
FEUILLE DE TD NUMÉRO 4

Optimisation L3 - Deuxième semestre 2009-2010 - Université Denis-Diderot

Contraintes d'inégalités + éléments de correction

Exercice 1.

Soit $J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$ avec A symétrique, positive, et b un vecteur de \mathbb{R}^n . On note $K = \{x \in \mathbb{R}^n, Cx \leq f\}$ où $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $f \in \mathbb{R}^p$, et on supposera toujours que K est un ensemble non vide (donc ici la i -ième contrainte correspond à $\varphi_i(x) = \sum_j c_{ij}x_j - f_i \leq 0$).

Si x et y sont des vecteurs, on utilise les notations $x \geq 0$ (pour $x_i \geq 0, \forall i$), $x \geq y$ (pour $x_i \geq y_i, \forall i$) et $\min(x, y)$ (pour le vecteur de composantes $\min(x_i, y_i)$).

1. On suppose que u est un minimum local de J sur K . Montrer alors que $\exists \lambda \in \mathbb{R}^p$,

$$Au + C^T \lambda = b \tag{1a}$$

$$\lambda \geq 0, Cu - f \leq 0, (\lambda, Cu - f) = 0. \tag{1b}$$

2a. Montrer que pour tout $\rho > 0$, (1b) équivaut à

$$\lambda \geq 0 \quad \text{et} \quad \left(\forall \mu \geq 0, (\mu - \lambda, \rho(Cu - f)) \leq 0 \right). \tag{2}$$

ou, de façon équivalente, à

$$\lambda \geq 0 \quad \text{et} \quad \lambda = \Pi_{(\mathbb{R}_+)^p}(\lambda + \rho(Cu - f)). \tag{3}$$

2b. Vérifier que (1b) est équivalent à

$$\min(\lambda, -(Cu - f)) = 0, \tag{4}$$

la dernière relation étant à comprendre au sens composante par composante:

$$\min(\lambda_i, -(Cu - f)_i) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p.$$

3. Réciproquement montrer que si $u \in \mathbb{R}^n$ vérifie (1a) et par exemple (4) pour un $\lambda \in \mathbb{R}^p$, alors u est un minimum global de J sur K .

4. Donner une condition sur A pour avoir unicité de u (quelque soit les données C et f).

5. On suppose que le minimum u est unique. Montrer que si C^T est injective, alors il y a unicité du λ . Vérifier aussi que C^T est injective $\Leftrightarrow (\nabla \varphi_1, \dots, \nabla \varphi_p)$ sont linéairement indépendants.

6. Rappeler pourquoi C^T injective $\Leftrightarrow C$ est de rang maximal (c'est à dire de rang p).

Corrigé 1. Le but de cet exercice est de manipuler l'écriture des CO d'ordre 1 du cours (relations "KKT") de revoir le cas CN (conditions nécessaires d'optimalité) et le cas CS (conditions

suffisantes d'optimalité). On notera que A positive n'implique pas l'existence d'un minimum, mais ca n'est pas important ici.

1.) Ecrire les conditions d'optimalité d'ordre 1.

2a.)

2b.) Utiliser que $\min(a, b) = 0$ ssi ($a \geq 0, b \geq 0$ et $a = 0$ ou $b = 0$).

3.) Dans le cas J convexe et φ_i affine (convexe marcherait aussi), on a vu (Th.) que si u vérifie les CO d'ordre 1 alors c'est un minimum global.

4.) A : SDP, car alors on a vu que J est strictement convexe.

5.) Si λ_1 et λ_2 sont deux solutions, alors par différence $C^T(\lambda_2 - \lambda_1) = 0$. Si C^T est injective, on en déduit que $\lambda_2 - \lambda_1 = 0$, d'où l'unicité du λ . Ensuite, on rappelle qu'on peut écrire $\varphi_i(x) = (c_i, x) - f_i$, avec $c_i = (c_{i1}, \dots, c_{in})^T$, donc $[\nabla\varphi_1, \dots, \nabla\varphi_p] = [c_1, \dots, c_p] = C^T$. L'injectivité d'une matrice équivaut à l'indépendance linéaire de ses vecteurs lignes ou de ses vecteurs colonnes, d'où le résultat.

6.) $C^T : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$, donc $\text{rang}(C^T) + \dim(\text{Ker}C^T) = p$, et C^T injective $\Leftrightarrow \text{rang}(C^T) = p = \text{rang}(C)$ (le rang des vecteurs lignes est le même que le rang des vecteurs colonnes). Enfin p est le rang maximal possible de la matrice C , puisque composée de p lignes. Si $p > n$, C^T n'est jamais injective et λ n'est pas nécessairement unique.

Exercice 2. On considère la matrice $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ et le vecteur $b \in \mathbb{R}^3$ définis par:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Calculer le minimum de la fonction $J : v \in \mathbb{R}^3 \mapsto \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v)$ sur l'ensemble K :

(a) $K := \{v \in \mathbb{R}^3; v_2 + v_3 = 0\}$

(b) $K := \{v \in \mathbb{R}^3; v_1 \geq 0, v_2 + v_3 = 0\}$

Dans le cas (b) on pourra éventuellement ré-écrire K qu'avec des contraintes d'inégalités affines.

Corrigé 2. Notons d'abord que la matrice A est définie-positive. Donc la fonctionnelle J admet bien un minimum unique qui est caractérisé par l'inéquation d'Euler (CO d'ordre 1 - cas convexe).

(a) Supposons que $K = \{v \in \mathbb{R}^3; v_2 + v_3 = 0\}$. On note par $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et par u le minimum de J sur K . Les conditions d'optimalité s'écrivent:

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad Au + C^T \lambda = b \quad \text{et} \quad Cu = 0.$$

Ou encore,

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} 2u_1 - u_2 & = -3 \\ -u_1 + 2u_2 - u_3 + \lambda & = 1 \\ -u_2 + 2u_3 + \lambda & = 2 \\ u_2 + u_3 & = 0 \end{cases} \quad (5)$$

La résolution de ce système donne que

$$u = (-19/11 \quad -5/11 \quad 5/11)^\top, \quad \lambda = 7/11.$$

- (b) Afin d'utiliser le théorème du cours du cas "contraintes d'inégalité" (le cas mixte n'étant pas encore vu par tous), on réécrit la contrainte $v_2 + v_3 = 0$ sous la forme $v_2 + v_3 \leq 0$ et $-v_2 - v_3 \leq 0$. En posant

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

l'ensemble des contraintes se réécrit: $K = \{v \mid \tilde{C}v \leq 0\}$. Les conditions d'optimalité impliquent:

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0, \quad Au + \tilde{C}^\top \lambda = 0, \quad \tilde{C}u \leq 0, \quad \text{et } \lambda_i [\tilde{C}u]_i = 0.$$

Ce qui donne:

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0, \quad \begin{cases} 2u_1 - u_2 - \lambda_1 & = -3 \\ -u_1 + 2u_2 - u_3 + \lambda_2 - \lambda_3 & = 1 \\ -u_2 + 2u_3 + \lambda_2 - \lambda_3 & = 2 \\ u_2 + u_3 & = 0 \end{cases} \quad \text{et } \lambda_1 u_1 = 0, \quad u_1 \geq 0$$

ou encore,

$$\exists \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} 2u_1 - u_2 - \lambda_1 & = -3 \\ -u_1 + 2u_2 - u_3 + \lambda & = 1 \\ -u_2 + 2u_3 + \lambda & = 2 \\ u_2 + u_3 & = 0 \end{cases} \quad \text{et } \lambda_1 u_1 = 0, \quad u_1 \geq 0.$$

Pour la résolution de ce système, on va distinguer 2 cas. On suppose d'abord que $\lambda_1 = 0$. Dans ce cas la solution (u, λ) serait solution de (5) et vérifierait en plus $u_1 \geq 0$. Or, on a vu en (a) que l'unique solution de (5) ne vérifie pas $u_1 \geq 0$.

Reste le 2e cas où $u_1 = 0$ et $\lambda_1 > 0$:

$$\exists \lambda_1 > 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} -u_2 - \lambda_1 & = -3 \\ +2u_2 - u_3 + \lambda & = 1 \\ -u_2 + 2u_3 + \lambda & = 2 \\ u_2 + u_3 & = 0 \end{cases}$$

On trouve alors que la solution est:

$$u = (0 \quad -1/6 \quad 1/6)^T, \quad \lambda_1 = 19/6, \lambda = 3/2.$$

NB: On pourra traiter à nouveau, de façon analogue, l'exercice no 6 du TD-3.

Exercice 3.

On considère $K = (\mathbb{R}_+)^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$. On désire montrer que

$$\Pi_K(x) = (\max(x_i, 0))_{1 \leq i \leq n}.$$

- 1) Démontrer la propriété en dimension $n = 1$.
- 2) Dans le cas $n \geq 1$, en écrivant la définition de $\Pi_K(x)$ comme solution d'un problème de minimisation quadratique, montrer qu'on peut se ramener à n problèmes de minimisation indépendant en dimension 1 et conclure.