lambda, 0) \to L(\Lambda, X)$ telle que

$$\varphi(\lambda+\mu) - \varphi(\lambda) - \varphi^1(\lambda)\mu = \begin{cases} \overline{\mathbf{o}}(|\mu|) & \text{si } \ \alpha = 0 \\ \overline{\mathbf{O}}(|\mu|^{1+\alpha}) & \text{sinon,} \end{cases}$$

notations signifiant

– dans le premier cas, que le quotient du premier membre par $|\mu|$ tend uniformément vers 0 quand $\mu \to 0$;

– dans le second cas, que le quotient du premier membre par $|\mu|^{1+\alpha}$ est uniformément borné.

La différentielle de φ est alors φ^1.

PROPOSITION 2. – *Sous les hypothèses de la proposition 1, si F_1 est $C^{1,\alpha}$ $(0 \le \alpha \le 1)$ et que L et A sont des germes d'applications* bornées, *alors φ est $C^{1,\alpha}$.*

Démonstration. Il suffit, dans la démonstration précédente, de remplacer partout $\mathbf{o}(|\mu|)$ par $\overline{\mathbf{o}}(|\mu|)$ si $\alpha = 0$ et par $\overline{\mathbf{O}}(|\mu|^{1+\alpha})$ sinon : l'uniformité est garantie par le fait que Δ est bornée. •

3. Le cas général

Pour $r \in \mathbf{N}^*$ et $0 \le \alpha \le 1$, nous dirons que φ est $C^{r,\alpha}$ (ou $C^{r+\alpha-}$) lorsqu'elle est C^r et a une dérivée r–ième hölderienne d'exposant α. C'est le cas si et seulement s'il existe des $\varphi^k : (\Lambda, 0) \to L_s^k(\Lambda, X)$ (espace des applications k–linéaires continues symétriques $\Lambda^k \to X$), $1 \le k \le r$, tels que

$$\varphi(\lambda+\mu) - \varphi(\lambda) - \sum_{k=1}^{r} \varphi^k(\lambda)\mu^k = \begin{cases} \overline{\mathbf{o}}(|\mu|^r) & \text{si } \ \alpha = 0 \\ \overline{\mathbf{O}}(|\mu|^{r+\alpha}) & \text{sinon,} \end{cases} \tag{1}$$

La dérivée k–ième de φ est alors $D^k\varphi = k!\,\varphi^k$.

Notations. Pour tout entier $r > 0$ et tout $m = (m_1, \ldots, m_r) \in \mathbf{N}^r$, on pose

$$|m| := m_1 + \cdots + m_r \quad , \quad m! := m_1! \cdots m_r! \quad , \quad s(m) := \sum_{j=1}^{r} j\, m_j$$

$$\kappa_m := \begin{cases} r & \text{si m=0} \\ \min\{j \,:\, m_j > 0\} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\underline{m} := m_{\kappa_m} \quad , \quad \overline{m} := (0, (m_j)_{\kappa_m < j \leq r}) \in \mathbf{N}^r \ ;$$

quels que soient les espaces normés $E_1, \ldots, E_r, V$, on note $L_s^m(E_1, \ldots, E_r; V)$ l'espace des applications $|m|$–linéaires continues $E_1^{m_1} \times \cdots \times E_r^{m_r} \to V$ symétriques dans chaque facteur $E_j^{m_j}$; enfin, on pose $\delta^k := (\delta_1^k, \ldots, \delta_r^k) \in \mathbf{N}^r$, où δ_j^k est le symbole de Kronecker.

THÉORÈME 1. – *Supposons qu'il existe*

— *un entier $r > 0$ et un réel $\alpha \in]0, 1]$;*

— *des espaces normés $X_1, \ldots, X_r$, $Y_1, \ldots, Y_r$ et, pour $1 \leq \ell \leq k \leq r$, des applications $i_k^\ell \in L(X_\ell, X_k)$, $i^k \in L(X_k, X)$, $j_k^\ell \in L(Y_\ell, Y_k)$ et $j^k \in L(Y_k, Y)$ vérifiant $i_k^k = \mathrm{Id}$, $i_k^\ell \circ i_\ell^m = i_k^m$, $i^k \circ i_k^\ell = i^\ell$, $j_k^k = \mathrm{Id}$, $j_k^\ell \circ j_\ell^m = j_k^m$ et $j^k \circ j_k^\ell = j^\ell$;*

— *des germes $L_k : (\Lambda, 0) \to L(\Lambda, Y_k)$ et $A_k : (\Lambda, 0) \to \mathrm{Iso}(Y_k, X_k)$ d'applications* bornées, $1 \leq k \leq r$ *;*

— *en posant $\tilde{X}_k := \Lambda \times X_k$, des germes $B^m : (\Lambda, 0) \to L_s^m(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_r; Y_{s(m)})$ d'applications* bornées, $m \in \mathbf{N}^r$, $s(m) \leq r$

tels que F satisfasse aux hypothèses suivantes (celles de la proposition 2 si $r = 1$) :

(i) le germe $F_k : (\tilde{X}_k, 0) \to (Y, 0)$ défini par $F_k(\lambda, x_k) := F(\lambda, i^k x_k)$ est de classe $C^{\frac{r+\alpha}{k}-}$ pour $1 \leq k \leq r$;

(ii) pour $1 \leq k \leq r$, les zéros de F_k forment le graphe d'un germe $\varphi_k : (\Lambda, 0) \to (X_k, 0)$ de fonction implicite continue – on a donc $i^k \circ \varphi_k = \varphi$ et $i_\ell^k \circ \varphi_k = \varphi_\ell$;

(iii) on définit inductivement des germes $F^m : (\tilde{X}_{\kappa_m}, 0) \to L_s^m(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_r; Y)$, $m \in \mathbf{N}^r$, $s(m) \leq r$ par

$$\begin{cases} F^0 := F_r \\ F^m := D^{\underline{m}} \left(F^{\overline{m}} \circ \tilde{i}_{\kappa_{\overline{m}}}^{\kappa_m} \right) \quad \text{pour} \quad 0 < s(m) \leq r \end{cases}$$

où $\tilde{i}_k^\ell(\lambda, x) := (\lambda, i_k^\ell x)$; pour $1 \leq \ell \leq \kappa_m$, le germe $F^m \circ \tilde{i}_{\kappa_m}^\ell$ est $C^{\frac{r+\alpha-s(m)}{\ell}-}$;

(iv) en notant $\tilde{\varphi}_\ell(\lambda) := (\lambda, \varphi_\ell(\lambda))$, on a $F^m(\tilde{\varphi}_{\kappa_m}(\lambda)) = m!\, j^{s(m)} \circ B^m(\lambda)$;

(v) pour $1 \leq k \leq r$, on a $B^{\delta^k}(\lambda)(\mu, v) = L_k(\lambda)\mu + A_k(\lambda)^{-1} v$, $\mu \in \Lambda$, $v \in X_k$, c'est-à-dire $\partial_1 F_k(\tilde{\varphi}_k(\lambda)) = j^k \circ L_k(\lambda)$ et $\partial_2 F_k(\tilde{\varphi}_k(\lambda)) = j^k \circ A_k(\lambda)^{-1}$.

Alors φ est $C^{r,\alpha}$ et, pour $1 \leq k \leq r$, sa dérivée k–ième $D^k\varphi$ est de la forme $D^k\varphi(\lambda) = k!\, i^k \circ \Delta^k(\lambda)$, où $\Delta^k : (\Lambda, 0) \to L_s^k(\Lambda, X_k)$ est un germe d'application bornée.

Démonstration. La proposition 2 permet de supposer $r > 1$. L'idée est toujours la même : nous cherchons des Δ^k bornées telles que (1) soit satisfaite par $\varphi^k(\lambda) = i^k \circ \Delta^k$; il revient au même de dire que

$$F(\lambda + \mu, \varphi(\lambda + \mu)) - F\left(\lambda + \mu, \varphi(\lambda) + \sum_{\ell=1}^{r} i^\ell \Delta^\ell(\lambda)\mu^\ell\right) = \overline{\mathbf{O}}(|\mu|^{r+\alpha}),$$

c'est-à-dire, par définition de φ, que

$$(^*) \qquad F\left(P_\lambda(\mu)\right) = \overline{\mathbf{O}}(|\mu|^{r+\alpha}),$$

où l'on a posé

$$P_\lambda(\mu) := \left(\lambda + \mu, \varphi(\lambda) + \sum_{\ell=1}^{r} i^\ell \Delta^\ell(\lambda)\mu^\ell\right)$$

La clé de la démonstration est le

LEMME. – *Quels que soient les germes $\Delta^k : (\Lambda, 0) \to L_s^k(\Lambda; X_k)$ d'applications bornées, $1 \le k \le r$, on a*

$$F\left(P_\lambda(\mu)\right) = \sum_{1 \le s(m) \le r} \frac{1}{m!} F^m\left(\tilde{\varphi}_{\kappa_m}(\lambda)\right) \left(\tilde{\Delta}^1(\lambda)\mu\right)^{m_1} \cdots \left(\tilde{\Delta}^r(\lambda)\mu^r\right)^{m_r} + \overline{\mathbf{O}}(|\mu|^{r+\alpha}),$$

où l'on a posé $\tilde{\Delta}^1(\lambda)\mu := \left(\mu, \Delta^1(\lambda)\mu\right)$ et $\tilde{\Delta}^\ell(\lambda)\mu^\ell := \left(0, \Delta^\ell(\lambda)\mu^\ell\right)$ pour $1 < \ell \le r$.

Preuve du théorème à partir du lemme. D'après le lemme, trouver des Δ^ℓ vérifiant $(^*)$ revient à les obtenir tels que

$$\sum_{1 \le s(m) \le r} \frac{1}{m!} F^m\left(\tilde{\varphi}_{\kappa_m}(\lambda)\right) \left(\tilde{\Delta}^1(\lambda)\mu\right)^{m_1} \cdots \left(\tilde{\Delta}^r(\lambda)\mu^r\right)^{m_r} \equiv 0,$$

ce qui se fait par récurrence en écrivant que pour $1 \le k \le r$ le terme homogène de degré k par rapport à μ du premier membre doit être identiquement nul :

$$(^{**}) \qquad \sum_{s(m)=k} \frac{1}{m!} F^m\left(\tilde{\varphi}_{\kappa_m}(\lambda)\right) \left(\tilde{\Delta}^1(\lambda)\mu\right)^{m_1} \cdots \left(\tilde{\Delta}^r(\lambda)\mu^r\right)^{m_r} \equiv 0\ ;$$

pour $k = 1$, on obtient

$$F^{\delta^1}\left(\tilde{\varphi}_1(\lambda)\right) \tilde{\Delta}^1(\lambda)\mu \equiv 0,$$

c'est-à-dire, d'après (v),

$$j^1 \circ \left(L_1(\lambda) + A_1(\lambda)^{-1} \circ \Delta^1(\lambda)\right)\mu \equiv 0,$$

ce qui nous redonne l'application bornée Δ^1 définie par

$$\Delta^1(\lambda) := -A_1(\lambda) \circ L_1(\lambda) \, .$$

Pour $1 < k \leq r$, si l'on suppose trouvés $\Delta^1, \ldots, \Delta^{k-1}$, $(^{**})$ s'écrit

$$F^{\delta^k}\left(\tilde{\varphi}_k(\lambda)\right) \tilde{\Delta}^k(\lambda)\mu^k + \sum_{s(m)=k,\, |m|>1} \frac{1}{m!} F^m\left(\tilde{\varphi}_{\kappa_m}(\lambda)\right) \left(\tilde{\Delta}^1(\lambda)\mu\right)^{m_1} \cdots \left(\tilde{\Delta}^{k-1}(\lambda)\mu^{k-1}\right)^{m_{k-1}} \equiv 0 \, ,$$

c'est-à-dire, d'après (iv)–(v) et la définition de $\tilde{\Delta}^k$,

$$j^k \left(A_k(\lambda)^{-1} \Delta^k(\lambda)\mu^k + \sum_{s(m)=k,\, |m|>1} B^m(\lambda) \left(\tilde{\Delta}^1(\lambda)\mu\right)^{m_1} \cdots \left(\tilde{\Delta}^{k-1}(\lambda)\mu^{k-1}\right)^{m_{k-1}} \right) \equiv 0 \; ;$$

il est alors clair que le Δ^k défini par

$$\Delta^k(\lambda)\mu^k = -A_k(\lambda) \sum_{s(m)=k,\, |m|>1} B^m(\lambda) \left(\tilde{\Delta}^1(\lambda)\mu\right)^{m_1} \cdots \left(\tilde{\Delta}^{k-1}(\lambda)\mu^{k-1}\right)^{m_{k-1}}$$

répond à la question, d'où le théorème. $\bullet$

Démonstration du lemme. En posant $\tilde{i}^k(\lambda, x) := (\lambda, i^k x)$ et

$$P_\lambda^k(\mu) := \left(\lambda + \mu, \varphi_k(\lambda) + \sum_{\ell=1}^{k} i_k^\ell \Delta^\ell(\lambda)\mu^\ell \right), \; 1 \leq k \leq r$$

on a

$$P_\lambda(\mu) = \tilde{i}^r P_\lambda^r(\mu)$$

et donc

$$F\left(P_\lambda(\mu)\right) = F_r\left(P_\lambda^r(\mu)\right) = F_1\left(P_\lambda^1(\mu)\right) + \sum_{k=2}^{r} \left(F_k\left(P_\lambda^k(\mu)\right) - F_{k-1}\left(P_\lambda^{k-1}(\mu)\right)\right) . \tag{1}$$

Examinons d'abord le premier terme de cette somme : puisque F_1 est $C^{r,\alpha}$ et que $F_1 \circ \tilde{\varphi}_1 = 0$,

$$F_1\left(P_\lambda^1(\mu)\right) = F_1\left(\tilde{\varphi}_1(\lambda) + \tilde{\Delta}^1(\lambda)\mu\right) = \sum_{\ell=1}^{r} \frac{1}{\ell!} D^\ell F_1\left(\tilde{\varphi}_1(\lambda)\right) \left(\tilde{\Delta}^1(\lambda)\mu\right)^\ell + \overline{\mathbf{O}}(|\mu|^{r+\alpha}) \; ;$$

comme $D^\ell F_1 = D^\ell\left(F^0 \circ \tilde{i}_r^1\right) = F^{\ell,0}$ d'après (iii), si l'on pose

$$\kappa^m := \max\{j \, : \, m_j > 0\} \, , \; m \in \mathbf{N}^r \setminus \{0\} \, ,$$

cela s'écrit

$$F_1\left(P^1_\lambda(\mu)\right)=\sum_{1\le s(m)\le r\,,\,\kappa^m=1}\frac{1}{m!}F^m\left(\tilde\varphi_1(\lambda)\right)\left(\tilde\Delta^1(\lambda)\mu\right)^{m_1}\cdots\left(\tilde\Delta^r(\lambda)\mu^r\right)^{m_r}+ \tag{2}$$
$$+\,\overline{\mathbf{O}}(|\mu|^{r+\alpha})\,.$$

Pour $2\le k\le r$, comme F_k est $C^{\frac{r+\alpha}{k}-}$, on a de même

$$\begin{aligned}F_k\left(P^k_\lambda(\mu)\right)-F_{k-1}\left(P^{k-1}_\lambda(\mu)\right)&=F_k\left(\tilde i^{k-1}_k P^{k-1}_\lambda(\mu)+\tilde\Delta^k(\lambda)\mu^k\right)-F_k\left(\tilde i^{k-1}_k P^{k-1}_\lambda(\mu)\right)\\&=\sum_{0<km_k\le r}\frac{1}{m_k!}D^{m_k}F_k\left(\tilde i^{k-1}_k P^{k-1}_\lambda(\mu)\right)\left(\tilde\Delta^k(\lambda)\mu^k\right)^{m_k}+\\&\quad+\overline{\mathbf{O}}(|\mu|^{r+\alpha})\,,\end{aligned}$$

ce qui s'écrit aussi

$$F_k\left(P^k_\lambda(\mu)\right)-F_{k-1}\left(P^{k-1}_\lambda(\mu)\right)=\sum_{0<km_k\le r}\frac{1}{m_k!}F^{m_k\delta^k}\left(\tilde i^{k-1}_k P^{k-1}_\lambda(\mu)\right)\left(\tilde\Delta^k(\lambda)\mu^k\right)^{m_k} \tag{3}$$
$$+\,\overline{\mathbf{O}}(|\mu|^{r+\alpha})\ ;$$

si $k=2$, puisque $F^{m_2\delta^2}\circ\tilde i^1_2$ est $C^{r+\alpha-2m_2-}$ d'après (iii), on a

$$\begin{aligned}F^{m_2\delta^2}\left(\tilde i^1_2P^1_\lambda(\mu)\right)&=F^{m_2\delta^2}\left(\tilde i^1_2\left(\tilde\varphi_1(\lambda)+\tilde\Delta^1(\lambda)\mu\right)\right)\\&=\sum_{0\le m_1\le r-2m_2}\frac{1}{m_1!}D^{m_1}\left(F^{m_2\delta^2}\circ\tilde i^1_2\right)\left(\tilde\varphi_1(\lambda)\right)\left(\tilde\Delta^1(\lambda)\mu\right)^{m_1}+\overline{\mathbf{O}}(|\mu|^{r+\alpha-2m_2})\end{aligned}$$

pour $0<2m_2\le r$; compte tenu de ce que $D^{m_1}\left(F^{m_2\delta^2}\circ\tilde i^1_2\right)=F^{(m_1,m_2,0)}$ par définition, on déduit donc de (3) que

$$F_2\left(P^2_\lambda(\mu)\right)-F_1\left(P^1_\lambda(\mu)\right)=\sum_{1\le s(m)\le r,\,\kappa^m=2}\frac{1}{m!}F^m\left(\tilde\varphi_1(\lambda)\right)\left(\tilde\Delta^1(\lambda)\mu\right)^{m_1}\cdots\left(\tilde\Delta^r(\lambda)\mu^r\right)^{m_r}$$
$$+\,\overline{\mathbf{O}}(|\mu|^{r+\alpha})\,.$$

On vérifie de même inductivement que

$$\begin{aligned}&F_k\left(P^k_\lambda(\mu)\right)-F_{k-1}\left(P^{k-1}_\lambda(\mu)\right)\\&\quad=\sum_{1\le s(m)\le r,\,\kappa^m=k}\frac{1}{m!}F^m\left(\tilde\varphi_1(\lambda)\right)\left(\tilde\Delta^1(\lambda)\mu\right)^{m_1}\cdots\left(\tilde\Delta^r(\lambda)\mu^r\right)^{m_r}+\overline{\mathbf{O}}(|\mu|^{r+\alpha})\end{aligned} \tag{4}$$

pour $2\le k\le r$. Le lemme résulte de (1), (2) et (4). •

4. Variétés pseudo-instables

Hypothèses et notations. Soit $h : (M,p) \to (M,p)$ un germe d'application différentiable en p, où p est un point d'une variété banachique M. La différentielle $L := T_p h$ est donc un endomorphisme de $E := T_p M$. On suppose que le spectre $\sigma(L)$ de L est la réunion de deux compacts disjoints non vides σ_1 et σ_2 vérifiant

$$\max_{\lambda_2 \in \sigma_2} |\lambda_2| < \min_{\lambda_1 \in \sigma_1} |\lambda_1| \leq 1 \;; \tag{1}$$

et l'on note I (resp. S) le sous-espace L–stable de E associé à la partie σ_1 (resp. σ_2) de $\sigma(L)$.

THEOREME 2.– *Quels que soient l'entier $r \geq 1$ et le réel $\alpha \in]0,1]$ tels que l'on ait*

$$\max_{\lambda_2 \in \sigma_2} |\lambda_2| < \min_{\lambda_1 \in \sigma_1} |\lambda_1|^{r+\alpha} ,$$

si h est $C^{r,\alpha}$ et que la topologie de E peut être définie par une norme $C^{r,\alpha}$, alors il existe un germe h–invariant V en p de sous-variété $C^{r,\alpha}$ de M tel que $T_p V = I$.

Démonstration. Une carte permet de supposer que $M = E$ (muni d'une norme $\|\cdot\|$ de classe $C^{r,\alpha}$) et $p = 0$; en identifiant $E = I \oplus S$ à $I \times S$, on munit E de la norme équivalente

$$|(x,y)| := \max\{\|x\|, \|y\|\}$$

et l'on a

$$L(x,y) = (Ax, By) ,$$

où l'endomorphisme A (resp. B) de I (resp. S) a pour spectre σ_1 (resp. σ_2) ; en particulier, A est inversible et notre hypothèse sur r et α s'écrit, en termes de rayons spectraux,

$$\rho(B) < \rho(A^{-1})^{-(r+\alpha)} \;;$$

nous pouvons donc choisir un réel positif a vérifiant

$$\begin{cases} a < \rho(A^{-1})^{-1} \\ \rho(B) < a^{r+\alpha} . \end{cases} \tag{2}$$

Pour $\varepsilon > 0$, définissons $h_\varepsilon : E \to E$ par

$$h_\varepsilon(z) := \begin{cases} Lz + \Theta(z/\varepsilon)(h(z) - Lz) & \text{pour } \|z\| < \varepsilon \\ Lz & \text{sinon,} \end{cases} \tag{3}$$

où $\Theta : E \to [0,1]$ est $C^{r,\alpha}$, nulle pour $\|z\| \geq 1$ et égale à 1 près de 0 (on peut prendre $\Theta(z) := \theta(\|z\|)$, où $\theta : \mathbf{R} \to [0,1]$ est une fonction C^∞ telle que $\theta^{-1}(0) = [1, +\infty[$ et $\theta^{-1}(1) =]-\infty, 1/2]$).

Nous allons montrer que, si $\varepsilon > 0$ est assez petit, les $z_0 \in E$ qui sont le terme d'ordre 0 d'une suite $\underline{z} = (z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant

$$|\underline{z}|_1 := \sup_{n\in\mathbf{N}} a^n |z|_n < \infty \tag{4}$$

et

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad z_n = h_\varepsilon(z_{n+1}) \tag{5}$$

forment le graphe V_ε d'une fonction $\psi_\varepsilon : I \to S$, de classe $C^{r,\alpha}$ au voisinage de 0 et nulle à l'ordre 1 en 0. Comme V_ε est h_ε–invariante – si $\underline{z}$ vérifie (4)–(5), il en va de même de la suite $(h_\varepsilon(z_n))$ – son germe V en 0 est h–invariant : c'est la variété pseudo-instable cherchée.

L'idée, due à Irwin, est d'obtenir ψ_ε en résolvant l'équation (5) dans l'espace des suites $\underline{z}$ qui vérifient (4). Pour cela, nous allons appliquer le théorème 1 à la situation où $\Lambda = I$ et $\Lambda \times X = \Lambda \times X_{r+\alpha}$, en désignant par $\Lambda \times X_k = \tilde{X}_k$, $1 \le k \le r+\alpha$, l'espace des suites

$$\underline{z} = (z_n)_{n\in\mathbf{N}} = (x_n, y_n)_{n\in\mathbf{N}}$$

à valeurs dans E telles que l'on ait

$$|\underline{z}|_k := \sup_{n\in\mathbf{N}} a^{kn} |z_n| < \infty \ ;$$

c'est un espace de Banach pour la norme $|\cdot|_k$; les projections $\tilde{X}_k \to \Lambda$ et $\tilde{X}_k \to X_k$ sont respectivement $\underline{z} \mapsto x_0$ et $\underline{z} \mapsto (x_{n+1}, y_n)_{n\in\mathbf{N}}$, de sorte que X_k n'est autre que $\tilde{X}_k$, muni d'une norme équivalente. Nous prendrons $Y = X$, $Y_k = X_k$ pour $k \in \{1, \ldots, r\}$; les $i_k^\ell = j_k^\ell$ et $i^k = j^k$ seront les inclusions. Nous allons voir que les hypothèses du théorème 1 sont satisfaites par

$$F(\underline{z}) := (z_n - h_\varepsilon(z_{n+1}))_{n\in\mathbf{N}} \,. \tag{6}$$

LEMME 1. – *Si $\varepsilon > 0$ est assez petit, le déploiement $\tilde{F} : \underline{z} \mapsto (x_0, F(\underline{z}))$ est un difféomorphisme lipschitzien global de $\Lambda \times X$ sur lui-même; de même, pour $1 \le k \le r$, on définit une application $F^\varepsilon_{k,k} : \tilde{X}_k \to X_k$ par*

$$F^\varepsilon_{k,k}(\underline{z}) := (z_n - h_\varepsilon(z_{n+1}))_{n\in\mathbf{N}} \tag{6_k}$$

et son déploiement $\tilde{F}^\varepsilon_{k,k} : \underline{z} \mapsto (x_0, F^\varepsilon_{k,k}(\underline{z}))$ est un difféomorphisme lipschitzien global de $\tilde{X}_k$ sur lui-même.

Preuve. Puisque $F = F^\varepsilon_{r+\alpha,r+\alpha}$, nous parlerons des $F^\varepsilon_{k,k}$ avec $1 \le k \le r+\alpha$. Il suffit évidemment de montrer que

$$\tilde{F}^0_{k,k}(\underline{z}) := \big(x_0, (z_n - L z_{n+1})_{n\in\mathbf{N}}\big)$$

est un automorphisme de $\tilde{X}_k$ et que $F^{\varepsilon}_{k,k} - F^0_{k,k}$ est une application de $\tilde{X}_k$ dans X_k dont la constante de Lipschitz tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$.

Commençons par prouver que

$$\tilde{F}^0_{k,k} : \underline{z} \mapsto \big((x_0, y_0 - By_1)\,, (x_{n-1} - Ax_n, y_n - By_{n+1})_{n>0}\big)$$

est un automorphisme de $\tilde{X}_k$, c'est-à-dire que

$$\mathcal{A}_k : (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \mapsto \big(x_0, (x_{n-1} - Ax_n)_{n>0}\big) \;\text{ et }\; \mathcal{B}_k : (y_n)_{n\in\mathbf{N}} \mapsto (y_n - By_{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$$

sont des automorphismes des espaces de Banach

$$\mathcal{I}_k := \{\underline{x} = (x_n) \,:\, x_n \in I\,,\, |\underline{x}|_k := \sup_{n\in\mathbf{N}} a^{kn}|x_n| < \infty\}$$

et

$$\mathcal{S}_k := \{\underline{y} = (y_n) \,:\, y_n \in S\,,\, |\underline{y}|_k := \sup_{n\in\mathbf{N}} a^{kn}|y_n| < \infty\}$$

respectivement ;

– pour $\mathcal{B}_k$, c'est facile : en choisissant une norme $|\cdot|$ définissant la topologie de S et telle que la norme de B soit assez proche de son rayon spectral pour vérifier

$$a^{-(r+\alpha)}\,|B| < 1\,,$$

on s'aperçoit que $\mathcal{B}_k$ est de la forme "identité plus contraction stricte de $\mathcal{S}_k$" en vertu de l'inégalité

$$a^{kn}|By_{n+1}| = a^{-k}\,|B(a^{k(n+1)}y_{n+1})| \le a^{-k}\,|B|\,|a^{k(n+1)}y_{n+1}| \le a^{-k}\,|B|\,|\underline{y}|_k \le a^{-(r+\alpha)}\,|B|\,|\underline{y}|_k$$

(cette dernière inégalité parce qu'on a $k \le r + \alpha$, et $a < 1$ d'après (1) et (2)) ;

– pour $\mathcal{A}_k$, on l'écrit comme le composé de $\mathcal{A}'_k : (x_n) \mapsto \big(x_0, \big(x_n - A^{-1}x_{n-1}\big)_{n\in\mathbf{N}}\big)$ et de l'automorphisme $(x'_n) \mapsto \big(x'_0, (-Ax'_n)_{n>0}\big)\big)$ de $\mathcal{I}_k$; en choisissant une norme $|\cdot|$ définissant la topologie de I et telle que la norme de A^{-1} soit assez proche de son rayon spectral pour vérifier

$$a\,|A^{-1}| < 1\,,$$

on s'aperçoit que $\mathcal{A}'_k$ est de la forme "identité plus contraction stricte de $\mathcal{I}_k$" en vertu de l'inégalité

$$a^{kn}|A^{-1}x_{n-1}| = a^k\,|A^{-1}(a^{k(n-1)}y_{n-1})| \le a^k\,|A^{-1}|\,|a^{k(n-1)}y_{n-1}| \le a^k\,|A^{-1}|\,|\underline{x}|_k \le a\,|A^{-1}|\,|\underline{x}|_k$$

(cette dernière inégalité parce qu'on a $k \ge 1 > a$) ; il en résulte que $\tilde{F}^0_{k,k}$ est bien un automorphisme de $\tilde{X}_k$.

Comme $F^{\varepsilon}_{k,k}(0) = 0$, pour voir que $F^{\varepsilon}_{k,k} - F^0_{k,k}$ est une application de $\tilde{X}_k$ dans X_k dont la constante de Lipschitz tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$, il suffit de montrer que l'on a

$$\text{(7)} \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\; \sup_{\underline{z},\underline{z}'\in X_k\,,\,\underline{z}'\neq\underline{z}} \frac{\left|\left(F^{\varepsilon}_{k,k} - F^0_{k,k}\right)(\underline{z}') - \left(F^{\varepsilon}_{k,k} - F^0_{k,k}\right)(\underline{z})\right|_k}{|\underline{z}' - \underline{z}|_k} = 0\,;$$

or, puisque

$$D(h_\varepsilon - L)(z)\delta z = \begin{cases} \Theta(z/\varepsilon)(Dh(z)-L)\delta z + (D\Theta(z/\varepsilon)\delta z)\,(h(z)-Lz)\,/\varepsilon & \text{pour } \|z\| \le \varepsilon \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\|z\|\le\varepsilon} |Dh(z) - L| = \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\|z\|\le\varepsilon} |\,(h(z)-Lz)\,/\varepsilon| = 0\,,$$

on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{Lip}(h_\varepsilon - L) = \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{z\in E} |D(h_\varepsilon - L)(z)| = 0\,, \tag{8}$$

d'où l'on déduit facilement (7) car

$$\left(F^0_{k,k} - F^\varepsilon_{k,k}\right)(\underline{z}) = \left((h_\varepsilon - L)\,(z_{n+1})\right)_{n\in\mathbf{N}}\,. \quad \bullet$$

Il résulte du lemme 1 que, si $\varepsilon > 0$ est assez petit,

– les zéros de F forment le graphe d'une fonction implicite lipschitzienne $\varphi : \Lambda \to X$;

– pour $1 \le k \le r$, les zéros de $F^\varepsilon_{k,k}$, c'est-à-dire ceux de

$$F_k := j^k \circ F^\varepsilon_{k,k} : \tilde{X}_k \to Y\ ,$$

forment le graphe d'une fonction implicite lipshitzienne φ_k (comme les φ_k et φ résolvent la même équation dans les espaces de suites $X_1 \subset \cdots \subset X_r \subset X$, on voit que φ est à valeurs dans X_1 et que φ_k, pour $1 \le k \le r$, n'est autre que φ vue comme application dans X_k). Nous allons déduire le théorème de la variété pseudo-instable du

LEMME 2. – *Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, les hypothèses du théorème 1 sont vérifiées par les germes en 0 de F et des F_k, $1 \le k \le r$. Le germe en 0 de la fonction implicite φ est donc $C^{r,\alpha}$.*

Preuve. D'après le lemme 1 et les conséquences que nous venons d'en tirer, il reste seulement à vérifier les hypothèses (i) et (iii)–(v) du théorème 1, c'est-à-dire, si $r = 1$, les hypothèses de la proposition 2. Pour $1 \le k \le r$, commençons par montrer que F_k est différentiable et que

$$DF_k(\underline{z})\underline{\delta z} = \left(\delta z_n - Dh_\varepsilon(z_{n+1})\delta z_{n+1}\right)_{n\in\mathbf{N}} \tag{9}$$

(en composant F_k avec les projections $\underline{z} \mapsto z_n$ on voit que ses dérivées s'obtiennent forcément par dérivation terme à terme) ; on définit bien ainsi une fonction linéaire continue de $\underline{\delta z} \in \tilde{X}_k$ à valeurs dans $Y = X_{r+\alpha}$ en vertu de l'inégalité

$$a^{(r+\alpha)(n+1)}\,|Dh_\varepsilon(z_{n+1})\delta z_{n+1}| \le a^{k(n+1)}\,|Dh_\varepsilon(z_{n+1})\delta z_{n+1}| \le \left(\sup_{z\in E} |Dh_\varepsilon(z)|\right) |\underline{\delta z}|_k\ ; \tag{10}$$

pour voir que F_k a bien la dérivée annoncée, commençons par remarquer que l'on a

$$
\begin{aligned}
& a^{(r+\alpha)(n+1)} \left|h_\varepsilon(z_{n+1}+\delta z_{n+1}) - h_\varepsilon(z_{n+1}) - Dh_\varepsilon(z_{n+1})\delta z_{n+1}\right| \\
& \qquad = a^{(r+\alpha-k)(n+1)} \left| \int_0^1 \left(Dh_\varepsilon(z_{n+1}+t\delta z_{n+1}) - Dh_\varepsilon(z_{n+1})\right) dt \left(a^{k(n+1)}\delta z_{n+1}\right) \right| \\
& \qquad \le a^{(r+\alpha-k)(n+1)} \left(\int_0^1 \left|Dh_\varepsilon(z_{n+1}+t\delta z_{n+1}) - Dh_\varepsilon(z_{n+1})\right| dt \right) |\underline{\delta z}|_k \\
& \qquad \le 2a^{(r+\alpha-k)(n+1)} \left(\sup_{z\in E} |Dh_\varepsilon(z)| \right) |\underline{\delta z}|_k \ ;
\end{aligned}
\tag{11}
$$

il nous suffit, d'après l'avant-dernière inégalité (11), de montrer que, pour tout $\eta > 0$, il existe $\zeta > 0$ tel que

$$
|\underline{\delta z}|_k < \zeta \Rightarrow \sup_{n\in\mathbf{N}} a^{(r+\alpha-k)(n+1)} \left(\int_0^1 \left|Dh_\varepsilon(z_{n+1}+t\delta z_{n+1}) - Dh_\varepsilon(z_{n+1})\right| dt \right) < \eta \ ;
\tag{12}
$$

or, la dernière inégalité (11) montre qu'il existe $n_\eta \in \mathbf{N}$ tel que l'on ait

$$
\forall \underline{z}, \underline{\delta z} \in \tilde{X}_k \qquad \sup_{n\geq n_\eta} a^{(r+\alpha-k)(n+1)} \left(\int_0^1 \left|Dh_\varepsilon(z_{n+1}+t\delta z_{n+1}) - Dh_\varepsilon(z_{n+1})\right| dt \right) < \eta \,,
$$

ce qui entraîne immédiatement (12) puisque les δz_{n+1} avec $n < n_\eta$ tendent vers 0 quand $|\underline{\delta z}|_k \to 0$.

Remarque. Pour $h \neq L$, la fonction F elle-même n'est pas différentiable : en la composant avec les $\underline{z} \mapsto z_n$ on voit que sa dérivée s'obtiendrait par dérivation terme à terme; or, on définit des suites $\underline{z}, \underline{\delta z}^q \in \Lambda \times X$, $q \in \mathbf{N}$, par $z_n \equiv z$ et

$$
\delta z_n^q = \begin{cases} 0 & \text{pour } n < q \\ v & \text{pour } n \geq q, \end{cases}
$$

où z et v vérifient $\|z\| \geq \varepsilon$ et $(h_\varepsilon - L)(z+v) = w \neq 0$ (d'où $v \neq 0$); pour $n \geq q$, on a alors $h_\varepsilon(z_n + \delta z_n^q) - h_\varepsilon(z_n) - Dh_\varepsilon(z_n)\delta z_n^q = (h_\varepsilon - L)(z+v) - (h_\varepsilon - L)(z) - D(h_\varepsilon - L)(z)v = w$ et donc

$$
\sup_{n\in\mathbf{N}} a^{(r+\alpha)n} \left|h_\varepsilon(z_n + \delta z_n^q) - h_\varepsilon(z_n) - Dh_\varepsilon(z_n)\delta z_n^q\right| \geq a^{(r+\alpha)q}|w| = (|w|/|v|)\, |\underline{\delta z}^q|_{r+\alpha} \,,
$$

ce qui permet de conclure car $|\underline{\delta z}^q|_{r+\alpha} = a^{(r+\alpha)q}|v| \to 0$ quand $q \to 0$.

Les inégalités (10) nous disent en outre que

$$
DF_k(\underline{z}) = j^k \circ C_k(\underline{z}) \,,
$$

où $C_k : \tilde{X}_k \to L(\tilde{X}_k, Y_k)$ est bornée, donnée par

$$C_k(\underline{z})\underline{\delta z} := (\delta z_n - Dh_\varepsilon(z_{n+1})\delta z_{n+1})_{n\in\mathbf{N}} \;\;;$$

l'hypothèse (iv) du théorème 1 est donc satisfaite pour $m = \delta^k$ avec $B^{\delta^k} := C_k \circ \tilde{\varphi}_k$.

L'hypothèse (v) a pratiquement été déjà vérifiée dans la démonstration du lemme 1 : pour ε assez petit, il résulte de (8) que, pour $1 \le k \le r$, toutes les $\tilde{C}_k(\underline{z}) : \underline{\delta z} \to (\delta x_0, C_k(\underline{z})\underline{\delta z})$ avec $\underline{z} \in \tilde{X}_k$ sont des perturbations assez petites de l'automorphisme $\tilde{F}^0_{k,k}$ pour être des automorphismes dont les inverses sont uniformément bornés, d'où (v).

Fin de la preuve du lemme 2 si $r = 1$. Il nous reste simplement à vérifier que F_1 est $C^{1,\alpha}$, ce qui résulte aussitôt de l'inégalité

$$a^{(1+\alpha)n} \left|(Dh_\varepsilon(z_n + \delta z_n) - Dh_\varepsilon(z_n))\, Z_n\right| \le C_{\varepsilon,\alpha}\, \left(a^n \left|\delta z_n\right|\right)^\alpha \left(a^n \left|Z_n\right|\right),$$

où $C_{\varepsilon,\alpha}$ est la constante de Hölder d'exposant α de Dh_ε (qui est finie pour ε assez petit).

Fin de la preuve du lemme 2 pour $r > 1$. La vérification de l'hypothèse (i) du théorème 1 est très semblable à ce que nous venons de faire : pour $1 \le k\ell \le r$ et $\underline{z} \in \tilde{X}_k$, le seul "candidat" à être $D^\ell F_k(\underline{z})$ est

$$F^{\ell\delta^k}(\underline{z})\underline{\delta z}^\ell := \left(\delta^1_\ell\, \delta z_n - D^\ell h_\varepsilon(z_{n+1})\, (\delta z_{n+1})^\ell\right),$$

qui est bien dans $L^\ell_s(\tilde{X}_k, X)$ en vertu de l'inégalité

$$(9_\ell) \qquad a^{(r+\alpha)n} \left|D^\ell h_\varepsilon(z_n)\, (\delta z_n)^\ell\right| \le a^{k\ell n} \left|D^\ell h_\varepsilon(z_n)\, (\delta z_n)^\ell\right| \le \left(\sup_{z\in E} \left|D^\ell h_\varepsilon(z)\right|\right) \left|\underline{\delta z}\right|_k^\ell \;,$$

dont la seconde partie garantira comme précédemment (iv) pour $m = \ell\delta^k$. Pour achever de prouver (i), il suffit donc de montrer que

$$F_k(\underline{z} + \underline{\delta z}) - F_k(\underline{z}) - \sum_{\ell=1}^{\left[\frac{r}{k}\right]} \frac{1}{\ell!} F^{\ell\delta^k}(\underline{z})\underline{\delta z}^\ell = \overline{\mathbf{O}}\left(\left|\underline{\delta z}\right|_k^{\frac{r+\alpha}{k}}\right),$$

ce qui résulte de l'inégalité

$$a^{(r+\alpha)n}\left|h_\varepsilon(z_n + \delta z_n) - h_\varepsilon(z_n) - \sum_{\ell=1}^{\left[\frac{r}{k}\right]} \frac{1}{\ell!} D^\ell h_\varepsilon(z_n)\delta z_n^\ell\right| =$$

$$= a^{(r+\alpha)n}\left| \int_0^1 \frac{(1-t)^{\left[\frac{r}{k}\right]-1}}{(\left[\frac{r}{k}\right]-1)!} \left(D^{\left[\frac{r}{k}\right]} h_\varepsilon(z_n + t\delta z_n) - D^{\left[\frac{r}{k}\right]} h_\varepsilon(z_n)\right) \delta z_n^{\left[\frac{r}{k}\right]}\, dt\right| \le C_{\varepsilon,\alpha,k} \left|\underline{\delta z}\right|_k^{\frac{r+\alpha}{k}} \;,$$

où $C_{\varepsilon,\alpha,k}$ est la constante de Hölder de $D^{\left[\frac{r}{k}\right]}h_\varepsilon$ pour l'exposant $\frac{r+\alpha}{k}-\left[\frac{r}{k}\right]$ (lequel est ≤ 1 car il ne peut y avoir d'entier ℓ vérifiant $\frac{r+\alpha}{k}>\ell>\left[\frac{r}{k}\right]$, l'inégalité $k\ell<r+\alpha$ étant équivalente à $k\ell\leq r$). Nous avons donc établi (i), ainsi que (iv) pour les $m\in\mathbf{N}^r$ de la forme $\ell\delta^k$.

La vérification de (iii)–(iv) en général, tout à fait semblable, est laissée au lecteur. Bornons-nous à indiquer l'expression de F^m pour $|m|>1$: quels que soient $\underline{\delta z}^1\in\tilde{X}_1,\ldots,\underline{\delta z}^r\in\tilde{X}_r$ et $\underline{z}\in\tilde{X}_{\kappa_m}$,

$$F^m(\underline{z})\left(\underline{\delta z}^1\right)^{m_1}\cdots\left(\underline{\delta z}^r\right)^{m_r}=\left(-D^{|m|}h_\varepsilon(z_{n+1})\left(\delta z^1_{n+1}\right)^{m_1}\cdots\left(\delta z^r_{n+1}\right)^{m_r}\right)_{n\in\mathbf{N}},$$

ce qui implique en particulier très facilement (iv). •

Remarque. Pour $\varepsilon>0$ assez petit, les hypothèses du théorème 1 sont satisfaites non seulement près de 0 mais au voisinage de tout point du graphe de φ, laquelle est donc $C^{r,\alpha}$.

Nous avons maintenant démontré la plus grande partie du théorème 2 : puisque l'ensemble des $\underline{z}\in\Lambda\times X$ vérifiant (5) est le graphe de φ, l'ensemble h_ε–invariant V_ε des z_0 correspondants est le graphe de la composante ψ_ε de φ suivant le facteur y_0 ; il résulte donc du lemme 2 que le germe h–invariant V de V_ε en 0 est un germe de sous-variété $C^{r,\alpha}$. Il ne nous reste plus qu'à établir que $T_0V=I$, c'est-à-dire le

LEMME 3. – *On a* $D\psi_\varepsilon(0)=0$.

Preuve. L'identité $DF(0)(\delta\lambda,D\varphi(0)\delta\lambda)\equiv 0$ s'écrit, en posant $(\delta\lambda,D\varphi(0)\delta\lambda)=\underline{\delta z}$,

$$\text{(13)}\qquad\begin{cases}\delta\lambda=A\,\delta x_1\\ \delta x_n=A\,\delta x_{n+1}\quad,\quad n>0\\ \delta y_n=B\,\delta y_{n+1}\quad,\quad n\in\mathbf{N}\,.\end{cases}$$

Pour voir que (13) implique $\underline{\delta y}=0$ (d'où le lemme), il suffit de remarquer que la condition imposée à $\underline{\delta y}$ s'écrit $\mathcal{B}_{r+\alpha}\,\underline{\delta y}=0$, où $\mathcal{B}_{r+\alpha}$ est l'automorphisme introduit dans la preuve du lemme 1. •

RÉFÉRENCE

[1] R. de la Llave, C. E. Wayne, *On Irwin's proof of the pseudostable manifold theorem*, Mathematische Zeitschrift **219** (1995), 301-321.