Feuille de TD numéro 9

Optimisation L3 - Deuxième semestre 2009-2010 - Université Denis-Diderot

Pénalisation des contraintes.

Exercice 1. Soit A une matrice $N \times N$ symétrique définie positive, b un vecteur de $\mathbb{R}^N$, et soit J une fonctionnelle définie sur $\mathbb{R}^N$ par :

$$J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v)$$

On considère le problème d'optimisation sous contrainte suivant :

$$(\mathcal{P}) \qquad \min_{v \in K} J(v)$$

où $K = \{x \in \mathbb{R}^N, \quad Cx = f\}$, supposé non vide, avec $C \in \mathbb{R}^{p \times N}$ et $f \in \mathbb{R}^p$ (p contraintes d'égalité).

On introduit la fonction $\varphi(x) = \frac{1}{2}\|Cx - f\|_2^2$, pour $\epsilon > 0$, la fonctionnelle $J_\epsilon(v) := J(v) + \frac{1}{\epsilon}\varphi(v)$, et le problème

$$(\mathcal{P}_\epsilon) \qquad \min_{v \in \mathbb{R}^N} J_\epsilon(v)$$

On dit que le problème $(\mathcal{P}_\epsilon)$ correspond à une approximation du problème $(\mathcal{P})$ par "pénalisation", et $\frac{1}{\epsilon}\varphi$ est la fonction de pénalisation. Le but de l'exercice est de montrer que lorsque ϵ est petit, le problème avec contrainte peut être approché par le problème sans contrainte $(\mathcal{P}_\epsilon)$.

1. Montrer qu'il existe un unique minimum de $\inf_K J$. Rappeler les conditions d'optimalité correspondantes. Dans la suite, on notera u ce minimum.
2. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un unique u_ϵ dans $\mathbb{R}^N$ qui réalise le minimum de J_ϵ sur $\mathbb{R}^N$.
3. Montrer que $J_\epsilon(u_\epsilon) \leq J_\epsilon(u)$. En déduire que $J(u_\epsilon)$ reste borné, puis que
$$\exists C \geq 0, \forall \epsilon > 0, \quad \|u_\epsilon\| \leq C.$$
4. On considère une suite $\epsilon_n > 0$ qui converge vers 0 et $v_n := u_{\epsilon_n}$. Montrer qu'il existe une suite extraite de v_n qui converge vers un element $v \in \mathbb{R}^N$. Montrer que $v \in K$. Montrer enfin que $J(v) \leq J(u)$. En déduire que $v = u$.
5. On désire montrer que toute la suite u_ϵ converge vers u. Si ce n'était pas le cas, montrer qu'il existerait un $\delta > 0$ et une sous-suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ extraite de $(u_\epsilon)_{\epsilon > 0}$, tels que
$$\forall n \geq 0, \quad \|w_n - u\| \geq \delta$$
A l'aide de la question précédente, aboutir à une contradiction, et conclure.
6. Calculer $\nabla\varphi(v)$.
7. Ecrire les conditions d'optimalité pour u_ϵ.
8. Soit $\mu_\epsilon := C^T(\frac{Cu_\epsilon - f}{\epsilon})$. Montrer que μ_ϵ converge. On note μ la limite.
9. Montrer que $\mu_\epsilon \in F := C^T(\mathbb{R}^N)$ pour tout $\epsilon > 0$. Puis montrer que $\exists \lambda \in \mathbb{R}^p$ tel que $\mu = C^T\lambda$. Retrouver ainsi les conditions d'optimalité habituelles pour u.

10. On suppose que C est surjective. Montrer que CC^T est inversible. En déduire que

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{Cu_\epsilon - f}{\epsilon} = \lambda.$$

Remarque : cette approche est assez générale. On pourra à titre d'exercice l'étendre au contraintes d'inégalité $Cv \leq f$, en remplacant la fonction φ précédente par la fonction $\varphi(v) := \frac{1}{2}\| \max(Cv-f, 0)\|^2$ (au moins pour les questions 1 à 7).