Spetses pour les groupes primitifs

Jean Michel
(travail commun avec Michel Broué et Gunter Malle)

Université Paris VII

Le 21 décembre 2006

Spetses

Spetses est un projet commun de Michel Broué, Gunter Malle, J. M., que nous avons démarré lors d'une conférence sur l'île de Spetses (Grèce) en août 1993.

Caractères unipotents de $G_2(\mathbb{F}_q)$

Caractère	Degré	Degré fantôme	Valeur propre	Famille
$\phi_{1,0}$	1	1	1	C_1
$\phi_{1,6}$	q^6	q^6	1	C_1
$\phi_{2,1}$	$\frac{1}{6}q\Phi_2^2\Phi_3$	$q\Phi_8$	1	$\mathfrak{S}_3.(1,1)$
$\phi_{2,2}$	$\frac{1}{2}q\Phi_2^2\Phi_6$	$q^2\Phi_4$	1	$\mathfrak{S}_3.(g_2,1)$
$\phi'_{1,3}$	$\frac{1}{3}q\Phi_3\Phi_6$	q^3	1	$\mathfrak{S}_3.(g_3,1)$
$\phi''_{1,3}$	$\frac{1}{3}q\Phi_3\Phi_6$	q^3	1	$\mathfrak{S}_3.(1,\rho)$
$G_2[1]$	$\frac{1}{6}q\Phi_1^2\Phi_6$	0	1	$\mathfrak{S}_3.(1,\varepsilon)$
$G_2[-1]$	$\frac{1}{2}q\Phi_1^2\Phi_3$	0	-1	$\mathfrak{S}_3.(g_2,\varepsilon)$
$G_2[\zeta_3]$	$\frac{1}{3}q\Phi_1^2\Phi_2^2$	0	ζ_3	$\mathfrak{S}_3.(g_3,\zeta_3)$
$G_2[\zeta_3^2]$	$\frac{1}{3}q\Phi_1^2\Phi_2^2$	0	ζ_3^2	$\mathfrak{S}_3.(g_3,\zeta_3^2)$

Caractères unipotents de G_4

$③—③$

Caractère	Degré	Fantôme	Valeur propre	Famille
$\phi_{1,0}$	1	1	1	C_1
$\phi_{2,1}$	$\frac{3-\sqrt{-3}}{6}q\Phi'_3\Phi_4\Phi''_6$	$q\Phi_4$	1	$R(\mathbb{Z}/3)^{\wedge 2}.01$
$\phi_{2,3}$	$\frac{3+\sqrt{-3}}{6}q\Phi''_3\Phi_4\Phi'_6$	$q^3\Phi_4$	1	$R(\mathbb{Z}/3)^{\wedge 2}.02$
$Z_3 : 2$	$\frac{\sqrt{-3}}{3}q\Phi_1\Phi_2\Phi_4$	0	ζ_3^2	$R(\mathbb{Z}/3)^{\wedge 2}.12$
$\phi_{3,2}$	$q^2\Phi_3\Phi_6$	$q^2\Phi_3\Phi_6$	1	C_1
$\phi_{1,4}$	$\frac{-\sqrt{-3}}{6}q^4\Phi''_3\Phi_4\Phi''_6$	q^4	1	$R(\mathbb{Z}/6)^{\wedge 2}_{(5)}.01$
$\phi_{1,8}$	$\frac{\sqrt{-3}}{6}q^4\Phi'_3\Phi_4\Phi'_6$	q^8	1	$R(\mathbb{Z}/6)^{\wedge 2}_{(5)}.34$
$\phi_{2,5}$	$\frac{1}{2}q^4\Phi_2^2\Phi_6$	$q^5\Phi_4$	1	$R(\mathbb{Z}/6)^{\wedge 2}_{(5)}.04$
$Z_3 : 11$	$\frac{\sqrt{-3}}{3}q^4\Phi_1\Phi_2\Phi_4$	0	ζ_3^2	$R(\mathbb{Z}/6)^{\wedge 2}_{(5)}.25$
G_4	$\frac{1}{2}q^4\Phi_1^2\Phi_3$	0	-1	$R(\mathbb{Z}/6)^{\wedge 2}_{(5)}.13$

Φ'_3, Φ''_3 (resp. Φ'_6, Φ''_6) sont facteurs de Φ_3 (resp. Φ_6) dans $\mathbb{Q}(\zeta_3)$.

Groupes réductifs finis

Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique réductif sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, et soit F une isogénie telle que $\mathbf{G}^F$ soit fini (c'est alors un groupe fini de type de Lie). On définit q par le fait qu'une puissance F^δ correspond à une $\mathbb{F}_{q^\delta}$-structure sur $\mathbf{G}$.

Groupes réductifs finis

Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique réductif sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, et soit F une isogénie telle que $\mathbf{G}^F$ soit fini (c'est alors un groupe fini de type de Lie). On définit q par le fait qu'une puissance F^δ correspond à une $\mathbb{F}_{q^\delta}$-structure sur $\mathbf{G}$.
Les $\mathbf{G}^F$-classes de conjugaison de tores maximaux sont paramétrées par les F-classes $H^1(F, W)$ du groupe de Weyl W. Soit $\mathbf{T}_w$ le tore correspondant à la classe de $w \in W$.

Groupes réductifs finis

Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique réductif sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, et soit F une isogénie telle que $\mathbf{G}^F$ soit fini (c'est alors un groupe fini de type de Lie). On définit q par le fait qu'une puissance F^δ correspond à une $\mathbb{F}_{q^\delta}$-structure sur $\mathbf{G}$.
Les $\mathbf{G}^F$-classes de conjugaison de tores maximaux sont paramétrées par les F-classes $H^1(F, W)$ du groupe de Weyl W. Soit $\mathbf{T}_w$ le tore correspondant à la classe de $w \in W$.
Deligne et Lusztig ont défini des caractères virtuels $R_w := R_{\mathbf{T}_w}^{\mathbf{G}}(\mathrm{Id})$ où $R_w(g) = \sum_i (-1)^i \operatorname{Trace}(g \mid H_c^i(\mathbf{X}_w, \mathbb{Q}_\ell))$.

Groupes réductifs finis

Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique réductif sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, et soit F une isogénie telle que $\mathbf{G}^F$ soit fini (c'est alors un groupe fini de type de Lie). On définit q par le fait qu'une puissance F^δ correspond à une $\mathbb{F}_{q^\delta}$-structure sur $\mathbf{G}$.
Les $\mathbf{G}^F$-classes de conjugaison de tores maximaux sont paramétrées par les F-classes $H^1(F, W)$ du groupe de Weyl W. Soit $\mathbf{T}_w$ le tore correspondant à la classe de $w \in W$.
Deligne et Lusztig ont défini des caractères virtuels $R_w := R_{\mathbf{T}_w}^{\mathbf{G}}(\mathrm{Id})$ où $R_w(g) = \sum_i (-1)^i \operatorname{Trace}(g \mid H_c^i(\mathbf{X}_w, \mathbb{Q}_\ell))$.

- Les *Caractères unipotents* sont l'ensemble $\mathcal{U}(\mathbf{G}^F) :=\{$constituants irréductibles de $R_w\}$

Groupes réductifs finis

Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique réductif sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, et soit F une isogénie telle que $\mathbf{G}^F$ soit fini (c'est alors un groupe fini de type de Lie). On définit q par le fait qu'une puissance F^δ correspond à une $\mathbb{F}_{q^\delta}$-structure sur $\mathbf{G}$.
Les $\mathbf{G}^F$-classes de conjugaison de tores maximaux sont paramétrées par les F-classes $H^1(F, W)$ du groupe de Weyl W. Soit $\mathbf{T}_w$ le tore correspondant à la classe de $w \in W$.
Deligne et Lusztig ont défini des caractères virtuels $R_w := R_{\mathbf{T}_w}^{\mathbf{G}}(\mathrm{Id})$ où $R_w(g) = \sum_i (-1)^i \operatorname{Trace}(g \mid H_c^i(\mathbf{X}_w, \mathbb{Q}_\ell))$.

- Les *Caractères unipotents* sont l'ensemble $\mathcal{U}(\mathbf{G}^F) :=\{$constituants irréductibles de $R_w\}$
- Lusztig a montré que $|\mathcal{U}(\mathbf{G}^F)|$ ne dépend que du type de $(\mathbf{G}, F)$ et pas de q.

Groupes réductifs finis

Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique réductif sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, et soit F une isogénie telle que $\mathbf{G}^F$ soit fini (c'est alors un groupe fini de type de Lie). On définit q par le fait qu'une puissance F^δ correspond à une $\mathbb{F}_{q^\delta}$-structure sur $\mathbf{G}$.
Les $\mathbf{G}^F$-classes de conjugaison de tores maximaux sont paramétrées par les F-classes $H^1(F, W)$ du groupe de Weyl W. Soit $\mathbf{T}_w$ le tore correspondant à la classe de $w \in W$.
Deligne et Lusztig ont défini des caractères virtuels $R_w := R_{\mathbf{T}_w}^{\mathbf{G}}(\mathrm{Id})$ où $R_w(g) = \sum_i (-1)^i \operatorname{Trace}(g \mid H_c^i(\mathbf{X}_w, \mathbb{Q}_\ell))$.

- Les *Caractères unipotents* sont l'ensemble $\mathcal{U}(\mathbf{G}^F)$:={constituants irréductibles de R_w}
- Lusztig a montré que $|\mathcal{U}(\mathbf{G}^F)|$ ne dépend que du type de $(\mathbf{G}, F)$ et pas de q.
- De plus le degré de $\rho \in \mathcal{U}(\mathbf{G}^F)$ est donné par un polynôme $\operatorname{Deg}(\rho) \in \mathbb{Q}[q]$.

Donnée de réflexion

Soit $\mathbf{T}$ un tore maximal F-stable de $\mathbf{G}$, soient $W = N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})/\mathbf{T}$, $X(\mathbf{T}) := \mathrm{Hom}(\mathbf{T}, \overline{\mathbb{F}}_q^\times)$ et $Y(\mathbf{T}) := \mathrm{Hom}(\overline{\mathbb{F}}_q^\times, \mathbf{T})$. Soient $\Phi \subset X(\mathbf{T})$ (resp. $\Phi^\vee \subset Y(\mathbf{T})$) les racines (resp. coracines) de $\mathbf{G}$ par rapport à $\mathbf{T}$.

Donnée de réflexion

Soit $\mathbf{T}$ un tore maximal F-stable de $\mathbf{G}$, soient $W = N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})/\mathbf{T}$, $X(\mathbf{T}) := \mathrm{Hom}(\mathbf{T}, \overline{\mathbb{F}}_q^\times)$ et $Y(\mathbf{T}) := \mathrm{Hom}(\overline{\mathbb{F}}_q^\times, \mathbf{T})$. Soient $\Phi \subset X(\mathbf{T})$ (resp. $\Phi^\vee \subset Y(\mathbf{T})$) les racines (resp. coracines) de $\mathbf{G}$ par rapport à $\mathbf{T}$.

- Le théorème des isogénies dit $(\mathbf{G}, F)$ est déterminé à isomorphisme près par $(X(\mathbf{T}), Y(\mathbf{T}), \Phi, \Phi^\vee, \phi, q)$ où ϕ est un élément d'ordre fini de $N_{\mathrm{GL}(X(\mathbf{T}))}(W)$ tel que $F = q\phi$ [quand $\mathbf{G}$ est déployé alors $\phi = \mathrm{Id}$].

Donnée de réflexion

Soit $\mathbf{T}$ un tore maximal F-stable de $\mathbf{G}$, soient $W = N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})/\mathbf{T}$, $X(\mathbf{T}) := \mathrm{Hom}(\mathbf{T}, \overline{\mathbb{F}}_q^\times)$ et $Y(\mathbf{T}) := \mathrm{Hom}(\overline{\mathbb{F}}_q^\times, \mathbf{T})$. Soient $\Phi \subset X(\mathbf{T})$ (resp. $\Phi^\vee \subset Y(\mathbf{T})$) les racines (resp. coracines) de $\mathbf{G}$ par rapport à $\mathbf{T}$.

- Le théorème des isogénies dit $(\mathbf{G}, F)$ est déterminé à isomorphisme près par $(X(\mathbf{T}), Y(\mathbf{T}), \Phi, \Phi^\vee, \phi, q)$ où ϕ est un élément d'ordre fini de $N_{\mathrm{GL}(X(\mathbf{T}))}(W)$ tel que $F = q\phi$ [quand $\mathbf{G}$ est déployé alors $\phi = \mathrm{Id}$].
- Soit $V = X(\mathbf{T}) \otimes \mathbb{C}$. Lusztig a montré que $\mathcal{U}(\mathbf{G}^F)$ et $\mathrm{Deg}(\rho)$ pour $\rho \in \mathcal{U}(\mathbf{G}^F)$ ne dépendent que de la donnée à isomorphisme près de $W \subset \mathrm{GL}(V)$ et $\phi \in N_{\mathrm{GL}(V)}(W)$ (en particulier on trouve les mêmes polynômes pour des groupes de type B_n ou C_n).

Donnée de réflexion

Soit $\mathbf{T}$ un tore maximal F-stable de $\mathbf{G}$, soient $W = N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})/\mathbf{T}$, $X(\mathbf{T}) := \mathrm{Hom}(\mathbf{T}, \overline{\mathbb{F}}_q^\times)$ et $Y(\mathbf{T}) := \mathrm{Hom}(\overline{\mathbb{F}}_q^\times, \mathbf{T})$. Soient $\Phi \subset X(\mathbf{T})$ (resp. $\Phi^\vee \subset Y(\mathbf{T})$) les racines (resp. coracines) de $\mathbf{G}$ par rapport à $\mathbf{T}$.

- Le théorème des isogénies dit $(\mathbf{G}, F)$ est déterminé à isomorphisme près par $(X(\mathbf{T}), Y(\mathbf{T}), \Phi, \Phi^\vee, \phi, q)$ où ϕ est un élément d'ordre fini de $N_{\mathrm{GL}(X(\mathbf{T}))}(W)$ tel que $F = q\phi$ [quand $\mathbf{G}$ est déployé alors $\phi = \mathrm{Id}$].
- Soit $V = X(\mathbf{T}) \otimes \mathbb{C}$. Lusztig a montré que $\mathcal{U}(\mathbf{G}^F)$ et $\mathrm{Deg}(\rho)$ pour $\rho \in \mathcal{U}(\mathbf{G}^F)$ ne dépendent que de la donnée à isomorphisme près de $W \subset \mathrm{GL}(V)$ et $\phi \in N_{\mathrm{GL}(V)}(W)$ (en particulier on trouve les mêmes polynômes pour des groupes de type B_n ou C_n).
- N.B. L'existence de ϕ dépend de p (il faut $p = 2, 2, 3$ pour ${}^2B_2, {}^2F_4, {}^2G_2$).

Caractères fantômes

Pour $\chi \in \mathrm{Irr}(W.F)$ on définit le *caractère fantôme* $R_\chi := \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \chi(wF) R_w$.

Caractères fantômes

Pour $\chi \in \mathrm{Irr}(W.F)$ on définit le *caractère fantôme* $R_\chi := \frac{1}{|W|}\sum_{w\in W}\chi(wF)R_w$.

- Si $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$ les R_χ sont les caractères unipotents. Mais en général $|\mathcal{U}(\mathbf{G}^F)| > |\mathrm{Irr}(W)|$. Les R_χ sont de norme 1 et $\mathbb{Q}$-combinaison linéaire de caractères unipotents.

Caractères fantômes

Pour $\chi \in \mathrm{Irr}(W.F)$ on définit le *caractère fantôme* $R_\chi := \frac{1}{|W|}\sum_{w\in W}\chi(wF)R_w$.

- Si $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$ les R_χ sont les caractères unipotents. Mais en général $|\mathcal{U}(\mathbf{G}^F)| > |\mathrm{Irr}(W)|$. Les R_χ sont de norme 1 et $\mathbb{Q}$-combinaison linéaire de caractères unipotents.
- Définissons une relation d'équivalence sur $\mathcal{U}(\mathbf{G}^F)$ par $\rho \sim \rho' \Leftrightarrow \rho$ et ρ' interviennent dans le même R_χ. Les classes d'équivalence sont les *familles de Lusztig* de caractères unipotents.

Caractères fantômes

Pour $\chi \in \mathrm{Irr}(W.F)$ on définit le *caractère fantôme* $R_\chi := \frac{1}{|W|}\sum_{w\in W}\chi(wF)R_w$.

- Si $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$ les R_χ sont les caractères unipotents. Mais en général $|\mathcal{U}(\mathbf{G}^F)| > |\,\mathrm{Irr}(W)|$. Les R_χ sont de norme 1 et $\mathbb{Q}$-combinaison linéaire de caractères unipotents.
- Définissons une relation d'équivalence sur $\mathcal{U}(\mathbf{G}^F)$ par $\rho \sim \rho' \Leftrightarrow \rho$ et ρ' interviennent dans le même R_χ. Les classes d'équivalence sont les *familles de Lusztig* de caractères unipotents.
- Nous voudrions dire que la matrice de décomposition des R_χ sur les caractères unipotents est "bloc-diagonale, avec des petits blocs".

Caractères fantômes

Pour $\chi \in \mathrm{Irr}(W.F)$ on définit le *caractère fantôme* $R_\chi := \frac{1}{|W|}\sum_{w\in W}\chi(wF)R_w$.

- Si $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$ les R_χ sont les caractères unipotents. Mais en général $|\mathcal{U}(\mathbf{G}^F)| > |\mathrm{Irr}(W)|$. Les R_χ sont de norme 1 et $\mathbb{Q}$-combinaison linéaire de caractères unipotents.
- Définissons une relation d'équivalence sur $\mathcal{U}(\mathbf{G}^F)$ par $\rho \sim \rho' \Leftrightarrow \rho$ et ρ' interviennent dans le même R_χ. Les classes d'équivalence sont les *familles de Lusztig* de caractères unipotents.
- Nous voudrions dire que la matrice de décomposition des R_χ sur les caractères unipotents est "bloc-diagonale, avec des petits blocs". Mais nous devons d'abord la rendre carrée.

Faisceaux-caractère, matrice de Fourier

Faisceaux-caractère, matrice de Fourier

- Lusztig a défini une base des fonctions centrales, dont une partie engendre l'espace des caractères unipotents $\overline{\mathbb{Q}}_\ell\mathcal{U}(\mathbf{G}^F)$. Ce sont les *fonctions caractéristiques des faisceaux-caractère*.

Faisceaux-caractère, matrice de Fourier

- Lusztig a défini une base des fonctions centrales, dont une partie engendre l'espace des caractères unipotents $\overline{\mathbb{Q}}_\ell\mathcal{U}(\mathbf{G}^F)$. Ce sont les *fonctions caractéristiques des faisceaux-caractère*.
  Les R_χ sont une partie de cette base.

Faisceaux-caractère, matrice de Fourier

- Lusztig a défini une base des fonctions centrales, dont une partie engendre l'espace des caractères unipotents $\overline{\mathbb{Q}}_\ell\mathcal{U}(\mathbf{G}^F)$. Ce sont les *fonctions caractéristiques des faisceaux-caractère*.
  Les R_χ sont une partie de cette base.
- On appelle *matrice de Fourier* la matrice $S =$ matrice de décomposition des faisceaux-caractère sur les caractères unipotents.

Faisceaux-caractère, matrice de Fourier

- Lusztig a défini une base des fonctions centrales, dont une partie engendre l'espace des caractères unipotents $\overline{\mathbb{Q}}_\ell\mathcal{U}(\mathbf{G}^F)$. Ce sont les *fonctions caractéristiques des faisceaux-caractère*.
  Les R_χ sont une partie de cette base.
- On appelle *matrice de Fourier* la matrice $S =$ matrice de décomposition des faisceaux-caractère sur les caractères unipotents.
- Les familles sont les blocs de S (on a ainsi des familles de caractères unipotents, et des familles de caractères de W).

Matrice de Fourier de Lusztig pour G_2

			$(1,1)$	$(g_2,1)$	$(g_3,1)$	$(1,\rho)$	$(1,\varepsilon)$	(g_2,ε)	(g_3,ζ_3)	(g_3,ζ_3^2)
	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$(1,1)$	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$(g_2,1)$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0
$(g_3,1)$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$(1,\rho)$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$(1,\varepsilon)$	0	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
(g_2,ε)	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
(g_3,ζ_3)	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
(g_3,ζ_3^2)	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Matrice de Fourier de Lusztig pour G_2

			$(1,1)$	$(g_2,1)$	$(g_3,1)$	$(1,\rho)$	$(1,\varepsilon)$	(g_2,ε)	(g_3,ζ_3)	(g_3,ζ_3^2)
	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
$(1,1)$	.	.	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$(g_2,1)$	.	.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	.	.	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	.	.
$(g_3,1)$	.	.	$\frac{1}{3}$	.	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	.	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$(1,\rho)$	.	.	$\frac{1}{3}$	.	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	.	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$(1,\varepsilon)$	.	.	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
(g_2,ε)	.	.	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	.	.	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	.	.
(g_3,ζ_3)	.	.	$\frac{1}{3}$	.	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	.	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
(g_3,ζ_3^2)	.	.	$\frac{1}{3}$	.	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	.	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Matrice de Fourier de Lusztig pour G_4

		01	02	12		01	34	04	25	13
	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
01	.	$\frac{3-\sqrt{-3}}{6}$	$\frac{3+\sqrt{-3}}{6}$	$\frac{\sqrt{-3}}{3}$	.	.	.	.	.	.
02	.	$\frac{3+\sqrt{-3}}{6}$	$\frac{3-\sqrt{-3}}{6}$	$-\frac{\sqrt{-3}}{3}$	.	.	.	.	.	.
12	.	$\frac{\sqrt{-3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{-3}}{3}$	$\frac{\sqrt{-3}}{3}$	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
01	.	.	.	.	.	$-\frac{\sqrt{-3}}{6}$	$\frac{\sqrt{-3}}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{-3}}{3}$	$\frac{1}{2}$
34	.	.	.	.	.	$\frac{\sqrt{-3}}{6}$	$-\frac{\sqrt{-3}}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{-3}}{3}$	$\frac{1}{2}$
04	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	.	$-\frac{1}{2}$
25	.	.	.	.	.	$\frac{\sqrt{-3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{-3}}{3}$	.	$\frac{\sqrt{-3}}{3}$	.
13	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	.	$\frac{1}{2}$

Séries de Harish-Chandra

Si $\mathbf{L}$ est un sous-groupe de Levi F-stable d'un sous-groupe parabolique F-stable $\mathbf{P}$ on définit *l'induction de Harish-Chandra* $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} = \mathrm{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F} \circ \mathrm{Inf}_{\mathbf{L}^F}^{\mathbf{P}^F}$.

Séries de Harish-Chandra

Si $\mathbf{L}$ est un sous-groupe de Levi F-stable d'un sous-groupe parabolique F-stable $\mathbf{P}$ on définit *l'induction de Harish-Chandra* $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} = \mathrm{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F} \circ \mathrm{Inf}_{\mathbf{L}^F}^{\mathbf{P}^F}$.

- Un caractère irréductible est *cuspidal* s'il n'est composante d'aucun induit de Harish-Chandra propre.

Séries de Harish-Chandra

Si $\mathbf{L}$ est un sous-groupe de Levi F-stable d'un sous-groupe parabolique F-stable $\mathbf{P}$ on définit *l'induction de Harish-Chandra* $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} = \mathrm{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F} \circ \mathrm{Inf}_{\mathbf{L}^F}^{\mathbf{P}^F}$.

- Un caractère irréductible est *cuspidal* s'il n'est composante d'aucun induit de Harish-Chandra propre.
- Si $\lambda \in \mathcal{U}(\mathbf{L}^F)$ est cuspidal, alors $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \lambda) := N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)/\mathbf{L}^F$ est un groupe de Coxeter et $\mathrm{End}_{\mathbf{G}^F}(R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda))$ est une algèbre de Hecke pour $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \lambda)$.

Séries de Harish-Chandra

Si $\mathbf{L}$ est un sous-groupe de Levi F-stable d'un sous-groupe parabolique F-stable $\mathbf{P}$ on définit *l'induction de Harish-Chandra* $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} = \mathrm{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F} \circ \mathrm{Inf}_{\mathbf{L}^F}^{\mathbf{P}^F}$.

- Un caractère irréductible est *cuspidal* s'il n'est composante d'aucun induit de Harish-Chandra propre.
- Si $\lambda \in \mathcal{U}(\mathbf{L}^F)$ est cuspidal, alors $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \lambda) := N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)/\mathbf{L}^F$ est un groupe de Coxeter et $\mathrm{End}_{\mathbf{G}^F}(R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda))$ est une algèbre de Hecke pour $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \lambda)$. [Les paramètres de cette algèbre de Hecke sont des puissances de q qui peuvent être différents pour des réflexions non-conjuguées].

Séries de Harish-Chandra

Si $\mathbf{L}$ est un sous-groupe de Levi F-stable d'un sous-groupe parabolique F-stable $\mathbf{P}$ on définit *l'induction de Harish-Chandra* $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} = \mathrm{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F} \circ \mathrm{Inf}_{\mathbf{L}^F}^{\mathbf{P}^F}$.

- Un caractère irréductible est *cuspidal* s'il n'est composante d'aucun induit de Harish-Chandra propre.
- Si $\lambda \in \mathcal{U}(\mathbf{L}^F)$ est cuspidal, alors $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \lambda) := N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)/\mathbf{L}^F$ est un groupe de Coxeter et $\mathrm{End}_{\mathbf{G}^F}(R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda))$ est une algèbre de Hecke pour $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \lambda)$. [Les paramètres de cette algèbre de Hecke sont des puissances de q qui peuvent être différents pour des réflexions non-conjuguées].

Donc les composantes de $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda)$ sont paramétrées par des triplets $(\mathbf{L}, \lambda, \chi)$ où $\chi \in \mathrm{Irr}(W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \lambda))$.

Séries de Harish-Chandra

Si $\mathbf{L}$ est un sous-groupe de Levi F-stable d'un sous-groupe parabolique F-stable $\mathbf{P}$ on définit *l'induction de Harish-Chandra* $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} = \mathrm{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F} \circ \mathrm{Inf}_{\mathbf{L}^F}^{\mathbf{P}^F}$.

- Un caractère irréductible est *cuspidal* s'il n'est composante d'aucun induit de Harish-Chandra propre.
- Si $\lambda \in \mathcal{U}(\mathbf{L}^F)$ est cuspidal, alors $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \lambda) := N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)/\mathbf{L}^F$ est un groupe de Coxeter et $\mathrm{End}_{\mathbf{G}^F}(R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda))$ est une algèbre de Hecke pour $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \lambda)$. [Les paramètres de cette algèbre de Hecke sont des puissances de q qui peuvent être différents pour des réflexions non-conjuguées].

Donc les composantes de $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda)$ sont paramétrées par des triplets $(\mathbf{L}, \lambda, \chi)$ où $\chi \in \mathrm{Irr}(W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \lambda))$.

- Chaque caractère de $\mathcal{U}(\mathbf{G}^F)$ possède une seule telle *donnée cuspidale* à $\mathbf{G}^F$-conjugaison près.

Série principale

- Dans le cas où **L** est un tore maximal inclus dans un sous groupe de Borel rationnel, et où $\lambda = \mathrm{Id}$, on trouve la *série principale*.

Série principale

- Dans le cas où $\mathbf{L}$ est un tore maximal inclus dans un sous groupe de Borel rationnel, et où $\lambda = \mathrm{Id}$, on trouve la *série principale*.
- Ses éléments sont les constituants de $\mathrm{Ind}_{\mathbf{B}^F}^{\mathbf{G}^F}\mathrm{Id}$.

Série principale

- Dans le cas où $\mathbf{L}$ est un tore maximal inclus dans un sous groupe de Borel rationnel, et où $\lambda = \mathrm{Id}$, on trouve la *série principale*.
- Ses éléments sont les constituants de $\mathrm{Ind}_{\mathbf{B}^F}^{\mathbf{G}^F} \mathrm{Id}$.
- Si $(\mathbf{G}, F)$ est déployé, elle est paramétrée par $\mathrm{Irr}(W)$.

Série principale

- Dans le cas où $\mathbf{L}$ est un tore maximal inclus dans un sous groupe de Borel rationnel, et où $\lambda = \mathrm{Id}$, on trouve la *série principale*.
- Ses éléments sont les constituants de $\mathrm{Ind}_{\mathbf{B}^F}^{\mathbf{G}^F} \mathrm{Id}$.
- Si $(\mathbf{G}, F)$ est déployé, elle est paramétrée par $\mathrm{Irr}(W)$.
- Les degrés des caractères de la série principale sont les degrés génériques des caractères de l'algèbre de Hecke.

Série principale

- Dans le cas où $\mathbf{L}$ est un tore maximal inclus dans un sous groupe de Borel rationnel, et où $\lambda = \mathrm{Id}$, on trouve la *série principale*.
- Ses éléments sont les constituants de $\mathrm{Ind}_{\mathbf{B}^F}^{\mathbf{G}^F} \mathrm{Id}$.
- Si $(\mathbf{G}, F)$ est déployé, elle est paramétrée par $\mathrm{Irr}(W)$.
- Les degrés des caractères de la série principale sont les degrés génériques des caractères de l'algèbre de Hecke.

(Pour $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$, les caractères unipotents coïncident avec la série principale et les R_χ).

Degrés

Les *degrés fantômes* sont les degrés des R_χ : on peut les calculer à partir de $V = X(\mathbf{T}) \otimes \mathbb{C}$, sur lequel $F = q\phi$; ce sont la trace graduée de ϕ sur la composante χ-isotypique de l'algèbre des coinvariants de W, évaluée en q. Ce sont donc la valeur en q de polynômes à coefficients entiers indépendants de q.

Degrés

Les *degrés fantômes* sont les degrés des R_χ : on peut les calculer à partir de $V = X(\mathbf{T}) \otimes \mathbb{C}$, sur lequel $F = q\phi$; ce sont la trace graduée de ϕ sur la composante χ-isotypique de l'algèbre des coinvariants de W, évaluée en q. Ce sont donc la valeur en q de polynômes à coefficients entiers indépendants de q.

- La matrice de Fourier est indépendante de q ; on retrouve que les degrés unipotents sont valeurs en q de polynômes de $\mathbb{Q}[q]$ indépendants de q.

Degrés

Les *degrés fantômes* sont les degrés des R_χ : on peut les calculer à partir de $V = X(\mathbf{T}) \otimes \mathbb{C}$, sur lequel $F = q\phi$; ce sont la trace graduée de ϕ sur la composante χ-isotypique de l'algèbre des coinvariants de W, évaluée en q. Ce sont donc la valeur en q de polynômes à coefficients entiers indépendants de q.

- La matrice de Fourier est indépendante de q ; on retrouve que les degrés unipotents sont valeurs en q de polynômes de $\mathbb{Q}[q]$ indépendants de q.
- On peut aussi retrouver les degrés unipotents des composantes de $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda)$ comme "degrés génériques" pour l'algèbre de Hecke $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \lambda)$.

Valeurs propres du Frobenius

Chaque $H^i_c(\mathbf{X}_w, \mathbb{Q}_\ell))$ est un $\mathbf{G}^F \times <F>$-module.

Valeurs propres du Frobenius

Chaque $H^i_c(\mathbf{X}_w, \mathbb{Q}_\ell))$ est un $\mathbf{G}^F \times <F>$-module.

- Pour $\rho \in \mathcal{U}(\mathbf{G}^F)$, les valeurs propres de F sur la composante ρ-isotypique de $H^i_c(\mathbf{X}_w, \mathbb{Q}_\ell))$ sont de la forme $q^{a/2}\lambda_\rho$, où $a \in \mathbb{N}$ et où λ_ρ est une racine de l'unité indépendante de i ou w.

Valeurs propres du Frobenius

Chaque $H^i_c(\mathbf{X}_w, \mathbb{Q}_\ell))$ est un $\mathbf{G}^F \times <F>$-module.

- Pour $\rho \in \mathcal{U}(\mathbf{G}^F)$, les valeurs propres de F sur la composante ρ-isotypique de $H^i_c(\mathbf{X}_w, \mathbb{Q}_\ell))$ sont de la forme $q^{a/2}\lambda_\rho$, où $a \in \mathbb{N}$ et où λ_ρ est une racine de l'unité indépendante de i ou w.
- λ_ρ est appelée la *valeur propre du Frobenius* attachée à ρ.

Valeurs propres du Frobenius

Chaque $H^i_c(\mathbf{X}_w, \mathbb{Q}_\ell))$ est un $\mathbf{G}^F \times <F>$-module.

- Pour $\rho \in \mathcal{U}(\mathbf{G}^F)$, les valeurs propres de F sur la composante ρ-isotypique de $H^i_c(\mathbf{X}_w, \mathbb{Q}_\ell))$ sont de la forme $q^{a/2}\lambda_\rho$, où $a \in \mathbb{N}$ et où λ_ρ est une racine de l'unité indépendante de i ou w.
- λ_ρ est appelée la *valeur propre du Frobenius* attachée à ρ.
- La matrice S et la matrice Ω diagonale contenant les valeurs propres du Frobenius vérifient les relations $S^2 = 1$ et $(S\Omega)^3 = 1$ (si $(\mathbf{G}, F)$ est déployé) donc forment une représentation de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Valeurs propres du Frobenius

Chaque $H^i_c(\mathbf{X}_w, \mathbb{Q}_\ell))$ est un $\mathbf{G}^F \times <F>$-module.

- Pour $\rho \in \mathcal{U}(\mathbf{G}^F)$, les valeurs propres de F sur la composante ρ-isotypique de $H^i_c(\mathbf{X}_w, \mathbb{Q}_\ell))$ sont de la forme $q^{a/2}\lambda_\rho$, où $a \in \mathbb{N}$ et où λ_ρ est une racine de l'unité indépendante de i ou w.
- λ_ρ est appelée la *valeur propre du Frobenius* attachée à ρ.
- La matrice S et la matrice Ω diagonale contenant les valeurs propres du Frobenius vérifient les relations $S^2 = 1$ et $(S\Omega)^3 = 1$ (si $(\mathbf{G}, F)$ est déployé) donc forment une représentation de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
- Les familles rencontrées dans les groupes réductifs sont associées au double quantique des groupes $\mathfrak{S}_n, n = 1 \ldots 5$ ou $(\mathbb{Z}/2)^n$. Les matrices de Fourier sont les "tables de caractères normalisées" de ce double quantique.

Caractères unipotents de $G_2(\mathbb{F}_q)$

Caractère	Degré	Degré fantôme	Valeur propre	Famille
$\phi_{1,0}$	1	1	1	C_1
$\phi_{1,6}$	q^6	q^6	1	C_1
$\phi_{2,1}$	$\frac{1}{6}q\Phi_2^2\Phi_3$	$q\Phi_8$	1	$\mathfrak{S}_3.(1,1)$
$\phi_{2,2}$	$\frac{1}{2}q\Phi_2^2\Phi_6$	$q^2\Phi_4$	1	$\mathfrak{S}_3.(g_2,1)$
$\phi'_{1,3}$	$\frac{1}{3}q\Phi_3\Phi_6$	q^3	1	$\mathfrak{S}_3.(g_3,1)$
$\phi''_{1,3}$	$\frac{1}{3}q\Phi_3\Phi_6$	q^3	1	$\mathfrak{S}_3.(1,\rho)$
$G_2[1]$	$\frac{1}{6}q\Phi_1^2\Phi_6$	0	1	$\mathfrak{S}_3.(1,\varepsilon)$
$G_2[-1]$	$\frac{1}{2}q\Phi_1^2\Phi_3$	0	-1	$\mathfrak{S}_3.(g_2,\varepsilon)$
$G_2[\zeta_3]$	$\frac{1}{3}q\Phi_1^2\Phi_2^2$	0	ζ_3	$\mathfrak{S}_3.(g_3,\zeta_3)$
$G_2[\zeta_3^2]$	$\frac{1}{3}q\Phi_1^2\Phi_2^2$	0	ζ_3^2	$\mathfrak{S}_3.(g_3,\zeta_3^2)$

Caractères unipotents de G_4 ③—③

Caractère	Degré	Fantôme	Valeur propre	Famille
$\phi_{1,0}$	1	1	1	C_1
$\phi_{2,1}$	$\frac{3-\sqrt{-3}}{6}q\Phi_3'\Phi_4\Phi_6''$	$q\Phi_4$	1	$R(\mathbb{Z}/3)^{\wedge 2}.01$
$\phi_{2,3}$	$\frac{3+\sqrt{-3}}{6}q\Phi_3''\Phi_4\Phi_6'$	$q^3\Phi_4$	1	$R(\mathbb{Z}/3)^{\wedge 2}.02$
$Z_3:2$	$\frac{\sqrt{-3}}{3}q\Phi_1\Phi_2\Phi_4$	0	ζ_3^2	$R(\mathbb{Z}/3)^{\wedge 2}.12$
$\phi_{3,2}$	$q^2\Phi_3\Phi_6$	$q^2\Phi_3\Phi_6$	1	C_1
$\phi_{1,4}$	$\frac{-\sqrt{-3}}{6}q^4\Phi_3''\Phi_4\Phi_6''$	q^4	1	$R(\mathbb{Z}/6)^{\wedge 2}_{(5)}.01$
$\phi_{1,8}$	$\frac{\sqrt{-3}}{6}q^4\Phi_3'\Phi_4\Phi_6'$	q^8	1	$R(\mathbb{Z}/6)^{\wedge 2}_{(5)}.34$
$\phi_{2,5}$	$\frac{1}{2}q^4\Phi_2^2\Phi_6$	$q^5\Phi_4$	1	$R(\mathbb{Z}/6)^{\wedge 2}_{(5)}.04$
$Z_3:11$	$\frac{\sqrt{-3}}{3}q^4\Phi_1\Phi_2\Phi_4$	0	ζ_3^2	$R(\mathbb{Z}/6)^{\wedge 2}_{(5)}.25$
G_4	$\frac{1}{2}q^4\Phi_1^2\Phi_3$	0	-1	$R(\mathbb{Z}/6)^{\wedge 2}_{(5)}.13$

Φ_3', Φ_3'' (resp. Φ_6', Φ_6'') sont facteurs de Φ_3 (resp. Φ_6) dans $\mathbb{Q}(\zeta_3)$.

Groupes de tresses

Soit $W \subset \mathrm{GL}(V)$ un groupe de réflexion fini sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel V, et soit $\mathcal{H}$ l'ensemble de ses hyperplans de réflexion.

Groupes de tresses

Soit $W \subset \mathrm{GL}(V)$ un groupe de réflexion fini sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel V, et soit $\mathcal{H}$ l'ensemble de ses hyperplans de réflexion.

- Le *groupe de tresses* est $B := \Pi_1((V - \bigcup_{H\in\mathcal{H}} H)/W, x)$.

Groupes de tresses

Soit $W \subset \mathrm{GL}(V)$ un groupe de réflexion fini sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel V, et soit $\mathcal{H}$ l'ensemble de ses hyperplans de réflexion.

- Le *groupe de tresses* est $B := \Pi_1((V - \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H)/W, x)$.
- Si W est irréductible, il est engendré par $\dim V$ (*bien engendré*) ou $1 + \dim V$ générateurs.

Groupes de tresses

Soit $W \subset \mathrm{GL}(V)$ un groupe de réflexion fini sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel V, et soit $\mathcal{H}$ l'ensemble de ses hyperplans de réflexion.

- Le *groupe de tresses* est $B := \Pi_1((V - \bigcup_{H\in\mathcal{H}} H)/W, x)$.
- Si W est irréductible, il est engendré par $\dim V$ (*bien engendré*) ou $1 + \dim V$ générateurs.
- B est engendré par le même nombre de *réflexions-tresse*, et est présenté par des *relations de tresses* $w_1 = w_2$ où w_1, w_2 sont des mots positifs de même longueur en les réflexions-tresse (Bessis 2001).

Groupes de tresses

Soit $W \subset \mathrm{GL}(V)$ un groupe de réflexion fini sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel V, et soit $\mathcal{H}$ l'ensemble de ses hyperplans de réflexion.

- Le *groupe de tresses* est $B := \Pi_1((V - \bigcup_{H\in\mathcal{H}} H)/W, x)$.
- Si W est irréductible, il est engendré par $\dim V$ (*bien engendré*) ou $1 + \dim V$ générateurs.
- B est engendré par le même nombre de *réflexions-tresse*, et est présenté par des *relations de tresses* $w_1 = w_2$ où w_1, w_2 sont des mots positifs de même longueur en les réflexions-tresse (Bessis 2001). Si W est réel (de Coxeter) ces relations sont $\mathbf{sts}\ldots = \mathbf{tst}\ldots$; en général elles peuvent faire intervenir 3 générateurs.

Groupes de tresses

Soit $W \subset \mathrm{GL}(V)$ un groupe de réflexion fini sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel V, et soit $\mathcal{H}$ l'ensemble de ses hyperplans de réflexion.

- Le *groupe de tresses* est $B := \Pi_1((V - \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H)/W, x)$.
- Si W est irréductible, il est engendré par $\dim V$ (*bien engendré*) ou $1 + \dim V$ générateurs.
- B est engendré par le même nombre de *réflexions-tresse*, et est présenté par des *relations de tresses* $w_1 = w_2$ où w_1, w_2 sont des mots positifs de même longueur en les réflexions-tresse (Bessis 2001). Si W est réel (de Coxeter) ces relations sont $\mathbf{sts}\ldots = \mathbf{tst}\ldots$; en général elles peuvent faire intervenir 3 générateurs.
- L'image $s \in W$ d'une réflexion-tresse $\mathbf{s} \in B$ est une réflexion *distinguée*, i.e. sa valeur propre non-triviale est $\exp(2i\pi/e)$.

Groupes de tresses

Soit $W \subset \mathrm{GL}(V)$ un groupe de réflexion fini sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel V, et soit $\mathcal{H}$ l'ensemble de ses hyperplans de réflexion.

- Le *groupe de tresses* est $B := \Pi_1((V - \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H)/W, x)$.
- Si W est irréductible, il est engendré par $\dim V$ (*bien engendré*) ou $1 + \dim V$ générateurs.
- B est engendré par le même nombre de *réflexions-tresse*, et est présenté par des *relations de tresses* $w_1 = w_2$ où w_1, w_2 sont des mots positifs de même longueur en les réflexions-tresse (Bessis 2001). Si W est réel (de Coxeter) ces relations sont $\mathbf{sts}\ldots = \mathbf{tst}\ldots$; en général elles peuvent faire intervenir 3 générateurs.
- L'image $s \in W$ d'une réflexion-tresse $\mathbf{s} \in B$ est une réflexion *distinguée*, i.e. sa valeur propre non-triviale est $\exp(2i\pi/e)$.
- 0n obtient une présentation de W en ajoutant les relations $s^e = 1$.

Groupes de tresses

Soit $W \subset \mathrm{GL}(V)$ un groupe de réflexion fini sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel V, et soit $\mathcal{H}$ l'ensemble de ses hyperplans de réflexion.

- Le *groupe de tresses* est $B := \Pi_1((V - \bigcup_{H\in\mathcal{H}} H)/W, x)$.
- Si W est irréductible, il est engendré par $\dim V$ (*bien engendré*) ou $1 + \dim V$ générateurs.
- B est engendré par le même nombre de *réflexions-tresse*, et est présenté par des *relations de tresses* $w_1 = w_2$ où w_1, w_2 sont des mots positifs de même longueur en les réflexions-tresse (Bessis 2001). Si W est réel (de Coxeter) ces relations sont $\mathbf{sts}\ldots = \mathbf{tst}\ldots$; en général elles peuvent faire intervenir 3 générateurs.
- L'image $s \in W$ d'une réflexion-tresse $\mathbf{s} \in B$ est une réflexion *distinguée*, i.e. sa valeur propre non-triviale est $\exp(2i\pi/e)$.
- 0n obtient une présentation de W en ajoutant les relations $s^e = 1$.

Il existe des diagrammes "À la Coxeter" qui présentent les groupes de tresse (Broué-Malle-Rouquier 1998, Bessis-M. 2004).

Algèbres de Hecke

L'algèbre de Hecke d'un groupe réductif déployé $\mathbf{G}$ est le quotient de $\mathbb{C}[q]B$ par $(\mathbf{s}-q)(\mathbf{s}+1)=0$.

Algèbres de Hecke

L'algèbre de Hecke d'un groupe réductif déployé $\mathbf{G}$ est le quotient de $\mathbb{C}[q]B$ par $(\mathbf{s}-q)(\mathbf{s}+1)=0$.

- Pour un groupe de réflexion complexe, l'algèbre de Hecke *Spetsiale* $\mathcal{H}$ de W est le quotient de $\mathbb{C}[q]B$ par $(\mathbf{s}-q)(\mathbf{s}-\zeta_e)(\mathbf{s}-\zeta_e^2)\ldots(\mathbf{s}-\zeta_e^{e-1})=0$ si $s^e=1$.

Algèbres de Hecke

L'algèbre de Hecke d'un groupe réductif déployé **G** est le quotient de $\mathbb{C}[q]B$ par $(\mathbf{s}-q)(\mathbf{s}+1)=0$.

- Pour un groupe de réflexion complexe, l'algèbre de Hecke *Spetsiale* $\mathcal{H}$ de W est le quotient de $\mathbb{C}[q]B$ par $(\mathbf{s}-q)(\mathbf{s}-\zeta_e)(\mathbf{s}-\zeta_e^2)\ldots(\mathbf{s}-\zeta_e^{e-1})=0$ si $s^e=1$.
- Cette algèbre $\mathcal{H}$ devrait être symétrique avec une trace symétrisante "canonique" τ,

Algèbres de Hecke

L'algèbre de Hecke d'un groupe réductif déployé **G** est le quotient de $\mathbb{C}[q]B$ par $(\mathbf{s}-q)(\mathbf{s}+1)=0$.

- Pour un groupe de réflexion complexe, l'algèbre de Hecke *Spetsiale* $\mathcal{H}$ de W est le quotient de $\mathbb{C}[q]B$ par $(\mathbf{s}-q)(\mathbf{s}-\zeta_e)(\mathbf{s}-\zeta_e^2)\ldots(\mathbf{s}-\zeta_e^{e-1})=0$ si $s^e=1$.
- Cette algèbre $\mathcal{H}$ devrait être symétrique avec une trace symétrisante "canonique" τ,
- on devrait avoir le "théorème de déformation de Tits" : pour toute spécialisation qui n'envoie pas q sur une racine de l'unité, $\mathcal{H}$ doit être semisimple et isomorphe à l'algèbre de W.

Algèbres de Hecke

L'algèbre de Hecke d'un groupe réductif déployé **G** est le quotient de $\mathbb{C}[q]B$ par $(\mathbf{s}-q)(\mathbf{s}+1)=0$.

- Pour un groupe de réflexion complexe, l'algèbre de Hecke *Spetsiale* $\mathcal{H}$ de W est le quotient de $\mathbb{C}[q]B$ par $(\mathbf{s}-q)(\mathbf{s}-\zeta_e)(\mathbf{s}-\zeta_e^2)\ldots(\mathbf{s}-\zeta_e^{e-1})=0$ si $s^e=1$.
- Cette algèbre $\mathcal{H}$ devrait être symétrique avec une trace symétrisante "canonique" τ,
- on devrait avoir le "théorème de déformation de Tits" : pour toute spécialisation qui n'envoie pas q sur une racine de l'unité, $\mathcal{H}$ doit être semisimple et isomorphe à l'algèbre de W.
- Pour $q\mapsto 1$, la forme τ se spécialise en la trace canonique sur $\mathbb{C}W$.

Algèbres de Hecke

L'algèbre de Hecke d'un groupe réductif déployé **G** est le quotient de $\mathbb{C}[q]B$ par $(\mathbf{s}-q)(\mathbf{s}+1)=0$.

- Pour un groupe de réflexion complexe, l'algèbre de Hecke *Spetsiale* $\mathcal{H}$ de W est le quotient de $\mathbb{C}[q]B$ par $(\mathbf{s}-q)(\mathbf{s}-\zeta_e)(\mathbf{s}-\zeta_e^2)\dots(\mathbf{s}-\zeta_e^{e-1})=0$ si $s^e=1$.
- Cette algèbre $\mathcal{H}$ devrait être symétrique avec une trace symétrisante "canonique" τ,
- on devrait avoir le "théorème de déformation de Tits" : pour toute spécialisation qui n'envoie pas q sur une racine de l'unité, $\mathcal{H}$ doit être semisimple et isomorphe à l'algèbre de W.
- Pour $q\mapsto 1$, la forme τ se spécialise en la trace canonique sur $\mathbb{C}W$.

Si on décompose $\tau=\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(W)}\chi/S_\chi$, les S_χ sont les *éléments de Schur*; ce sont des polynômes de Laurent en une racine de q ($\mathcal{H}$ se déploie sur une extension $\mathbb{C}[q^{1/a}]$).

Groupes Spetsiaux

Le *degré générique* de χ est $D_\chi := S_{\mathrm{Id}}/S_\chi$. On dit que W est *Spetsial* si $D_\chi \in \mathbb{C}[q]$

Groupes Spetsiaux

Le *degré générique* de χ est $D_\chi := S_{\mathrm{Id}}/S_\chi$. On dit que W est *Spetsial* si $D_\chi \in \mathbb{C}[q]$ (a priori il est seulement $\in \mathbb{C}(q^{1/a})$).

Groupes Spetsiaux

Le *degré générique* de χ est $D_\chi := S_{\mathrm{Id}}/S_\chi$. On dit que W est *Spetsial* si $D_\chi \in \mathbb{C}[q]$ (a priori il est seulement $\in \mathbb{C}(q^{1/a})$).
Les groupes Spetsiaux sont $G(e,1,r)$, $G(e,e,r)$ et

Groupes Spetsiaux

Le *degré générique* de χ est $D_\chi := S_{\mathrm{Id}}/S_\chi$. On dit que W est *Spetsial* si $D_\chi \in \mathbb{C}[q]$ (a priori il est seulement $\in \mathbb{C}(q^{1/a})$).
Les groupes Spetsiaux sont $G(e,1,r)$, $G(e,e,r)$ et

groupe	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
dimension	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Spetsial	$*$		$*$		$*$						$*$		

groupe	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
dimension	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3
Spetsial							H_3	$*$	$*$	$*$	$*$

groupe	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
dimension	4	4	4	4	4	5	6	6	7	8
Spetsial	F_4	$*$	H_4		$*$	$*$	$*$	E_6	E_7	E_8

Il sont tous bien engendrés.

Groupes Spetsiaux (suite)

Les degrés fantômes, Deg R_χ (multiplicité graduée de χ dans l'algèbre des coinvariants, dans le cas déployé) ont un sens sens pour les groupes de réflexion complexes.

Groupes Spetsiaux (suite)

Les degrés fantômes, Deg R_χ (multiplicité graduée de χ dans l'algèbre des coinvariants, dans le cas déployé) ont un sens sens pour les groupes de réflexion complexes.
Gunter Malle a vérifié que les groupes Spetsiaux sont caractérisées par n'importe laquelle des conditions suivantes :

Groupes Spetsiaux (suite)

Les degrés fantômes, Deg R_χ (multiplicité graduée de χ dans l'algèbre des coinvariants, dans le cas déployé) ont un sens sens pour les groupes de réflexion complexes.

Gunter Malle a vérifié que les groupes Spetsiaux sont caractérisées par n'importe laquelle des conditions suivantes :

1. $S_{\mathrm{Id}} = \prod_i (q^{d_i} - 1)/(q-1)$ où d_i sont les degrés de réflexion de W.

Groupes Spetsiaux (suite)

Les degrés fantômes, Deg R_χ (multiplicité graduée de χ dans l'algèbre des coinvariants, dans le cas déployé) ont un sens sens pour les groupes de réflexion complexes.
Gunter Malle a vérifié que les groupes Spetsiaux sont caractérisées par n'importe laquelle des conditions suivantes :

1. $S_{\mathrm{Id}} = \prod_i (q^{d_i} - 1)/(q-1)$ où d_i sont les degrés de réflexion de W.
2. $S_\chi \in \mathbb{C}[q^{\pm 1}]$ (*a priori* ils sont seulement dans $\mathbb{C}[q^{\pm 1/a}]$).

Groupes Spetsiaux (suite)

Les degrés fantômes, Deg R_χ (multiplicité graduée de χ dans l'algèbre des coinvariants, dans le cas déployé) ont un sens sens pour les groupes de réflexion complexes.
Gunter Malle a vérifié que les groupes Spetsiaux sont caractérisées par n'importe laquelle des conditions suivantes :

1. $S_{\mathrm{Id}} = \prod_i (q^{d_i} - 1)/(q-1)$ où d_i sont les degrés de réflexion de W.
2. $S_\chi \in \mathbb{C}[q^{\pm 1}]$ (*a priori* ils sont seulement dans $\mathbb{C}[q^{\pm 1/a}]$).
3. $D_\chi \in \mathbb{C}[q^{\pm 1/a}]$ (*a priori* ils sont seulement dans $\mathbb{C}(q^{\pm 1/a})$).

Groupes Spetsiaux (suite)

Les degrés fantômes, Deg R_χ (multiplicité graduée de χ dans l'algèbre des coinvariants, dans le cas déployé) ont un sens sens pour les groupes de réflexion complexes.
Gunter Malle a vérifié que les groupes Spetsiaux sont caractérisées par n'importe laquelle des conditions suivantes :

1. $S_{\mathrm{Id}} = \prod_i (q^{d_i} - 1)/(q-1)$ où d_i sont les degrés de réflexion de W.
2. $S_\chi \in \mathbb{C}[q^{\pm 1}]$ (*a priori* ils sont seulement dans $\mathbb{C}[q^{\pm 1/a}]$).
3. $D_\chi \in \mathbb{C}[q^{\pm 1/a}]$ (*a priori* ils sont seulement dans $\mathbb{C}(q^{\pm 1/a})$).
4. Le $\mathbb{C}$-sous-espace de $\mathbb{C}(q^{\pm 1/a})$ engendré par les D_χ est le même que le sous-espace engendré par les Deg R_χ.

Théorie de d-Harish-Chandra

On a $|\mathbf{G}^F| = q^{\sum_i (d_i - 1)} \prod_i (q^{d_i} - \epsilon_i)$ où ϵ_i est la valeur propre de ϕ sur l'invariant fondamental de degré d_i.

Théorie de d-Harish-Chandra

On a $|\mathbf{G}^F| = q^{\sum_i (d_i-1)} \prod_i (q^{d_i} - \epsilon_i)$ où ϵ_i est la valeur propre de ϕ sur l'invariant fondamental de degré d_i.

- Pour tout facteur $\Phi_d(q)^a$ de ce polynôme, il existe un tore $\mathbf{S}$ tel que $\mathbf{S}^F = \Phi_d(q)^a$.

Théorie de d-Harish-Chandra

On a $|\mathbf{G}^F| = q^{\sum_i (d_i - 1)} \prod_i (q^{d_i} - \epsilon_i)$ où ϵ_i est la valeur propre de ϕ sur l'invariant fondamental de degré d_i.

- Pour tout facteur $\Phi_d(q)^a$ de ce polynôme, il existe un tore $\mathbf{S}$ tel que $\mathbf{S}^F = \Phi_d(q)^a$.
- Plus précisément il existe $w \in W\phi$ de polynôme caractéristique sur $X(\mathbf{T})$ divisible par $\Phi_d(q)^a$ (l'espace propre correspondant donne $\mathbf{S}$).

Théorie de d-Harish-Chandra

On a $|\mathbf{G}^F| = q^{\sum_i (d_i - 1)} \prod_i (q^{d_i} - \epsilon_i)$ où ϵ_i est la valeur propre de ϕ sur l'invariant fondamental de degré d_i.

- Pour tout facteur $\Phi_d(q)^a$ de ce polynôme, il existe un tore $\mathbf{S}$ tel que $\mathbf{S}^F = \Phi_d(q)^a$.
- Plus précisément il existe $w \in W\phi$ de polynôme caractéristique sur $X(\mathbf{T})$ divisible par $\Phi_d(q)^a$ (l'espace propre correspondant donne $\mathbf{S}$).
- On dit que $\mathbf{L} = C_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$ est un Levi *d-ployé* (pour $d = 1$ le tore S est déployé et le Levi est dit $(\mathbf{G}, F)$-déployé — Levi d'un sous-groupe parabolique F-stable).

Théorie de d-Harish-Chandra

On a $|\mathbf{G}^F| = q^{\sum_i (d_i-1)} \prod_i (q^{d_i} - \epsilon_i)$ où ϵ_i est la valeur propre de ϕ sur l'invariant fondamental de degré d_i.

- Pour tout facteur $\Phi_d(q)^a$ de ce polynôme, il existe un tore $\mathbf{S}$ tel que $\mathbf{S}^F = \Phi_d(q)^a$.
- Plus précisément il existe $w \in W\phi$ de polynôme caractéristique sur $X(\mathbf{T})$ divisible par $\Phi_d(q)^a$ (l'espace propre correspondant donne $\mathbf{S}$).
- On dit que $\mathbf{L} = C_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$ est un Levi *d-ployé* (pour $d = 1$ le tore S est déployé et le Levi est dit $(\mathbf{G}, F)$-déployé — Levi d'un sous-groupe parabolique F-stable).
- On dit que $\gamma \in \mathcal{U}(\mathbf{G}^F)$ est *d-cuspidal* s'il n'intervient dans aucun $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda)$ où $\mathbf{L}$ est d-ployé.

Théorie de d-Harish-Chandra

On a $|\mathbf{G}^F| = q^{\sum_i (d_i-1)} \prod_i (q^{d_i} - \epsilon_i)$ où ϵ_i est la valeur propre de ϕ sur l'invariant fondamental de degré d_i.

- Pour tout facteur $\Phi_d(q)^a$ de ce polynôme, il existe un tore $\mathbf{S}$ tel que $\mathbf{S}^F = \Phi_d(q)^a$.
- Plus précisément il existe $w \in W\phi$ de polynôme caractéristique sur $X(\mathbf{T})$ divisible par $\Phi_d(q)^a$ (l'espace propre correspondant donne $\mathbf{S}$).
- On dit que $\mathbf{L} = C_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$ est un Levi *d-ployé* (pour $d = 1$ le tore S est déployé et le Levi est dit $(\mathbf{G}, F)$-déployé — Levi d'un sous-groupe parabolique F-stable).
- On dit que $\gamma \in \mathcal{U}(\mathbf{G}^F)$ est *d-cuspidal* s'il n'intervient dans aucun $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda)$ où $\mathbf{L}$ est d-ployé.
- Un critère équivalent est que $\mathrm{Deg}\,\gamma$ est divisible par la plus grande puissance de $\phi_d(q)$ divisant $|(\mathbf{G}/Z^0\mathbf{G})^F|$.

Théorie de *d*-Harish-Chandra (suite)

Théorie de d-Harish-Chandra (suite)

- Si $\lambda \in \mathcal{U}(\mathbf{L}^F)$ est d-cuspidal, alors $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\lambda)$ est un groupe de réflexions complexes et $\mathrm{End}_{\mathbf{G}^F}(R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda))$ devrait être une *algèbre de Hecke ζ_d-cyclotomique*

Théorie de d-Harish-Chandra (suite)

- Si $\lambda \in \mathcal{U}(\mathbf{L}^F)$ est d-cuspidal, alors $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \lambda)$ est un groupe de réflexions complexes et $\operatorname{End}_{\mathbf{G}^F}(R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda))$ devrait être une *algèbre de Hecke ζ_d-cyclotomique*
- Une algèbre de Hecke ζ_d cyclotomique est une algèbre de Hecke pour une groupe de réflexion complexe dont les paramètres sont des polynômes en q (ou une racine de q) et qui se spécialise en $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \lambda)$ pour $q \mapsto \zeta_d$).

Théorie de d-Harish-Chandra (suite)

- Si $\lambda \in \mathcal{U}(\mathbf{L}^F)$ est d-cuspidal, alors $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \lambda)$ est un groupe de réflexions complexes et $\mathrm{End}_{\mathbf{G}^F}(R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda))$ devrait être une *algèbre de Hecke ζ_d-cyclotomique*
- Une algèbre de Hecke ζ_d cyclotomique est une algèbre de Hecke pour une groupe de réflexion complexe dont les paramètres sont des polynômes en q (ou une racine de q) et qui se spécialise en $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \lambda)$ pour $q \mapsto \zeta_d$).
- Cette conjecture fait partie des conjectures de Broué sur les blocs à groupe de défaut abélien et est le point de départ de l'idée des Spetses.

Théorie de d-Harish-Chandra (cas particulier)

Soit $\mathbf{w}$ une racine d-ième de $\boldsymbol{\pi}$:= le générateur positif du centre du groupe de tresses pures ($= \mathbf{w}_0^2$ dans le cas réel).

Théorie de d-Harish-Chandra (cas particulier)

Soit $\mathbf{w}$ une racine d-ième de $\boldsymbol{\pi}$:= le générateur positif du centre du groupe de tresses pures ($= \mathbf{w}_0^2$ dans le cas réel).

- L'image w de $\mathbf{w}$ dans W est un élément ζ_d-régulier au sens de Springer : son ζ_d-espace propre rencontre le complément des hyperplans de réflexion (est est un ζ_d espace propre maximal).

Théorie de d-Harish-Chandra (cas particulier)

Soit $\mathbf{w}$ une racine d-ième de $\boldsymbol{\pi} :=$ le générateur positif du centre du groupe de tresses pures ($= \mathbf{w}_0^2$ dans le cas réel).

- L'image w de $\mathbf{w}$ dans W est un élément ζ_d-régulier au sens de Springer : son ζ_d-espace propre rencontre le complément des hyperplans de réflexion (est est un ζ_d espace propre maximal).
- $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_w, \mathrm{Id})/\mathbf{T}_w^F \simeq C_W(w)$

Théorie de d-Harish-Chandra (cas particulier)

Soit $\mathbf{w}$ une racine d-ième de $\boldsymbol{\pi}$:= le générateur positif du centre du groupe de tresses pures ($= \mathbf{w}_0^2$ dans le cas réel).

- L'image w de $\mathbf{w}$ dans W est un élément ζ_d-régulier au sens de Springer : son ζ_d-espace propre rencontre le complément des hyperplans de réflexion (est est un ζ_d espace propre maximal).
- $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_w, \mathrm{Id})/\mathbf{T}_w^F \simeq C_W(w)$

Fait Les caractères unipotents apparaissent déjà dans la décomposition des R_w pour de tels w.

Théorie de d-Harish-Chandra (cas particulier)

Soit $\mathbf{w}$ une racine d-ième de $\boldsymbol{\pi}$:= le générateur positif du centre du groupe de tresses pures ($= \mathbf{w}_0^2$ dans le cas réel).

- L'image w de $\mathbf{w}$ dans W est un élément ζ_d-régulier au sens de Springer : son ζ_d-espace propre rencontre le complément des hyperplans de réflexion (est est un ζ_d espace propre maximal).
- $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_w, \mathrm{Id})/\mathbf{T}_w^F \simeq C_W(w)$

Fait Les caractères unipotents apparaissent déjà dans la décomposition des R_w pour de tels w.

- La conjecture sur $\mathrm{End}_{\mathbf{G}^F} R_w$ prédit aussi les "valeurs propres du Frobenius" pour les constituants de R_w : F est dans le centre de $\mathrm{End}_{\mathbf{G}^F} R_w$ et les valeurs propres sont les caractères centraux de l'algèbre de Hecke sur cet élément.

Théorie de d-Harish-Chandra (cas particulier)

Soit $\mathbf{w}$ une racine d-ième de $\boldsymbol{\pi}$:= le générateur positif du centre du groupe de tresses pures ($= \mathbf{w}_0^2$ dans le cas réel).

- L'image w de $\mathbf{w}$ dans W est un élément ζ_d-régulier au sens de Springer : son ζ_d-espace propre rencontre le complément des hyperplans de réflexion (est est un ζ_d espace propre maximal).
- $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_w, \mathrm{Id})/\mathbf{T}_w^F \simeq C_W(w)$

Fait Les caractères unipotents apparaissent déjà dans la décomposition des R_w pour de tels w.

- La conjecture sur $\mathrm{End}_{\mathbf{G}^F} R_w$ prédit aussi les "valeurs propres du Frobenius" pour les constituants de R_w : F est dans le centre de $\mathrm{End}_{\mathbf{G}^F} R_w$ et les valeurs propres sont les caractères centraux de l'algèbre de Hecke sur cet élément.

IL suffit de déterminer les paramètres des algèbres de Hecke cyclotomiques de tels $C_W(w)$ pour trouver les degrés unipotents et les valeurs propres du Frobenius correspondantes.

Spetses

Nous appelons *Spetses* une liste de : degrés unipotents, paramètres pour les algèbres de Hecke cyclotomiques relatives, valeurs propres du Frobenius, matrices de Fourier qui vérifient certains (nombreux) axiomes.

Spetses

Nous appelons *Spetses* une liste de : degrés unipotents, paramètres pour les algèbres de Hecke cyclotomiques relatives, valeurs propres du Frobenius, matrices de Fourier qui vérifient certains (nombreux) axiomes.

- Lusztig connaissait avant 1990 une solution pour les groupes réels non rationnels (sauf une matrice de Fourier 74×74 pour H_4 déterminée par Malle en 1994).

Spetses

Nous appelons *Spetses* une liste de : degrés unipotents, paramètres pour les algèbres de Hecke cyclotomiques relatives, valeurs propres du Frobenius, matrices de Fourier qui vérifient certains (nombreux) axiomes.

- Lusztig connaissait avant 1990 une solution pour les groupes réels non rationnels (sauf une matrice de Fourier 74×74 pour H_4 déterminée par Malle en 1994).
- Malle a donné une solution pour les groupes imprimitifs Spetsiaux en 1995, et proposé (non publié) des données pour la plupart des groupes Spetsiaux primitifs.

Spetses

Nous appelons *Spetses* une liste de : degrés unipotents, paramètres pour les algèbres de Hecke cyclotomiques relatives, valeurs propres du Frobenius, matrices de Fourier qui vérifient certains (nombreux) axiomes.

- Lusztig connaissait avant 1990 une solution pour les groupes réels non rationnels (sauf une matrice de Fourier 74×74 pour H_4 déterminée par Malle en 1994).
- Malle a donné une solution pour les groupes imprimitifs Spetsiaux en 1995, et proposé (non publié) des données pour la plupart des groupes Spetsiaux primitifs.
- L'unicité de ces données n'était pas claires. Elle est maintenant établie pour les groupes primitifs.

Spetses

Nous appelons *Spetses* une liste de : degrés unipotents, paramètres pour les algèbres de Hecke cyclotomiques relatives, valeurs propres du Frobenius, matrices de Fourier qui vérifient certains (nombreux) axiomes.

- Lusztig connaissait avant 1990 une solution pour les groupes réels non rationnels (sauf une matrice de Fourier 74×74 pour H_4 déterminée par Malle en 1994).
- Malle a donné une solution pour les groupes imprimitifs Spetsiaux en 1995, et proposé (non publié) des données pour la plupart des groupes Spetsiaux primitifs.
- L'unicité de ces données n'était pas claires. Elle est maintenant établie pour les groupes primitifs.

On part de la série principale où on connaˆpar définition les paramètres. On cherche l'intersection avec la "d-série principale R_w" où **w** est une racine d-ième de $\boldsymbol{\pi}$ (par le test $\mathrm{Dim}(\rho)(\zeta_d) \neq 0$). On arrive à retrouver les paramètres de "$\mathrm{End}_{\mathbf{G}^F} R_w$" ainsi.

On sait quand on a trouvé tout $\mathcal{U}(\mathbf{G}^F)$ par

$$\sum_{\rho \in \mathcal{U}(\mathbf{G}^F)} \mathrm{Dim}(\rho)\overline{\mathrm{Dim}(\rho)} = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(W)} (\mathrm{Deg}(R_\chi))^2$$

.

On sait quand on a trouvé tout $\mathcal{U}(\mathbf{G}^F)$ par

$$\sum_{\rho\in\mathcal{U}(\mathbf{G}^F)} \mathrm{Dim}(\rho)\overline{\mathrm{Dim}(\rho)} = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(W)} (\mathrm{Deg}(R_\chi))^2$$

.

- Cette égalité est vraie restreinte à chaque famille de Lusztig.

On sait quand on a trouvé tout $\mathcal{U}(\mathbf{G}^F)$ par

$$\sum_{\rho\in\mathcal{U}(\mathbf{G}^F)} \mathrm{Dim}(\rho)\overline{\mathrm{Dim}(\rho)} = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(W)} (\mathrm{Deg}(R_\chi))^2$$

.

- Cette égalité est vraie restreinte à chaque famille de Lusztig.
- Chaque famille intersecte la série principale. Lusztig a décrit l'intersection en utilisant la base de Kazhdan-Lusztig, définissant les *familles de caractères de l'algèbre de Hecke*.

On sait quand on a trouvé tout $\mathcal{U}(\mathbf{G}^F)$ par

$$\sum_{\rho\in\mathcal{U}(\mathbf{G}^F)} \mathrm{Dim}(\rho)\overline{\mathrm{Dim}(\rho)} = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(W)} (\mathrm{Deg}(R_\chi))^2$$

.

- Cette égalité est vraie restreinte à chaque famille de Lusztig.
- Chaque famille intersecte la série principale. Lusztig a décrit l'intersection en utilisant la base de Kazhdan-Lusztig, définissant les *familles de caractères de l'algèbre de Hecke*.
- Rouquier (1999) a remarqué que c'étaient les blocs de l'algèbre de Hecke sur l'anneau $\mathbb{Z}[\{\zeta_{e_s}\}_{s\,\in\,\{\text{réflexions de } W\}}, q, q^{-1}, \{(q^n-1)^{-1}\}_{n>1}]$.

On sait quand on a trouvé tout $\mathcal{U}(\mathbf{G}^F)$ par

$$\sum_{\rho\in\mathcal{U}(\mathbf{G}^F)} \mathrm{Dim}(\rho)\overline{\mathrm{Dim}(\rho)} = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(W)} (\mathrm{Deg}(R_\chi))^2$$

.

- Cette égalité est vraie restreinte à chaque famille de Lusztig.
- Chaque famille intersecte la série principale. Lusztig a décrit l'intersection en utilisant la base de Kazhdan-Lusztig, définissant les *familles de caractères de l'algèbre de Hecke*.
- Rouquier (1999) a remarqué que c'étaient les blocs de l'algèbre de Hecke sur l'anneau $\mathbb{Z}[\{\zeta_{e_s}\}_{s\,\in\,\{\text{réflexions de } W\}}, q, q^{-1}, \{(q^n-1)^{-1}\}_{n>1}]$.
- Ceci a un sens pour un groupe de réflexion complexe arbitraire et les *blocs de Rouquier* ont été déterminés par Broué-Kim, Malle-Rouquier (2003) et Chlouveraki.

Matrices de Fourier

Les propriétes suivantes des matrices S et Ω sont prises commes axiomes :

Matrices de Fourier

Les propriétes suivantes des matrices S et Ω sont prises commes axiomes :

1. S est symétrique.

Matrices de Fourier

Les propriétes suivantes des matrices S et Ω sont prises commes axiomes :

1. S est symétrique.
2. $S^{-1} = \overline{S}$.

Matrices de Fourier

Les propriétes suivantes des matrices S et Ω sont prises commes axiomes :

1. S est symétrique.
2. $S^{-1} = \overline{S}$.
3. $S^4 = 1$.

Matrices de Fourier

Les propriétes suivantes des matrices S et Ω sont prises commes axiomes :

1. S est symétrique.
2. $S^{-1} = \overline{S}$.
3. $S^4 = 1$.
4. $S^2\Omega = \Omega S^2$.

Matrices de Fourier

Les propriétes suivantes des matrices S et Ω sont prises commes axiomes :

1. S est symétrique.
2. $S^{-1} = \overline{S}$.
3. $S^4 = 1$.
4. $S^2\Omega = \Omega S^2$.
5. $(\Omega S)^3 = 1$.

Matrices de Fourier

Les propriétes suivantes des matrices S et Ω sont prises commes axiomes :

1. S est symétrique.
2. $S^{-1} = \overline{S}$.
3. $S^4 = 1$.
4. $S^2\Omega = \Omega S^2$.
5. $(\Omega S)^3 = 1$.
6. Si i_0 est une ligne de S correspondant à un caractère spécial d'un bloc de Rouquier, alors pour tous i, j, k les sommes $\sum_l S_{il} S_{jl} \overline{S}_{kl} S^{-1}_{i_0 l}$ sont entières.

Matrices de Fourier

Les propriétes suivantes des matrices S et Ω sont prises commes axiomes :

1. S est symétrique.
2. $S^{-1} = \overline{S}$.
3. $S^4 = 1$.
4. $S^2\Omega = \Omega S^2$.
5. $(\Omega S)^3 = 1$.
6. Si i_0 est une ligne de S correspondant à un caractère spécial d'un bloc de Rouquier, alors pour tous i, j, k les sommes $\sum_l S_{il} S_{jl} \overline{S}_{kl} S_{i_0 l}^{-1}$ sont entières.

(Un caractère est *spécial* si son caractère fantôme a même valuation que son degré générique).

Transformation d'Ennola

Soit $\zeta \in ZW \subset Z(\mathrm{GL}(V)) \simeq \mathbb{C}$.

Transformation d'Ennola

Soit $\zeta \in ZW \subset Z(\mathrm{GL}(V)) \simeq \mathbb{C}$.

Fait : $\mathrm{Dim}(\rho) \mapsto \mathrm{Dim}(\rho)(\zeta q)$ définit une permutation-avec-signes des degrés unipotents.

Transformation d'Ennola

Soit $\zeta \in ZW \subset Z(\mathrm{GL}(V)) \simeq \mathbb{C}$.

Fait : $\mathrm{Dim}(\rho) \mapsto \mathrm{Dim}(\rho)(\zeta q)$ définit une permutation-avec-signes des degrés unipotents.

- Nous l'appelons la *ζ-transformation d'Ennola*.

Transformation d'Ennola

Soit $\zeta \in ZW \subset Z(\mathrm{GL}(V)) \simeq \mathbb{C}$.

Fait : $\mathrm{Dim}(\rho) \mapsto \mathrm{Dim}(\rho)(\zeta q)$ définit une permutation-avec-signes des degrés unipotents.

- Nous l'appelons la *ζ-transformation d'Ennola*.
- ζ-Ennola stabilise les famille.

Transformation d'Ennola

Soit $\zeta \in ZW \subset Z(\mathrm{GL}(V)) \simeq \mathbb{C}$.

Fait : $\mathrm{Dim}(\rho) \mapsto \mathrm{Dim}(\rho)(\zeta q)$ définit une permutation-avec-signes des degrés unipotents.

- Nous l'appelons la *ζ-transformation d'Ennola*.
- ζ-Ennola stabilise les famille.
- ζ-Ennola admet les faisceaux-caractères comme vecteurs propres. (la valeur propre correspondante est appelée le *ζ-Ennola facteur*).

Transformation d'Ennola

Soit $\zeta \in ZW \subset Z(\mathrm{GL}(V)) \simeq \mathbb{C}$.

Fait : $\mathrm{Dim}(\rho) \mapsto \mathrm{Dim}(\rho)(\zeta q)$ définit une permutation-avec-signes des degrés unipotents.

- Nous l'appelons la *ζ-transformation d'Ennola*.
- ζ-Ennola stabilise les famille.
- ζ-Ennola admet les faisceaux-caractères comme vecteurs propres. (la valeur propre correspondante est appelée le *ζ-Ennola facteur*).
- Les ζ-Ennola facteurs peuvent être déduits des facteurs pour les faisceaux-caractères cuspidaux.

Transformation d'Ennola

Soit $\zeta \in ZW \subset Z(\mathrm{GL}(V)) \simeq \mathbb{C}$.

Fait : $\mathrm{Dim}(\rho) \mapsto \mathrm{Dim}(\rho)(\zeta q)$ définit une permutation-avec-signes des degrés unipotents.

- Nous l'appelons la *ζ-transformation d'Ennola*.
- ζ-Ennola stabilise les famille.
- ζ-Ennola admet les faisceaux-caractères comme vecteurs propres. (la valeur propre correspondante est appelée le *ζ-Ennola facteur*).
- Les ζ-Ennola facteurs peuvent être déduits des facteurs pour les faisceaux-caractères cuspidaux.
- Nous avons une formule qui prédit la valeur propre du Frobenius du ζ-ennola d'un caractère unipotent à partir de sa valeur propre et du ζ-Ennola facteur de sa donnée cuspidale.

Transformation d'Ennola

Soit $\zeta \in ZW \subset Z(\mathrm{GL}(V)) \simeq \mathbb{C}$.

Fait : $\mathrm{Dim}(\rho) \mapsto \mathrm{Dim}(\rho)(\zeta q)$ définit une permutation-avec-signes des degrés unipotents.

- Nous l'appelons la *ζ-transformation d'Ennola*.
- ζ-Ennola stabilise les famille.
- ζ-Ennola admet les faisceaux-caractères comme vecteurs propres. (la valeur propre correspondante est appelée le *ζ-Ennola facteur*).
- Les ζ-Ennola facteurs peuvent être déduits des facteurs pour les faisceaux-caractères cuspidaux.
- Nous avons une formule qui prédit la valeur propre du Frobenius du ζ-ennola d'un caractère unipotent à partir de sa valeur propre et du ζ-Ennola facteur de sa donnée cuspidale.

Les matrices de Foruier ont été calculées à partir de ces observations et des axiomes de la diapo précédente.

“Fusion data”

- Il s’agit d’interpréter les matrices de Fourier trouvées dans les Spetses.

“Fusion data”

- Il s’agit d’interpréter les matrices de Fourier trouvées dans les Spetses. On trouve des doubles quantiques de groupes cycliques, de groupes de Frobenius d’ordre 20 et 42, du groupe G_4, mais aussi d’autres matrices

"Fusion data"

- Il s'agit d'interpréter les matrices de Fourier trouvées dans les Spetses. On trouve des doubles quantiques de groupes cycliques, de groupes de Frobenius d'ordre 20 et 42, du groupe G_4, mais aussi d'autres matrices
- Michael Cuntz (un étudiant de Malle) a vérifié que les matrices de Fourier sont des tables de caractères normalisées d'algèbres $\mathbb{Z}$-basées

“Fusion data”

- Il s’agit d’interpréter les matrices de Fourier trouvées dans les Spetses. On trouve des doubles quantiques de groupes cycliques, de groupes de Frobenius d’ordre 20 et 42, du groupe G_4, mais aussi d’autres matrices
- Michael Cuntz (un étudiant de Malle) a vérifié que les matrices de Fourier sont des tables de caractères normalisées d’algèbres $\mathbb{Z}$-basées
- Une algèbre $\mathbb{Z}$-basée est une algèbre qui est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang fini, muni d’une involution $x \mapsto \overline{x}$ et d’une base $B \ni 1$ stable par $x \mapsto \overline{x}$, et telle que $\overline{B}$ soit duale de B pour la forme linéaire coefficient sur 1.

"Fusion data"

- Il s'agit d'interpréter les matrices de Fourier trouvées dans les Spetses. On trouve des doubles quantiques de groupes cycliques, de groupes de Frobenius d'ordre 20 et 42, du groupe G_4, mais aussi d'autres matrices
- Michael Cuntz (un étudiant de Malle) a vérifié que les matrices de Fourier sont des tables de caractères normalisées d'algèbres $\mathbb{Z}$-basées
- Une algèbre $\mathbb{Z}$-basée est une algèbre qui est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang fini, muni d'une involution $x \mapsto \overline{x}$ et d'une base $B \ni 1$ stable par $x \mapsto \overline{x}$, et telle que $\overline{B}$ soit duale de B pour la forme linéaire coefficient sur 1.
- C'est une généralisation des algèbres de fusion où les constantes de structure ne sont pas nécessairement positives.

"Fusion data"

- Il s'agit d'interpréter les matrices de Fourier trouvées dans les Spetses. On trouve des doubles quantiques de groupes cycliques, de groupes de Frobenius d'ordre 20 et 42, du groupe G_4, mais aussi d'autres matrices
- Michael Cuntz (un étudiant de Malle) a vérifié que les matrices de Fourier sont des tables de caractères normalisées d'algèbres $\mathbb{Z}$-basées
- Une algèbre $\mathbb{Z}$-basée est une algèbre qui est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang fini, muni d'une involution $x \mapsto \overline{x}$ et d'une base $B \ni 1$ stable par $x \mapsto \overline{x}$, et telle que $\overline{B}$ soit duale de B pour la forme linéaire coefficient sur 1.
- C'est une généralisation des algèbres de fusion où les constantes de structure ne sont pas nécessairement positives.
- Certaines de ces algèbres sont des anneaux de caractères de groupes cycliques. D'autres sont des produits extérieurs de telles matrices. D'autre encore sont des "matrices de Kac-Peterson". Ou quotients de telles constructions.

Questions

Questions

- On ne sait pas comment interpréter : la matrice 74×74 de H_4 (mais elle semble liée à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_5)$ dont le double quantique a 74 caractères), une matrice 54×54 pour G_{14}, et une matrice 49×49 pour G_{26}.

Questions

- On ne sait pas comment interpréter : la matrice 74×74 de H_4 (mais elle semble liée à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_5)$ dont le double quantique a 74 caractères), une matrice 54×54 pour G_{14}, et une matrice 49×49 pour G_{26}.

? Spetses tordus, par exemple ${}^4G(3,3,3)$.

Questions

- On ne sait pas comment interpréter : la matrice 74×74 de H_4 (mais elle semble liée à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_5)$ dont le double quantique a 74 caractères), une matrice 54×54 pour G_{14}, et une matrice 49×49 pour G_{26}.

? Spetses tordus, par exemple ${}^4G(3,3,3)$.

? Quel est le sens de tout ça

Questions

- On ne sait pas comment interpréter : la matrice 74×74 de H_4 (mais elle semble liée à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_5)$ dont le double quantique a 74 caractères), une matrice 54×54 pour G_{14}, et une matrice 49×49 pour G_{26}.

? Spetses tordus, par exemple ${}^4G(3,3,3)$.

? Quel est le sens de tout ça

- Groupes p-compacts ?