Une construction d'un nerf des ∞-catégories

A.Burroni & J.Penon

Université Paris 7 -Denis-Diderot
U.F.R. de mathématiques
2 Place Jussieu F.75251 PARIS cedex 05

Introduction.

R.Street a donné dans [Str] une construction d'un nerf des ∞-catégories [1]. Nous proposons dans ce travail une nouvelle construction d'un nerf qui utilise les techniques classiques de l'algèbre homologique. Bien que l'identité entre les deux constructions reste à démontrer, on a vérifié qu'elles coïncident jusqu'à la dimension 6; ce sont celles qui sont calculées explicitement dans [Str].

Plus précisémment, Street construit un objet cosimplicial de la catégorie des (petites) ∞-catégories, c'est-à-dire un foncteur $\mathcal{O} : \mathbf{\Delta} \longrightarrow \infty\text{-}\mathbf{Cat}$, d'où l'on déduit aussitôt un foncteur nerf $N : \infty\text{-}\mathbf{Cat} \longrightarrow \mathbf{Simpl}$. Nous proposons donc ici une nouvelle construction $\mathcal{O}' : \mathbf{\Delta} \longrightarrow \infty\text{-}\mathbf{Cat}$ d'un tel objet.

Le point de départ de notre construction utilise un résultat de D.Bourn [Bou] qui établit une équivalence fonctorielle entre la catégorie **Compl** des complexes de chaînes de groupes abéliens et la catégorie des objets ∞-catégories dans **Ab** [2]. En fait nous n'utiliserons que le foncteur $B : \mathbf{Compl} \longrightarrow \infty\text{-}\mathbf{Cat}$ déduit de l'équivalence précédente en oubliant les structures de groupes abéliens sur les ∞-catégories (cette construction sera rappelée dans la section 1).

Pour tout objet $[n]$ de Δ (où $n \in \mathbf{N}$), l'∞-catégorie $\tilde{\Delta}^n = \mathcal{O}'([n])$, qui se réduit à une n-catégorie, est appelée comme dans [Str] le $n^{i\grave{e}me}$*oriental*.

Voici, décrits de manière très informelle et abrégée en oubliant notamment les cellules dégénérées, les orientaux de petites dimensions:

- Pour $n = 0$: $\qquad 0 \qquad$ (un seul objet)
- Pour $n = 1$: $\qquad 0 \xrightarrow{(01)} 1 \qquad$ (deux objets, une flèche)

[1] En réalité Street utilise la notion plus générale de ω-catégorie (qui admet des cellules de dimension infinie). Nous nous limitons ici aux ∞-catégories et nous adopterons une terminologie comme celle que l'on trouve par exemple dans [Bu].

[2] Analogue d'un résultat antérieur de Dold-Kan établissant une équivalence entre **Compl** et **Simpl**(**Ab**).

- Pour $n = 2$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr, "(02)"] \arrow[dr, "(01)"'] \arrow[rr, phantom, shift right=3, "\Downarrow (012)"] & & 2 \\
& 1 \arrow[ur, "(12)"'] &
\end{tikzcd}$$

(trois objets, trois flèches et une 2-cellule : $(02) \longrightarrow (12) \circ (01)$)

- Pour $n = 3$: c'est une flèche dans un tétraèdre

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr, "(03)"] \arrow[dd, "(01)"'] \arrow[ddrr, "(02)" description] \arrow[rr, phantom, shift right=3, "\Downarrow (023)"] & & 3 & & 0 \arrow[rr, "(03)"] \arrow[dd, "(01)"'] \arrow[rr, phantom, shift right=3, "\Downarrow (013)"] & & 3 \\
& & & \overset{(0123)}{\Rrightarrow} & & & \\
1 \arrow[rr, "(12)"'] \arrow[rr, phantom, shift left=3, "\Downarrow (012)"] & & 2 \arrow[uu, "(23)"'] & & 1 \arrow[rr, "(12)"'] \arrow[uurr, "(13)"'] \arrow[rr, phantom, shift left=3, "\Downarrow (123)"] & & 2 \arrow[uu, "(23)"']
\end{tikzcd}$$

où la figure a été dédoublée pour rendre lisible la 3-cellule (0123) (voir notations dans le texte).

Illustrons, toujours de manière informelle, par l'exemple d'une composition de 2-cellules dans $\tilde{\Delta}^n$ ($n \geq 4$), une différence essentielle entre les techniques utilisées dans [Str] et celles qui vont être développées dans ce travail:

la composition:

$$\left(\begin{tikzcd}[column sep=small] 0 \arrow[rr] \arrow[dr] & \Downarrow & 2 \\ & 1 \arrow[ur] & \end{tikzcd}\right) \circ \left(\begin{tikzcd}[column sep=small] 2 \arrow[rr] \arrow[dr] & \Downarrow & 4 \\ & 3 \arrow[ur] & \end{tikzcd}\right) = \left(\begin{tikzcd}[column sep=small] 0 \arrow[rr] \arrow[dr] & \Downarrow & 2 \arrow[rr] \arrow[dr] & \Downarrow & 4 \\ & 1 \arrow[ur] & & 3 \arrow[ur] & \end{tikzcd}\right)$$

est interprétée dans [Str] de façon ensembliste (ou si l'on veut, géométrique) par une réunion:

$$\left(\begin{tikzcd}[column sep=small] 0 \arrow[rr] \arrow[dr] & \Downarrow & 2 \\ & 1 \arrow[ur] & \end{tikzcd}\right) \cup \left(\begin{tikzcd}[column sep=small] 2 \arrow[rr] \arrow[dr] & \Downarrow & 4 \\ & 3 \arrow[ur] & \end{tikzcd}\right)$$

tandis que nous l'interpréterons ici de manière algébrique par une somme dans un groupe abélien:

$$\left(\begin{tikzcd}[column sep=small] 0 \arrow[rr] \arrow[dr] & \Downarrow & 2 \\ & 1 \arrow[ur] & \end{tikzcd}\right) + \left(\begin{tikzcd}[column sep=small] 2 \arrow[rr] \arrow[dr] & \Downarrow & 4 \\ & 3 \arrow[ur] & \end{tikzcd}\right)$$

1 Construction des orientaux $\tilde{\Delta}^n$.

La construction se fait en plusieurs étapes:

$1^{ère}$ étape. On note $\mathbf{\Delta}$ (resp. $\mathbf{\Delta}'$) la catégorie suivante:

- les objets de $\mathbf{\Delta}$ (resp. $\mathbf{\Delta}'$) sont les ensembles ordonnés $[n] = (\{0, 1, \ldots n\}, \leq)$, pour tout $n \in \mathbf{N}$ ($\leq$ est l'ordre usuel sur les entiers).
- les morphismes de $\mathbf{\Delta}$ (resp. $\mathbf{\Delta}'$) sont les applications croissantes (resp. strictement croissantes) $\mathbf{s} : [n] \longrightarrow [m]$ $(n, m \in \mathbf{N})$. Il sera souvent commode de noter simplement $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ une telle application où $s_i = \mathbf{s}(i)$ pour $0 \leq i \leq n$. On a alors: $0 \leq s_0 \leq s_1 \leq \ldots \leq s_n \leq m$ (resp. $0 \leq s_0 < s_1 < \ldots < s_n \leq m$).

On appelle *ensemble simplicial* (resp. *ensemble présimplicial*) un objet de la catégorie $\mathbf{Simpl} = \mathbf{Ens}^{\mathbf{\Delta}^{op}}$ (resp. $\mathbf{Simpl}' = \mathbf{Ens}^{\mathbf{\Delta}'^{op}}$), c'est-à-dire un foncteur de la forme $S : \mathbf{\Delta}^{op} \longrightarrow \mathbf{Ens}$ (resp. $S : \mathbf{\Delta}'^{op} \longrightarrow \mathbf{Ens}$). En particulier, si $Y : \mathbf{\Delta}' \longrightarrow \mathbf{Simpl}'$ est le plongement de Yoneda, on a pour tout $n \in \mathbf{N}$ un ensemble présimplicial $\Delta'^n = Y([n])$. On note $\Delta_p'^n$ l'ensemble $\Delta'^n([p]) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Delta}'}([p], [n])$ des $\mathbf{s} = (s_0, s_1, \ldots, s_p)$ tels que $0 \leq s_0 < s_1 < \ldots < s_p \leq n$.

$2^{ème}$ étape. On note **Compl** la catégorie des complexes de chaînes de groupes abéliens. Un objet de **Compl** est donc un diagramme A de la forme:

$$A_0 \xleftarrow{\partial_1} A_1 \xleftarrow{\partial_2} A_2 \longleftarrow \cdots A_{n-1} \xleftarrow{\partial_n} A_n \longleftarrow \cdots$$

où $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

On a un foncteur $Z : \mathbf{Simpl}' \longrightarrow \mathbf{Compl}$ qui associe à tout ensemble présimplicial S le complexe $Z(S)$ suivant:

$$\mathbf{Z}S_0 \xleftarrow{\partial_1} \mathbf{Z}S_1 \xleftarrow{\partial_2} \mathbf{Z}S_2 \longleftarrow \cdots \mathbf{Z}S_{n-1} \xleftarrow{\partial_n} \mathbf{Z}S_n \longleftarrow \cdots$$

où $S_n = S([n])$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, où $\mathbf{Z}S_n$ est le groupe abélien libre engendré par S_n et où ∂_n est l'application linéaire définie pour tout élément $\mathbf{s}$ de la base canonique de $\mathbf{Z}S_n$ par:

$$\partial_n(\mathbf{s}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i(\mathbf{s}).$$

Dans cette formule $d_i : S_n \longrightarrow S_{n-1}$ est l'application $d_i = S(\delta_i)$ où $\delta_i : [n-1] \longrightarrow [n]$ est définie par:

$$\delta_i(j) = \begin{cases} j & \text{si } 0 \leq j < i \\ j+1 & \text{si } i \leq j \leq n-1 \end{cases}$$

Nous aurons exclusivement à considérer le cas des complexes $K^n = Z(\Delta^n)$. On notera que K^n est de dimension n, en ce sens que pour tout $n < p$ on a $K^n_p = 0$ et $K^n_n \neq 0$.

3[ème] étape. Le point le plus important de notre construction est la description du foncteur composé B suivant:

$$\begin{tikzcd}
& \infty\text{-}\mathbf{Cat}(\mathbf{Ab}) \arrow[dr, "(2)"] & \\
\mathbf{Compl} \arrow[ur, "(1)"] \arrow[rr, "\mathrm{B}"'] & & \infty\text{-}\mathbf{Cat}
\end{tikzcd}$$

où (1) est la correspondance définie par Bourn [Bou] et (2) est le foncteur d'oubli, induit par $\mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{Ens}$.

Précisement, soit A un complexe de chaînes

$$A_0 \xleftarrow{\partial_1} A_1 \xleftarrow{\partial_2} A_2 \longleftarrow \cdots A_{n-1} \xleftarrow{\partial_n} A_n \longleftarrow \cdots,$$

on lui associe l'∞-catégorie (en réalité un ∞-groupoïde) $B(A)$ suivante:

$$B(A)_0 \underset{\text{cod}}{\overset{\text{dom}}{\leftleftarrows}} B(A)_1 \underset{\text{cod}}{\overset{\text{dom}}{\leftleftarrows}} B(A)_2 \leftleftarrows \cdots B(A)_n \underset{\text{cod}}{\overset{\text{dom}}{\leftleftarrows}} B(A)_{n+1} \leftleftarrows \cdots$$

(le diagramme ci-dessus n'est que l'∞-graphe sous-jacent à l'∞- catégorie $B(A)$, voir [Bu]) où:

$$B(A)_p = A_0 \times A_1 \times \cdots \times A_p.$$

et où

1. les applications domaines et codomaines sont définies pour tout $0 \leq q < p$ par:

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{dom}^p_q(a_0, a_1, \ldots, a_p) & = & (a_0, a_1, \ldots, a_q) \\
\mathrm{cod}^p_q(a_0, a_1, \ldots, a_p) & = & (a_0, a_1, \ldots, a_q + \partial_{q+1}(a_{q+1}))
\end{array}$$

2. les compositions par:

$$(a'_0, a'_1, \ldots, a'_p) \circ^p_q (a_0, a_1, \ldots, a_p) = \\ (a_0, a_1, \ldots, a_q, a'_{q+1} + a_{q+1}, \ldots, a'_p + a_p)$$

ssi

$$\mathrm{dom}^p_q(a'_0, a'_1, \ldots, a'_p) = \mathrm{cod}^p_q(a_0, a_1, \ldots, a_p)$$

3. les identités par:

$$\mathrm{id}_q^p(a_0, a_1, \ldots, a_q) = (a_0, a_1, \ldots, a_q, 0, \ldots, 0)$$

En particulier on obtient ainsi les ∞-catégories $B(K^n)$. Ce sont en fait des n-catégories, c'est-à-dire que pour $p > n$ une p-cellule est toujours une identité.

$4^{ème}$étape. Le dernier ingrédient nécessaire à la construction des orientaux est la "polarisation" des éléments d'un groupe abélien libre $\mathbf{Z}X$.

Si $x = \sum_i n_i x_i$ (où $x_i \in X$ pour tout i) est un élément de $\mathbf{Z}X$, on note x^- l'élément $\sum_i (n_i^-) x_i$, où la notation n^- pour un entier n est définie par:

$$n^- = \begin{cases} -n & \text{si } n \leq 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

On peut maintenant définir, pour tout $p \geq 0$ l'application

$$\mathrm{cell}_p^n : \Delta'^n_p \longrightarrow B(K^n)_p$$

en posant, pour chaque simplexe $\mathbf{s}$ $\mathrm{cell}_p^n(\mathbf{s}) = (c_0, c_1, \ldots, c_p)$ où $c_p = \mathbf{s}$ and $c_i = (\partial(c_{i+1}))^-, (0 \leq i \leq p)$. Finalement on obtient, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'∞-catégorie $\tilde{\Delta}^n$, définie comme sous-∞-catégorie de $B(K^n)$ engendrée par les cellules de la forme $\mathrm{cell}_p^n(\mathbf{s})$, pour tout $\mathbf{s} \in \Delta'^n_p$, $0 \leq p \leq n$. $\tilde{\Delta}^n$ est évidemment une n-catégorie.

2 Propriété des orientaux.

Dans une ∞-catégorie C une n-cellule x est dite *fermée* si $\mathrm{dom}_{n-1}^n(x) = \mathrm{cod}_{n-1}^n(x)$ et est dite *dégénérée* s'il existe une $(n-1)$-cellule y telle que $x = \mathrm{id}_{n-1}^n(y)$. Une ∞-catégorie est dite *sans boucle* (*"loop-free"*) si toute cellule fermée est dégénérée. On dit que C est *n-non dégénérée* s'il existe une n-cellule non dégénérée.

proposition 1 *La n-catégorie $\tilde{\Delta}^n$ est n-non dégénérée et sans boucle.*

preuve: Il est clair que la n-cellule $\mathrm{cell}_n^n(I_n)$, où $I_n = (0, 1, \ldots, n)$ est l'unique n-simplexe de Δ'^n, est non dégénérée et donc que $\tilde{\Delta}^n$ est non dégénérée.

Montrons maintenant que $\tilde{\Delta}^n$ est sans boucle. Considérons d'abord l'application linéaire $\pi_p : K_p^n \longrightarrow \mathbf{Z}$ définie sur les générateurs $\mathbf{s} = (s_0, s_1, \ldots, s_p) \in \Delta'^n_p$ du groupe $K_p^n = \mathbf{Z}\Delta'^n_p$ par $\pi_p(\mathbf{s}) = s_0 + s_1 + \cdots + s_p$ (somme dans $\mathbf{Z}$) puis définissons l'application $\bar{\pi}_p : \tilde{\Delta}_p^n \longrightarrow \mathbf{Z}$ en posant $\bar{\pi}_p(\mathbf{c}) = \pi_p(c_p)$ pour toute p-cellule $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \ldots, c_p)$ de $\tilde{\Delta}_p^n$. La proposition sera alors conséquence de la propriété suivante:

si $\mathbf{c} \in \tilde{\Delta}^n_p$ $(0 \leq p \leq n)$ est non dégénérée on a

$$\bar{\pi}_{p-1}(\mathrm{dom}^p_{p-1}(\mathbf{c})) < \bar{\pi}_{p-1}(\mathrm{cod}^p_{p-1}(\mathbf{c})).$$

Il en résultera en effet que $\mathbf{c}$ n'est pas une boucle et donc que $\tilde{\Delta}^n$ est sans boucle. On peut se ramener par induction au cas où $\mathbf{c} = \mathrm{cell}^n_p(\mathbf{s})$ est une p-cellule génératrice, grâce à la formule:

$$\begin{aligned}\bar{\pi}_{p-1}(\mathrm{cod}^p_{p-1}(\mathbf{c}'\circ^p_q\mathbf{c})) - \bar{\pi}_{p-1}(\mathrm{dom}^p_{p-1}(\mathbf{c}'\circ^p_q\mathbf{c})) = \\ [\ \bar{\pi}_{p-1}(\mathrm{cod}^p_{p-1}(\mathbf{c}')) - \bar{\pi}_{p-1}(\mathrm{dom}^p_{p-1}(\mathbf{c}'))\ ] \\ +[\ \bar{\pi}_{p-1}(\mathrm{cod}^p_{p-1}(\mathbf{c})) - \bar{\pi}_{p-1}(\mathrm{dom}^p_{p-1}(\mathbf{c}))\ ]\end{aligned}$$

pour tous $\mathbf{c}, \mathbf{c}' \in \tilde{\Delta}^n_p$ tel que $\mathrm{dom}^p_q(\mathbf{c}') = \mathrm{cod}^p_q(\mathbf{c})$ $(0 \leq q < p)$. Soit donc $\mathbf{s} \in {\Delta'}^n_p$, on a:

$$\bar{\pi}_{p-1}(\mathrm{cod}^p_{p-1}(\mathrm{cell}^n_p(\mathbf{s}))) - \bar{\pi}_{p-1}(\mathrm{dom}^p_{p-1}(\mathrm{cell}^n_p(\mathbf{s}))) = \pi_{p-1}(\partial\mathbf{s})$$

Pour montrer que $\pi_{p-1}(\partial\mathbf{s}) > 0$, on distingue deux cas:

- $p = 2k\ :\ \pi_{p-1}(\partial\mathbf{s}) = \sum_{i=0}^{k-1}(s_{2i+1} - s_{2i})\ + (\pi_p(s) - s_{2n}) > 0$
- $p = 2k+1\ :\ \pi_{p-1}(\partial\mathbf{s}) = \sum_{i=0}^{k-1}(s_{2i+1} - s_{2i}) > 0,$

ce qui termine la preuve. $\square$

Une n-catégorie C est dite *finie* si pour tout $0 \leq p \leq n$ l'ensemble C_p est fini. Dire que C est *finiment engendrée* signifie qu'il existe une suite de parties finies $E_p \subset C_p$ pour $0 \leq p \leq n$ pour laquelle la seule sous-n-catégorie C' de C vérifiant $E_p \subset C'_p$ pour tout $0 \leq p \leq n$ est C elle-même.

proposition 2 . *Une n-catégorie sans boucle et finiment engendrée est finie. En particulier les n-catégories $\tilde{\Delta}^n$ sont finies.*

preuve: par induction on peut se ramener au cas suivant: $E_p = C_p$ pour $0 \leq p \leq n-1$, et donc au cas où la sous-(n-1)-catégorie $C^{(n-1)}$ sous-jacente à C (c'est-à-dire obtenue en oubliant les n-cellules non dégénérées de C) est finie. Pour le prouver il sera commode d'introduire quelques définitions.On posera $E = E_n$ et on appellera E-factorisation élémentaire d'une n-cellule x un système de la forme:

$$(a, (u_1, v_1), \ldots, (u_{n-1}, v_{n-1})) \in E \times (C_1 \times C_1) \times \cdots \times (C_{n-1} \times C_{n-1})$$

tel que:

$$x = \bar{v}_{n-1} \circ_{n-2} (\ldots (\bar{v}_2 \circ_1 ((\bar{v}_1 \circ_0 a \circ_0 \bar{u}_1) \circ_1 \bar{u}_2) \ldots) \circ_{n-2} \bar{u}_{n-1}$$

où l'on suppose que les compositions sont possibles et où l'on note de façon abrégée $\circ_p$ au lieu de $\circ_p^n$ et $\bar{w}$ au lieu de $\mathrm{id}_p^n(w)$ pour tout $w \in C_p$ avec $0 \leq p < n$. On dit qu'une n-cellule x est *E-élémentaire* si elle admet une telle factorisation. On démontre facilement la propriété de stabilité suivante:

si x est une n-cellule élémentaire, si $w \in C_p$ pour un $0 \leq p < n$ et si le composé $\bar{w} \circ_q x$ (resp. $x \circ_q \bar{w}$) existe pour un $0 \leq q < p$, alors ce composé est une n-cellule E-élémentaire.

Il résulte des hypothèses que les E-factorisations élémentaires sont en nombre fini et donc que le nombre de n-cellules E-élémentaires est également fini. Comme par hypothèse les n-cellules dans E engendrent C, il en est évidemment de même des n-cellules E-élémentaires, et il reste donc à démontrer pour conclure que ces dernières engendrent par composition un nombre fini de n-cellules.

D'abord remarquons qu'on peut toujours se ramener par de multiples inductions à des $(n-1)$-compositions; en effet la règle de Godement permet par exemple pour une q-composition avec $q < n-1$ d'écrire:

$$x' \circ_q x = (\overline{\mathrm{cod}_{q+1}(x')} \circ_q x) \circ_{q+1} (x' \circ_q \overline{\mathrm{dom}_{q+1}(x)}).$$

Considérons les n-chemins E-irréductibles, c'est-à-dire les suites finies $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ de n-cellules élémentaires telles que le composé $x = x_1 \circ_{n-1} x_2 \circ_{n-1} \cdots \circ_{n-1} x_k$ soit défini et telles que pour tout $1 \leq i < j \leq k$ la cellule composée $x_{ij} = x_i \circ_{n-1} x_{i+1} \circ_{n-1} \cdots \circ_{n-1} x_j$ soit non dégénérée. Le nombre de ces n-chemins E-irréductibles est nécessairement fini car le nombre de n-cellules E-élémentaires est fini et l'entier $k+1$ est majoré par le nombre d'éléments de C_{n-1}. En effet, si $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ est un tel n-chemin E-irréductible, les $(n-1)$-cellules

$$y_0 = \mathrm{cod}_{n-1}(x_1),\ y_i = \mathrm{dom}_{n-1}(x_i) \ \ (1 \leq i \leq k)$$

doivent être, d'après les hypothèses, distinctes. Il résulte alors de la proposition 1 que $\tilde{\Delta}^n$ est finie. $\square$

3 Construction de l'objet cosimplicial $\mathcal{O}'$.

On va commencer par construire un foncteur $\mathcal{O}' : \mathbf{\Delta}' \longrightarrow \infty$-**Cat** qui sera prolongé plus loin à $\mathbf{\Delta}$.

On définit $\mathcal{O}'$ de la manière suivante:

- sur les objets: $\mathcal{O}'([n]) = \tilde{\Delta}^n$,pour tout $n \in \mathbf{N}$.

- sur les morphismes: pour toute application strictement croissante f :

$[n] \longrightarrow [m]$ on définit le foncteur $\mathcal{O}'(f) : \tilde{\Delta}^n \longrightarrow \tilde{\Delta}^m$ par la factorisation:

$$\begin{tikzcd} \tilde{\Delta}^n \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \tilde{\Delta}^m \arrow[d] \\ B(K^n) \arrow[r, "B(Z(Y(f)))"'] & B(K^m) \end{tikzcd}$$

où $Y : \mathbf{\Delta}' \longrightarrow \mathbf{Simpl}'$ est le plongement de Yoneda et où les flèches verticales sont des inclusions. La factorisation signifie que $B(Z(Y(f)))$, que l'on notera simplement f par la suite, transforme toute cellule génératrice de $\tilde{\Delta}^n$ en une cellule de $\tilde{\Delta}^m$. Plus précisément on établit la formule $f(\mathrm{cell}_p^n(\mathbf{s})) = \mathrm{cell}_p^n(f_p(\mathbf{s}))$ pour tout $\mathbf{s} \in \Delta'^n_p$. Pour cela, il suffit de vérifier que $f(c^-) = f(c)^-$ pour tout $c \in K_p^n$ et d'utiliser le fait que $Z(Y(f))$ est un morphisme de complexes de chaînes.

Nous allons montrer maintenant que le foncteur $\mathcal{O}' : \mathbf{\Delta}' \longrightarrow \infty\text{-}\mathbf{Cat}$ se prolonge à $\mathbf{\Delta}$ tout entier. La construction de ce prolongement est moins évidente et nécessite une procédure par étapes.

Tout d'abord nous allons caractériser dans la proposition 3 ci-dessous l'expression des différents termes des cellules génératrices de $\tilde{\Delta}^n$. On utilisera les notations suivantes:

- $I_n = (0, 1, \ldots, n)$ est l'unique n-simplexe de Δ'^n;
- $< i_1, i_2, \ldots, i_k >$ pour $0 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$, note le $(n-k)$-simplexe de Δ'^n obtenu à partir de I_n en supprimant $i_1, i_2, \ldots, i_k$;
- $(\partial^-(c)) = (\partial(c))^-$ pour tout $c \in K_p^n$;
- $\sum S$ est une abréviation pour $\sum_{s \in S} s$.

proposition 3 *Pour tout $1 \leq k \leq n$, on a:*

$$(\partial^-)^k(I_n) = \sum\{< i_1, i_2, \ldots, i_k > \mid\ i_1 \equiv 1, i_2 \equiv 2, \ldots, i_k \equiv k \pmod 2\}.$$

preuve: elle se fait par induction sur k.

D'abord pour $k = 1$ elle se réduit à la définition

$$\partial^-(I_n) = \sum\{< i > | i \equiv 1\},$$

où l'on note simplement $\equiv$ la congruence modulo 2. Ensuite supposons la formule vraie pour k et démontrons-la pour $k+1$. On s'appuiera sur la formule:

$$
\begin{aligned}
&\partial(< i_1, i_2, \ldots, i_k >) = \\
&\quad \sum_{j=0}^{i_1-1} (-1)^j < j, i_1, \ldots, i_k > \\
&\quad + \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{j=i_l-1}^{i_{l+1}-1} (-1)^{j-l} < i_1, \ldots, i_l, j, i_{l+1}, \ldots, i_k > \\
&\quad + \sum_{j=i_k+1}^{n} (-1)^{j-k} < i_1, \ldots, i_k, j >
\end{aligned}
$$

pour tout $< i_1, i_2, \ldots, i_k >$ tel que $i_1 \equiv 1, i_2 \equiv 2 \ldots, i_k \equiv k$.

Cette formule nous permet d'obtenir le calcul des coefficients des différents termes en
$< j_1, j_2, \ldots, j_{k+1} >$ qui apparaissent dans le calcul de $\partial((\partial^-)^k I_n)$ puis celui de $(\partial^-)^n_{k+1}$. Pour un simplexe $< j_1, j_2, \ldots, j_{k+1} >$ on peut ainsi évaluer la contribution de chacun des
$< i_1, i_2, \ldots, i_k >$, $i_1 \equiv 1, i_2 \equiv 2 \ldots, i_k \equiv k$, en faisant un raisonnement par cas.

- Si $j_1 \equiv 0$, $< j_1, j_2, \ldots, j_{k+1} >$ ne peut apparaître dans une dérivation que sous la forme $< j, i_1, \ldots, i_k >$ avec $i_1 \equiv 1, i_2 \equiv 2, \ldots, i_k \equiv k$. Cela est conséquence de l'hypothèse d'induction sur la contrainte modulo 2. Son coefficient est égal à $(-1)^j = 1$ et donc $< j_1, j_2, \ldots, j_k >$ ne figure pas dans $(\partial^-)^{k+1} I_n$.

- Si $j_1 \equiv 1, j_2 \equiv 2 \ldots j_{k+1} \equiv k+1$, la seule apparition de $< j_1, j_2, \ldots, j_{k+1} >$ est sous la forme $< i_1, \ldots, i_k, j >$ avec $i_1 \equiv 1, i_2 \equiv 2 \ldots i_k \equiv k$. Son coefficient est égal à $(-1)^{j+k} = (-1)^{k+1+k} = -1$. Donc ce terme apparaît une fois et une seule dans $(\partial^-)^{k+1} I_n$.

- Si $j_1 \equiv 1, j_2 \equiv 2 \ldots j_l \equiv l$ et $j_{l+1} \equiv l$ pour un certain l, $1 \leq l \leq k$, $< j_1, j_2, \ldots, j_{k+1} >$ apparaît exactement deux fois correspondant aux dérivations en $< i_1, i_2, \ldots, i_k >$ et $< i_1^{'}, i_2^{'}, \ldots, i_k^{'} >$. Précisément:

$$
\begin{aligned}
< j_1, j_2, \ldots, j_{k+1} > &= < i_1, \ldots, i_{l-1}, i_l, j, i_{l+1}, \ldots, i_k >, \\
< j_1, j_2, \ldots, j_{k+1} > &= < i'_1, \ldots, i'_{l-1}, i'_l, j', i'_{l+1}, \ldots, i'_k >,
\end{aligned}
$$

  donc avec $j_1 = i_1 = i'_1$, $\ldots$, $j_{l-1} = i_{l-1} = i'_{l-1}$, $j_l = i_l = j'$, $j_{l+1} = j = i'_l$, $j_{l+2} = i_{l+1} = i'_{l+1}$, $\ldots$, $j_k = i_k = i'_k$. Les coefficients sont respectivement égaux à $(-1)^{j-l} = (-1)^{2l} = 1$ et $(-1)^{j'-(l-1)} = -1$ et donc se neutralisent. Donc $< j_1, j_2, \ldots, j_{k+1} >$ n'apparaît pas dans $\partial((\partial^-)^k(I_n))$ et donc non plus dans $(\partial^-)^{k+1}(I_n)$. Il est clair que, en examinant ces différents cas, on établit la formule demandée. $\square$

Revenons à la construction d'un prolongement de $\mathcal{O}'$ à $\boldsymbol{\Delta}$. A toute application croissante (non nécessairement stricte) $f : [n] \longrightarrow [m]$ et à tout entier $p \in \mathbf{N}$ on associe une application linéaire $f_p : K^n_p \longrightarrow K^m_p$ en posant pour tout $\mathbf{s} = (s_0, s_1, \ldots, s_p) \in \Delta'^n_p$:

$$f_p(\mathbf{s}) = [f(s_0), f(s_1), \ldots, f(s_p)]$$

où le crochet du second membre est défini pour tout $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_p \leq m$ par:

$$[t_0, t_1, \ldots, t_p] = \begin{cases} (t_0, t_1, \ldots, t_p) & \text{si} \quad t_0 < t_1 < \ldots < t_p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On constate sans difficulté que ceci définit d'abord un homomorphisme de complexes $K^f : K^n \longrightarrow K^m$ et ensuite un foncteur en posant: $K([n]) = K^n$, $K(f) = K^f$. Nous obtenons ainsi un foncteur composé:

$$\boldsymbol{\Delta} \xrightarrow{K} \mathbf{Compl} \xrightarrow{B} \infty\text{-}\mathbf{Cat}$$

dont nous allons extraire $\mathcal{O}'$ comme sous-foncteur.

Pour cela nous allons montrer que pour tout $f : [n] \longrightarrow [m]$ dans $\boldsymbol{\Delta}$, le foncteur $B(K^f) : B(K^n) \longrightarrow B(K^m)$ transforme les cellules génératrices de $\tilde{\Delta}^n$ en cellules génératrices de $\tilde{\Delta}^m$. Cette propriété a déjà été démontrée dans le cas où f est strictement croissante, montrons la maintenant pour les surjections qui sont de la forme $f : [n+1] \longrightarrow [n]$ et définies par:

$$f(i) = \begin{cases} i & \text{si} \quad 0 \leq i \leq j \\ i-1 & \text{si} \quad j < i \leq n+1 \end{cases}$$

et où l'entier j tel que $0 \leq j \leq n+1$ est fixé.

proposition 4 *f étant la surjection définie ci-dessus (et donc pour j fixé), on a:*

$$f(\mathrm{cell}(I_{n+1})) = \mathrm{id}^{n+1}_n(\mathrm{cell}(I_n))$$

où on a noté simplement f au lieu de $B(K^f)$ au premier membre.

preuve: il suffit de vérifier que: $f_{n+1}(I_{n+1}) = 0$ et $f_{n+1-k}((\partial^-)^k(I_{n+1})) = (\partial^-)^{k-1}(I_n)$ pour tout $1 \leq k \leq n+1$. En tenant compte de la caractérisation de $(\partial^-)^k(I_{n+1})$ donnée dans la proposition 3, il reste à montrer que $f_{n+1-k} : K^{n+1}_{n+1-k} \longrightarrow K^n_{n+1-k}$ vérifie $f_{n+1-k}(\sum J) = \sum J'$ où:

$$\begin{aligned} J = \{ &< i_1, i_2, \ldots, i_k > \mid \ i_1 \equiv 1, \ldots, i_k \equiv k \pmod 2 \\ &\text{et} \quad 0 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n+1 \} \\ J' = \{ &< i'_1, i'_2, \ldots, i'_{k-1} > \mid \ i'_1 \equiv 1, \ldots, i'_{k-1} \equiv k-1 \pmod 2 \\ &\text{et} \quad 0 \leq i'_1 < i'_2 < \ldots < i'_{k-1} \leq n \} \end{aligned}$$

Précisément on va montrer que f transforme tout $< i_1, i_2, \ldots, i_k >$ en 0 ou en un $< i'_1, i'_2, \ldots, i'_{k-1} >$ et inversement que tout $< i'_1, i'_2, \ldots, i'_{k-1} >$ est obtenu d'une façon et d'une seule de cette manière. Considérons donc un $< i_1, i_2, \ldots, i_k >$ selon la position de j et $j+1$ par rapport aux $i_1, i_2, \ldots, i_k$. On a différents cas:

- Si $j, j+1 \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, on a:
$$f(< i_1, i_2, \ldots, i_k >) = 0 \quad \text{car} \quad f(j) = f(j+1)$$
- Si $j = i_l$ et $j+1 \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ ou si
$j+1 = i_l$ et $j \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, on a:
$$f(< i_1, i_2, \ldots, i_k >) =< i_1, \ldots, i_{l-1}, i_{l+1} - 1, \ldots, i_k - 1 >$$
et si on pose $< i'_1, i'_2, \ldots, i'_{k-1} >=< i_1, \ldots, i_{l-1}, i_{l+1} - 1, \ldots, i_{k-1} >$ on a bien $i'_h \equiv h$ pour tout $1 \leq h \leq k-1$ puisque $i_{h+1} - 1 \equiv i_h \equiv h$.
- Si $j = i_l$ et $j+1 = i_{l+1}$, on a:
$$f(< i_1, i_2, \ldots, i_k >) =< i_1, \ldots, i_l, i_{l+2} - 1, \ldots, i_k - 1 >$$
et si on pose $< i'_1, i'_2, \ldots, i'_{k-1} >=< i_1, \ldots, i_l, i_{l+2} - 1, \ldots, i_k - 1 >$ on a bien $i'_h \equiv h$ comme ci-dessus.

Considérons maintenant un $< i'_1, i'_2, \ldots, i'_{k-1} >$ selon la parité de la position de j par rapport aux $i'_1, i'_2, \ldots, i'_{k-1}$. On a les différents cas:

- Si $j \notin \{i'_1, i'_2, \ldots, i'_{k-1}\}$:
$$f(< i_1, i_2, \ldots, i_k >) =< i'_1, i'_2, \ldots, i'_{k-1} >$$
a pour solution selon les cas:
  - Si $i'_l < j < i'_{l+1}$ et $j \equiv l+1$,
  $$< i_1, i_2, \ldots, i_k >=< i'_1, \ldots, i'_l, j, i'_{l+1} + 1, \ldots, i'_{k-1} + 1 >$$
  - Si $i'_l < j < i'_{l+1}$ et $j \equiv l$,
  $$< i_1, i_2, \ldots, i_k >=< i'_1, \ldots, i'_l, j+1, i'_{l+1} + 1, \ldots, i'_{k-1} + 1 >$$

  (Raisonnement analogue dans les cas limites $j < i'_1$ et $i'_{k-1} < j$)
- Si $j = i'_l$:
$$f(< i_1, i_2, \ldots, i_k >) =< i'_1, i'_2, \ldots, i'_k >$$
a pour solution:
$$< i_1, i_2, \ldots, i_k >=< i'_1, \ldots, i'_{l-1}, j, j+1, i'_{l+1} + 1, \ldots, i'_{k-1} + 1 > .$$

Et ces solutions sont évidemment uniques. Ce qui termine la preuve. $\square$

Le résultat précédent se généralise ainsi:

proposition 5 *f vérifiant les même hypothèses que dans la proposition 4, on a, pour tout $\mathbf{s} \in \Delta_p^n$, selon les cas:*

1. *si $f(\mathbf{s}(i)) < f(\mathbf{s}(i+1))$ pour tout $0 \leq i \leq p-1$,*

$$f(\mathrm{cell}(\mathbf{s})) = \mathrm{cell}(f_p(\mathbf{s})).$$

2. *si $f(\mathbf{s}(i_0)) < f(\mathbf{s}(i_0)+1)$ pour un $0 \leq i_0 \leq p-1$,*

$$f(\mathrm{cell}(\mathbf{s})) = \mathrm{id}(\mathrm{cell}(\mathbf{s}'))$$

où $\mathbf{s}' : [p-1] \longrightarrow [n]$ est définie par:

$$\mathbf{s}'(i) = \begin{cases} f(\mathbf{s}(i)) & si\ i \leq i_0 \\ f(\mathbf{s}(i)) - 1 & si\ i_0 + 1 \leq i. \end{cases}$$

(ou encore $\mathbf{s}' = (\ f(\mathbf{s}(0)), \ldots, f(\widehat{\mathbf{s}(i_0)}), \ldots, f(\mathbf{s}(p)))\ $).

preuve: $\mathbf{s}$ étant strictement croissante, notons d'abord que:

$$f_p(\mathbf{s}) = f_p(s_p(I_p)) = (f \circ \mathbf{s})_p(I_p),$$

$$\mathrm{cell}(\mathbf{s}) = \mathrm{cell}(s_p(I_p)) = \mathbf{s}(\mathrm{cell}(I_p)).$$

1. Sous la première hypothèse l'application $\mathbf{s}' = f \circ \mathbf{s}$ est strictement croissante, donc:

$$f(\mathrm{cell}(\mathbf{s})) = f(\mathbf{s}(\mathrm{cell}(I_p))) = \mathbf{s}'(\mathrm{cell}(\mathrm{I_p})) = \mathrm{cell}(\mathbf{s}'(I_p)) = \mathrm{cell}(f_p(\mathbf{s}))$$

2. Sous la seconde hypothèse notons $f' : [p] \longrightarrow [p-1]$ l'application définie par:

$$f'(i) = \begin{cases} i & \text{si } i \leq i_0 \\ i-1 & \text{si } i > i_0. \end{cases}$$

(Remarquons que l'entier i_0 s'il existe est unique.) Alor le carré suivant commute:

$$\begin{tikzcd} {[p]} \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f'"'] & {[n+1]} \arrow[d, "f"] \\ {[p-1]} \arrow[r, "s'"'] & {[n]} \end{tikzcd}$$

où $\mathbf{s}, \mathbf{s}'$ sont strictement croissantes et f, f' surjectives. Alors:

$$f(\mathrm{cell}(\mathbf{s})) = (f \circ \mathbf{s})(\mathrm{cell}(I_p)) = (\mathbf{s}' \circ f')(\mathrm{cell}(I_p)) = \mathbf{s}'(f'(\mathrm{cell}(I_p))).$$

D'après la proposition 4 on a $f'(\mathrm{cell}(I_p)) = \mathrm{id}(\mathrm{cell}(I_{p-1}))$ donc:

$$\begin{aligned} &\mathbf{s}'(f'(\mathrm{cell}(I_p))) = \mathbf{s}'(\mathrm{id}(\mathrm{cell}(\mathrm{I_{p-1}}))) = \\ &\quad \mathrm{id}(\mathbf{s}'(\mathrm{cell}(I_{p-1}))) = \mathrm{id}(\mathrm{cell}(\mathbf{s}'_{p-1}(I_{p-1}))) = \mathrm{id}(\mathrm{cell}(\mathbf{s}')). \ \square \end{aligned}$$

Nous avons ainsi démontré que pour toute application $f : [n+1] \longrightarrow [n]$ croissante et surjective, l'∞-foncteur $f : B(K^{n+1}) \longrightarrow B(K^n)$ transforme les cellules génératrices de $\tilde{\Delta}^{n+1}$ en cellules génératrices de $\tilde{\Delta}^n$. D'où la factorisation.

Finalement, étant donné que toute application $f : [n] \longrightarrow [m]$ est un composé d'injections et de surjections croissantes du type de celles décrites ci-dessus on en déduit que l'∞-foncteur $f : B(K^n) \longrightarrow B(K^m)$ se factorise en un sous-foncteur noté $\mathcal{O}'(f) : \tilde{\Delta}^n \longrightarrow \tilde{\Delta}^m$. De plus la fonctorialité du composé:

$$\mathbf{\Delta} \xrightarrow{K} \mathbf{Compl} \xrightarrow{B} \infty\text{-}\mathbf{Cat}$$

entraîne celle de $\mathcal{O}' : \mathbf{\Delta} \longrightarrow \infty\text{-}\mathbf{Cat}$. Ce foncteur est évidemment un prolongement de celui déjà défini $\mathcal{O}' : \mathbf{\Delta}' \longrightarrow \infty\text{-}\mathbf{Cat}$.

Conclusion.

A partir de cet objet cosimplicial $\mathcal{O}' : \mathbf{\Delta} \longrightarrow \infty\text{-}\mathbf{Cat}$ le foncteur nerf $N : \infty\text{-}\mathbf{Cat} \longrightarrow \mathbf{Simpl}$ est obtenu simplement en posant:

$$N(C)([n]) = \mathrm{Hom}_{\infty\text{-}\mathbf{Cat}}(\mathcal{O}'([n]), C)$$

pour toute ∞-catégorie C, pour tout objet $[n]$ de $\mathbf{\Delta}$ et en étendant de manière évidente cette formule aux morphismes. On peut ainsi calculer la cohomologie, ou plutôt *une* cohomologie, d'une ∞-catégorie C en la ramenant à celle de l'objet simplicial $N(C)$.

References

[Bou] D.Bourn, *Another denormalisation theorem for the abelian chain complexes*. Journal of Pure and Applied Algebra 66 (1990) 229-249.

[Bu] A.Burroni, *Higher-dimensional word problem with applications to equational logic*.Theoretical Computer science 115 (1993) 43-62.

[Str] R.Street,*The Algebra of oriented simplexes*, J.P.A.A. 49 (1987) 283-335.