CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE CATEGORIQUES

VOLUME XXXIII
3ème trimestre 1992

Structures Algébriques : Thème et Variations

E. Burroni et A. Burroni[1]

ABSTRACT : This paper is a survey of the main categorical variations on the thema of algebraic structures.

Les structures mathématiques qui peuvent se décrire en se limitant à des opérations, et dont les axiomes peuvent se réduire à des équations (i.e. égalités de termes), ont toujours séduit par leur simplicité conceptuelle. G.Grätzer rappelle dans la préface de son livre [17] que l'origine du concept d'*Algèbre Universelle* remonte à la fin du $19^{\text{ème}}$ siècle. Cette notion a été illustrée par des noms comme ceux de A.N. Whitehead, G.Birkhoff, A.Tarski. Elle a été entièrement reformulée et précisée, en terme fonctoriel, par W.Lawvere dans sa thèse en 1963 [24]. Nous voudrions, dans cet exposé, indiquer de manière abrégé comment la théorie des catégories a développé, autour de ce thème simple, une série de variations. Chacune des variations que nous allons brièvement présenter dans ce texte, choisies parmi les plus significatives, est une extension naturelle donnant plus de portée à ce concept, au point qu'il est possible, aujourd'hui, de suggérer - sinon d'affirmer - qu'il constitue une des clefs essentielles pour une classification générale des structures mathématiques. Précisons que ce texte est le développement de l'introduction de l'exposé oral fait au congrès de Tours de 1991 : les illustrations mathématiques qui faisaient suite dans le dit exposé oral paraîtront ailleurs.

La théorie des catégories envisage la description des structures mathématiques en général ainsi : une *structure* est d'abord la donnée d'un foncteur

$$M : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{E}$$

[1]Université de Paris 7

interprété comme *réalisation* (*modèle*) d'une *théorie* $\mathcal{T}$ dans un *univers* $\mathcal{E}$. Ces catégories $\mathcal{T}$ et $\mathcal{E}$ sont généralement munies de données supplémentaires, par exemple des limites projectives et inductives comme dans le cas des *esquisses mixtes* d'Ehresmann [15], ou de données plus directement inspirées de la Théorie des modèles et correctement fonctorialisées comme dans le cas des topos de Lawvere, et avec lesquelles le foncteur M doit commuter. Ces données doivent, d'une part, refléter la nature et la complexité de la structure étudiée et, d'autre part, celle de la *logique* utilisée dans le développement de cette structure (équationnelle, classique, intuitionniste, etc...). Toutefois ce point de vue n'est souvent qu'une idéalisation de la situation réelle : les théories n'apparaissant - et pour cause! - qu'à travers leur présentation, c'est-à-dire des *systèmes formels* modulo une *équivalence* souvent encore empreinte d'un certain empirisme (on peut comparer cela au début de la théorie des groupes où ceux-ci n'apparaissaient généralement qu'à travers une présentation et seulement comme groupes de transformations).

Thème : On appelle *théorie de Lawvere* une catégorie cartésienne $\mathcal{T}$ (i.e. une catégorie admettant des produits cartésiens finis, y compris l'objet final) dans laquelle on a distingué un objet $\mathbf{s}$, tel que tout objet de $\mathcal{T}$ soit de la forme $\mathbf{s}^n = \mathbf{s} \times ... \times \mathbf{s}$ (n fois) pour un $n \in \mathbf{N}$ (en particulier $\mathbf{s}^0 = 1$ est l'objet final et $\mathbf{s}^1 = \mathbf{s}$) et où on a distingué pour tout i, $1 \leq i \leq n$, des projections canoniques $\pi_{n,i} : \mathbf{s}^n \longrightarrow \mathbf{s}$ caractérisant $\mathbf{s}^n$ comme produit cartésien de n copies de $\mathbf{s}$. La définition de W.Lawvere est plus élégante : une théorie en son sens, est définie par un foncteur $i_{\mathcal{T}} : \mathcal{F}^{op} \longrightarrow \mathcal{T}$, bijectif sur les objets, qui commute aux produits cartésiens, et où $\mathcal{F}^{op}$ est la duale de la sous-catégorie pleine $\mathcal{F}$ de la catégorie des ensembles **Ens** qui a pour objets les entiers (chaque entier $n \in \mathbf{N}$ étant identifié à l'ensemble de ses prédécesseurs $n = \{0, 1, ..., n-1\}$). Les objets de $\mathcal{T}$ s'appellent des *types* et l'objet $\mathbf{s} = i_{\mathcal{T}}(1)$ s'appelle le *type de base* ou la *sorte*.

Une présentation d'une théorie de Lawvere est la donnée d'un système d'opérations et d'équations (Ω, E) jouant le rôle d'un système de générateurs et relations de la théorie. Les éléments de Ω sont des symboles d'opérations $\alpha : \mathbf{s}^n \longrightarrow \mathbf{s}$ et ceux de E sont des couples de termes $\lambda : \mathbf{s}^p \longrightarrow \mathbf{s}$, $\lambda' : \mathbf{s}^p \longrightarrow \mathbf{s}$ de même arité $p \in N$, dérivés des éléments de Ω, ces couples étant notés $\lambda = \lambda'$. Les exemples de théories de Lawvere et de leurs modèles sont constitués par les structures algébriques traditionnelles : groupes, anneaux, anneaux commutatifs, algèbres de Boole,... et également par des exemples plus étonnants comme, par exemple, les C^∞-algèbres (dont la définition est également due à W.Lawvere) et dont les modèles sont les variétés différentielles C^∞... et également des objets C^∞ plus généraux qui sont l'analogue des "schémas" de la géométrie algébrique [27].

Variation 1. Elle est due à J.Bénabou [3] et consiste à passer du cas précédent *à une sorte* $\mathbf{s}$ au cas *à plusieurs sortes*. Précisément $\mathcal{T}$ est encore une catégorie cartésienne, mais au lieu d'un singleton $\{\mathbf{s}\}$, on a un ensemble S d'objets de $\mathcal{T}$ tel que tout objet de $\mathcal{T}$ s'écrive, de façon unique, sous la forme $\mathbf{s}_{i_1} \times ... \times \mathbf{s}_{i_n}$ où $n \in N$ et $\mathbf{s}_{i_1}, \mathbf{s}_{i_2}, ..., \mathbf{s}_{i_n} \in S$. La notion de présentation associée comporte alors un terme de plus (S, Ω, E).

L'exemple classique à deux sortes est celui des modules sur un anneau (non fixé) : les vecteurs et les scalaires.

Variation 2. Cette nouvelle généralisation consiste à admettre des arités infinies ; une opération (à une sorte par exemple) prend la forme suivante $\alpha : \mathbf{s}^I \longrightarrow \mathbf{s}$ où I est un ensemble quelconque appelé encore *arité* de α. Par ailleurs, cette généralisation a donné l'occasion de reformuler toute la question en termes de "triple" sur les ensembles. Un *triple* $\mathbf{T}$ sur une catégorie $\mathcal{E}$ est donné par un triplet (T, η, μ) où $T : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ est un foncteur et où $\eta : id_{\mathcal{E}} \longrightarrow T$, $\mu : T^2 \longrightarrow T$ sont deux transformations naturelles satisfaisant les relations :

$$\mu \circ T\eta = id(T) = \mu \circ \eta T, \quad \mu \circ T\mu = \mu \circ \mu T.$$

Une $\mathbf{T}$-*algèbre* est la donnée d'un couple (A, b) formé d'un objet A et d'un morphisme de $\mathcal{E}$ de la forme $b : TA \longrightarrow A$ vérifiant les relations

$$b \circ \eta A = id_A, \quad b \circ \mu A = b \circ Tb.$$

Pour plus de détails voir [16], [25] et [26]. Ainsi à chaque théorie $\mathcal{T}$ au sens de Lawvere est associé un triple $\mathbf{T}$ sur $\mathcal{E} = \mathbf{Ens}$ et on montre que la catégorie des $\mathcal{T}$-modèles est isomorphe à celle des $\mathbf{T}$-algèbres : $Mod(\mathcal{T}, \mathbf{Ens}) \simeq Alg(\mathbf{T})$, [25]. Mais il existe d'autres triples que ceux obtenus de cette manière : ils correspondent à des arités infinies (sans limite de taille autre que celle d'être des éléments de $\mathbf{Ens}$). Ainsi les espaces compacts sont, en ce sens, les $\mathcal{U}$-algèbres d'un triple $\mathcal{U}$ où, pour tout ensemble A, $\mathcal{U}A$ est l'ensemble des ultrafiltres sur A. Autre exemple : les $C^\star$- algèbres commutatives.

Variation 3. Les structures algébriques considérées jusqu'ici sont réalisées dans l'univers $\mathcal{E} = \mathbf{Ens}$. On peut évidement utiliser comme univers, à la place de **Ens**, toute catégorie cartésienne $\mathcal{E}$ pour réaliser une théorie de Lawvere et obtenir des catégories de modèles $Mod(\mathcal{T}, \mathcal{E})$. Par exemple, si $\mathcal{T}$ est la théorie des groupes et $\mathcal{E} = \mathbf{Esp}$ la catégorie des espaces topologiques, $Mod(\mathcal{T}, \mathbf{Esp})$ est la catégorie des groupes topologiques. Du point de vue des triples : au triple $\mathbf{T} = \mathbf{T}_{grpe}$ sur **Ens**, dont les **T**-algèbres s'identifient à des groupes, correspond une *extension* $\overline{\mathbf{T}} = \overline{\mathbf{T}}_{grpe}$ sur **Esp** et dont les $\overline{\mathbf{T}}$-algèbres s'identifient à des groupes topologiques.

Variation 4. Ici, on a une nouvelle généralisation d'*arité* : elles ne sont plus nécessairement réduites à des ensembles. Ces cas sont encore couverts par la notion de triple, mais ces derniers ne sont plus nécessairement, comme dans les cas précédents, définis sur une catégorie de la forme $\mathbf{Ens}^S$ où S était l'ensemble des sortes (ou même encore, comme dans la variation 3, des triples qui sont de simples *extensions* à une catégorie $\mathcal{E}$ de triples sur **Ens**). Notamment, pour fixer les idées, cet ensemble S peut être généralisé par un graphe Σ, et on peut considérer un triple **T** sur la catégorie $\mathbf{Ens}^\Sigma$, dont les objets sont les diagrammes de type Σ dans **Ens**. Considérons un seul exemple remarquable, celui où $\Sigma = (\cdot \rightrightarrows \cdot)$: alors $\mathbf{Grph} = \mathbf{Ens}^{(\cdot \rightrightarrows \cdot)}$ est la catégorie des graphes, i.e. des diagrammes dans **Ens** de la forme $(X \rightrightarrows Y)$. Ce qui fait l'intérêt de ce cas vient en partie de la preuve faite dans [8], que la quasi-totalité des structures étudiées par les catégoriciens — notamment celle des topos élémentaires de Lawvere — sont des **T**-algèbres où **T** est donc un triple sur **Grph**. Nous avons appelé "algèbres graphiques" de telles structures, la donnée de base n'étant plus un ensemble ou une famille d'ensembles mais un graphe. A ceci, correspond une notion de théorie analogue à celle de théorie de Lawvere ou de Bénabou et qu'on peut appeler "théorie algébro-graphique", et où, cette fois, les types ne sont plus seulement donnés par des produits cartésiens, mais également par des produits fibrés (ou des noyaux), l'essentiel des cas intéressants étant d'arités finies. Dans [19], R.Guitart traite, sous le nom d' "algèbres figuratives", du cas où Σ est une petite catégorie quelconque, ce qui lui permet de donner, via les esquisses, un sens "équationnel" à toute théorie (voir variation 11).

Variation 5. Une des propriétés les plus fondamentales de **Ens**, qui en fait est un univers, est d'être une catégorie cartésienne fermée. Donc, une partie du rôle joué par **Ens** dans la théorie des catégories peut être jouée par une structure de catégorie monoïdale (en particulier cartésienne) fermée quelconque $\mathcal{V}$. On définit ainsi des catégories enrichies par $\mathcal{V}$ ou $\mathcal{V}$-

catégories (cela veut dire en gros que pour toute paire X, Y d'objets de la $\mathcal{V}$-catégorie C, l'ensemble $Hom_C(X,Y)$ se trouve "enrichi" par la donnée d'un objet $\overline{Hom_C}(X,Y)$ de $\mathcal{V}$). On définit également des $\mathcal{V}$-foncteurs, $\mathcal{V}$-transformations naturelles, $\mathcal{V}$-triples, etc ... ainsi que des $\mathcal{V}$-catégories de $\mathbf{T}$-algèbres $Alg(\mathbf{T})$ pour un $\mathcal{V}$-triple $\mathbf{T}$. Ce point de vue a été développé par exemple par A.Kock [22] et M.Bunge [11]. Citons deux cas particuliers importants : 1) celui oû $\mathcal{V} = \mathbf{Ab}$ la catégorie des groupes abéliens (le produit monoïdal $\otimes$ étant le produit tensoriel usuel). Par exemple les catégories de modules sur un anneau sont des $\mathcal{V}$-catégories d'algèbres, l'anneau de base étant une $\mathcal{V}$-catégorie (engendrant une $\mathcal{V}$-théorie algébrique) ; 2) celui des 2-catégories, 2-foncteurs, ... où le préfixe "2" signifie enrichi par **Cat** munie de son produit cartésien. Les 2-catégories d'algèbres sur un 2-triple ainsi obtenues seront généralisées plus loin (variation 9) par des 2-catégories de "lax-algèbres".

Variation 6. On doit à M.Barr l'idée de généraliser la notion de $\mathbf{T}$-algèbre, où $\mathbf{T}$ est un triple sur **Ens**, par celle de $\mathbf{T}$-*algèbre relationnelle*, c'est-à-dire par la donnée d'un couple (A, R) où A est un ensemble et $R : TA \longrightarrow A$ une relation (i.e. $R \subseteq TA \times A$) vérifiant — au lieu des égalités d'une $\mathbf{T}$-algèbre — les relations d'inclusion :

$$id_A \subseteq R \circ \eta A, \quad R \circ TR \subseteq R \circ \mu A.$$

Les $\mathbf{T}$-algèbres relationnelles et leur notion d'homomorphisme forment une catégorie $Ord(\mathbf{T})$ contenant $Alg(\mathbf{T})$ comme sous-catégorie (voir détails et la justification des notations dans [1]). L'exemple fondamental donné par Barr est celui des espaces topologiques $\mathbf{Esp} \simeq Ord(\mathcal{U})$, où $\mathcal{U}$ est le triple des ultrafiltres déja évoqué pour la relation $\mathbf{Comp} \simeq Alg(\mathcal{U})$ (une idée similaire, mais avec le triple des filtres $\mathcal{F}$, avait été développée indépendamment dans [4]).

Variation 7. L'idée de généraliser la relation précédente $R : TA \longrightarrow A$ par un "span" conduit à une nouvelle extension, celle des "$\mathbf{T}$-catégories" formant les objets d'une nouvelle catégorie $Cat(\mathbf{T})$ contenant $Ord(\mathbf{T})$ comme sous-catégorie pleine. Nous nous contenterons d'indications très succintes : le lecteur intéressé par ces notions peut se reporter à [5]. Un *span* $S : X \longrightarrow Y$ entre deux ensembles X et Y est défini par un couple d'applications de même domaine et de la forme $a_S : S \longrightarrow X$, $b_S : S \longrightarrow Y$ ou, ce qui revient au même, une application de la forme $[a_S, b_S] : S \longrightarrow X \times Y$ (le span, qu'on se trouve dans [5] (p.260) puis pour une étude plus développée dans [7] (mais la terminologie de "pseudo-algèbre" qui avait été choisie dans ces articles n'était pas heureuse, de même que celle de "2-algèbre" donnée dans [6]. On doit à M.Bunge [12] l'usage dans ce domaine du préfixe "lax". Mêmes remarques pour les notions de "lax-catégories" et les "lax-triples" introduites dans [5]).

Précisons un peu plus : soit **T** un 2-triple sur une 2-catégorie $\mathcal{E}$ (i.e. "2" au sens de "enrichi sur **Cat**"), une **T**-*lax-algèbre* est la donnée d'un quadruplet (A, b, ι, κ) où $b : TA \longrightarrow A$ est un morphisme de $\mathcal{E}$, ι, κ des 2-cellules de la forme

$$\iota : id(A) \longrightarrow b \circ \eta A, \quad \kappa : b \circ Tb \longrightarrow b \circ \mu A$$

satisfaisant des "axiomes de cohérences" pour lesquels on se contentera de renvoyer, par exemple, à [7], p.365 ou même [5], p.260.

Indiquons pour terminer un seul exemple qui, bien qu'élémentaire, est représentatif de cette notion et donne une idée de son étendue : si $id_{\mathbf{Cat}}$ est le triple trivial sur **Cat**, une $id_{\mathbf{Cat}}$- algèbre n'est autre qu'un triple (b, ι, κ) sur une (petite) catégorie A, i.e. $b : A \longrightarrow A$ est l'endofoncteur du triple et ι, κ correspondent à ce qui a été noté plus haut η, μ.

Variation 10. Avec la notion de "**T**-multialgèbre" de Y.Diers (voir notamment [13] ,[14]), on quitte les variations plus ou moins exotiques pour revenir à une ligne plus classique qui - on le verra bientôt - conduit tout droit à une véritable "théorie des modèles" au sens le plus large.

Les "multialgèbres" (le préfixe "multi" ne reflète qu'imparfaitement la notion) sont développées selon un même schéma général que les "algèbres", mais cette fois avec une "théorie multialgébrique". La notion de base est celle de "multiproduit cartésien" qui généralise la notion de produit cartésien. Par exemple, un *multiobjet final* dans une catégorie C est constitué par la donnée d'un objet final, et un seul, par composante connexe de C. Un *multiproduit* plus général se ramène au cas précédent sur une catégorie adéquate (catégorie des objets au-dessus de la famille dont on cherche le multiproduit). Une *Théorie multialgébrique* $\mathcal{T}$ [14] est alors l'analogue d'une théorie de Lawvere mais où des multiproduits remplacent les produits simples. Un modèle de $\mathcal{T}$ dans un univers, par exemple dans la catégorie **Ens**, est un foncteur $M : \mathcal{T} \longrightarrow$ **Ens** tel que si $(Y_j)_{j\in J}$ est le multiproduit de $(X_i)_{i\in I}$, on a $\coprod_{j\in J} M(Y_j) \simeq \coprod_{i\in I} M(X_i)$ (I et J finis), généralisant le cas classique qui correspond à $J = 1$. Des structures aussi variées que les corps, les anneaux intègres, les espaces préhilbertiens, les ensembles totalement ordonnés, etc... sont des multialgèbres et forment, avec leurs homomorphismes naturels, des catégories $Mod(\mathcal{T})$ de "multimodèles". Ces structures peuvent également être données par des **T**-algèbres où **T** est un "multitriple". Voir [13].

Variation 11. L'idée de généraliser les multiproduits par des "multilimites projectives", définies de manière analogue, peut être pris comme point de départ des travaux de R.Guitart et C.Lair [20], [21] qui, d'une part, parachèvent de façon naturelle ceux de Y.Diers et, d'autre part, révèlent des liens puissants et inattendus avec la théorie des esquisses mixtes d'Ehresmann déja cité [15]. Cette nouvelle extension devient alors considérable puisque, par exemple, toutes les structures du "1^{er} ordre" entrent dans ce nouveau cadre. Ainsi le domaine couvert par cette extension est celui des "esquisses mixtes" d'Ehresmann définies dans les années 60. Enfin, dans [23], Lair propose des éléments d'une version "triple" de cette nouvelle extension.

Variation 12. On sait depuis longtemps que certaines "structures" sont données par des systèmes d' "opérations-équations" en un sens plus général que celui donné par les algébristes; la notion de "monade" de Bénabou [2] :

$$M \otimes M \xrightarrow{m} M \xleftarrow{e} I$$

qui est définie dans une catégorie monoïdale $(\mathcal{E}, I, \otimes)$, généralise la notion de monoïde :

$$M \times M \xrightarrow{m} M \xleftarrow{e} 1$$

définie dans une catégorie cartésienne $(\mathcal{E}, 1, \times)$. Stimulés par des applications à la mécanique quantique, et la découverte récente de nouveaux polynômes invariants associés aux noeuds, la notion de "groupe quantique", c'est-à-dire "algèbres de Hopf" non nécessairement commutatives ou cocommutatives (qui sont des structures algébriques dans ce sens plus général), une foule de concepts reliant "calculs algébriques" et physique ont fait récemment leur apparition. Pour un aspect spécifique de cette généralisation du point de vue considéré ici, voir [9]. Cette dernière variation indique assez bien que le thème de l'équationnalité est loin d'avoir épuisé toutes ses potentialités. (Ainsi, quel serait l'analogue monoïdal des types de limites autres que les produits cartésiens binaires ?).

Références

[1] M.Barr, *Relational algebras*, LN in Math. 137 (1970), Springer.

[2] J.Bénabou, *Introduction to bicategories*, LN in Math. 47 (1967), Springer.

[3] J.Bénabou, *Structures algébriques dans les catégories*, Cah. Top. Géo. Diff., XI (1968), 1-126.

[4] A. Burroni, *Esquisse des catégories à limites et des quasi-topologies*, Esquisses mathématiques 5, université Paris 7 (1970).

[5] A. Burroni, **T**-*catégories*, Cah. Top. Géo. Diff., XII 3 (1971), 215-321.

[6] A.Burroni, *Structures 2-algébriques*, Cah. Top. Géo. Diff., XIV 2 (1973).

[7] A.Burroni, *Structures pseudo-algébriques*, 1^{ere} *partie*, Cah. Top. Géo. Diff., XVI 4 (1975), 343-393.

[8] A.Burroni, *Algèbres graphiques (sur un concept de dimension dans les langages formels)*, Cah. Top. Géo. Diff., XXII 3 (1981).

[9] A.Burroni, *Higher dimensionnal word problems with applications to equationnal logic*, to appear in "Theoretical computer science" (fourth biennal summer conf. in cat. theo. and comp. sc., 1991), Paris.

[10] E.Burroni, *Algèbres non déterministiques et* **D**-*catégories*, Cah. Top. Géo. Diff., XIV 4 (1973), 417-475.

[11] M.Bunge, *Relative functor category and categories of algebras*, Journal of algebra, 2 (1969), 64-101.

[12] M.Bunge, *Coherent extensions and relationnal algebras*, Trans. AMS, 197 (1974), 355-390.

[13] Y.Diers, *Multimonads and Multimonadic catégories*, JPAA, 17 (1980), 153-170.

[14] Y.Diers, *Catégories multialgébriques*, Archiv. Math., 34 (1980), 193-209.

[15] C.Ehresmann, *Introduction to the theory of structured categories*, Univ. of Kansas, Technical Report 10 (1966), et autres articles dans Charles Ehresmann : Oeuvres complètes et commentés, Amiens 1983.

[16] S.Eilenberg et J.B.Moore, *Adjoint functors and triples*, J.Math.9, (1965).

[17] G.Grätzer, *Universal algebra*, University series Van Nostrand (1968).

[18] R.Guitart, *Tenseurs et machines*, Cah. Top. Géo. Diff., XXI 1 (1980).

[19] R.Guitart, *Introduction à l'analyse algébrique. II. Algèbres figuratives et esquisses*, conf. aux jour. ATALA AFCET, Paris Math.Sci.Hum. 97, 1987.

[20] R.Guitart et C.Lair, *Calcul syntaxique des modèles et calcul des formules internes*, Diag.4 (1980), Paris.

[21] R.Guitart et C.Lair, *Existence de diagrammes localement libres*, Diag.6 (1981), Paris.

[22] A.Kock, *On monad in symetric monoïdal closed categories*, Preprint series. Math. Inst. Aahrus Univ. 14 (1968).

[23] C.Lair, *Sesqui-monades et monades locales*, Diag.9 (1983) Paris.

[24] W.Lawvere, *Functorial semantics of algebraic theories*, dissertation, Colombia University (1963).

[25] F.E.J.Linton, *Some aspects of equationnal categories*, Procedings of the conference on categorical algebra, La Jolla (1965), Springer 84-94.

[26] F.E.J.Linton, *An outline of functorial semantics*, Lect.Notes in Math., 80 (1969), 7-52 Springer.

[27] I.Moerdijk et G.E.Reyes, *Models for smooth infinitesimal Analysis*, Springer (1991).

Université de Paris 7
Département de mathématiques
2 Place Jussieu
75251 Paris Cedex 05

notera simplement S, se réduit à une relation lorsque ce morphisme est une inclusion $R \subseteq X \times Y$). Si S, $S' : X \rightrightarrows Y$ sont deux spans de même domaine et codomaine, on définit la notion de morphisme $m : S \longrightarrow S'$ entre spans par une application (encore notée m) telle que $a_{S'} \circ m = a_S$, $b_{S'} \circ m = b_S$ (dans le cas de relations, un tel morphisme se réduit à la donnée d'une inclusion $R \subseteq R'$). Les ensembles, les spans et leurs morphismes forment respectivement les 0, 1 et 2-cellules d'une 2-catégorie **Span** (plus précisément une "bicatégorie" au sens de Bénabou [2]). Une **T**-catégorie sur A est alors définie par un span $S : TA \longrightarrow A$ et deux morphismes

$$i : id(A) \longrightarrow S \circ \eta A, \quad k : S \circ TS \longrightarrow S \circ \mu A\ ;$$

ces données (qui se réduisaient à des propriétés dans les cas précédents) sont soumises à des axiomes faisant intervenir le niveau T^3A du triple. Divers exemples sont proposés dans [5] ; limitons-nous au cas le plus élémentaire et qui explique la terminologie : les $id_{\mathbf{Ens}}$-catégories ne sont autres que des catégories : $\mathbf{Cat}(id_{\mathbf{Ens}}) \simeq \mathbf{Cat}$ où $id_{\mathbf{Ens}}$ est le triple trivial défini sur **Ens** (l'endomorphisme est le foncteur identité et η, μ sont des identités).

Variation 8. La notion de "loi distributive" **D** entre deux triples $\mathbf{T}, \mathbf{T}'$ définis sur une même catégorie $\mathcal{E}$ a été introduite par J.Beck. Elle conduit à la notion de **D**-algèbre donnée par un morphisme de la forme $b : TA \longrightarrow T'A$ et celle analogue de **D**-catégorie, qui redonnent les **T**-algèbres et les **T**-catégories lorsque $\mathbf{T}' = id_{\mathcal{E}}$. En particulier pour $\mathbf{T}' = \mathcal{P}$ le triple des parties sur **Ens**, (et où $\eta A : A \longrightarrow \mathcal{P}A$ et $\mu A : \mathcal{P}^2 A \longrightarrow \mathcal{P}A$ sont respectivement les applications "singleton" et "réunion") on obtient une nouvelle notion d' "algèbre partielle" qui, par exemple avec $\mathbf{T} =$ (triple des actions d'un monoïde libre), donne pour une loi distributive **D** entre **T** et $\mathcal{P}$ les "automates non déterministes". Ces notions qui ont été parfois utilisées en informatique théorique ont été étudiées dans [10], et ultérieurement dans [18].

Variation 9. Un théorème de [5] p.260 montre qu'un autre prolongement naturel de l'étude des **T**-catégories est celle d'une extension "2-dimensionnelle" des structures algébriques, à savoir les "lax-algebras". Essentiellement ce sont des structures qui sont définies sur des catégories et non plus sur des ensembles, et dont les opérations sont des foncteurs. Les équations peuvent alors être "laxifiées", c'est-à-dire, remplacées par des transformations naturelles et ce n'est qu'à la dimension supérieure en T^3 qu'on retrouve des équations (axiomes de cohérences). La définition originelle des "lax-algebras"