
FEUILLE DE TD NUMÉRO 4

Optimisation L3 - Deuxième semestre 2009-2010 - Université Denis-Diderot

Contraintes d'inégalités

Exercice 1.

Soit $J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$ avec A symétrique, positive, et b un vecteur de \mathbb{R}^n . On note $K = \{x \in \mathbb{R}^n, Cx \leq f\}$ où $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $f \in \mathbb{R}^p$, et on supposera toujours que K est un ensemble non vide (donc ici la i -ième contrainte correspond à $\varphi_i(x) = \sum_j c_{ij}x_j - f_i \leq 0$).

Si x et y sont des vecteurs, on utilise les notations $x \geq 0$ (pour $x_i \geq 0, \forall i$), $x \geq y$ (pour $x_i \geq y_i, \forall i$) et $\min(x, y)$ (pour le vecteur de composantes $\min(x_i, y_i)$).

1. On suppose que u est un minimum local de J sur K . Montrer alors que $\exists \lambda \in \mathbb{R}^p$,

$$Au + C^T \lambda = b \tag{1a}$$

$$\lambda \geq 0, Cu - f \leq 0, (\lambda, Cu - f) = 0. \tag{1b}$$

2a. Montrer que pour tout $\rho > 0$, (1b) équivaut à

$$\lambda \geq 0 \quad \text{et} \quad \left(\forall \mu \geq 0, (\mu - \lambda, \rho(Cu - f)) \leq 0 \right). \tag{2}$$

ou, de façon équivalente, à

$$\lambda \geq 0 \quad \text{et} \quad \lambda = \Pi_{(\mathbb{R}_+)^p}(\lambda + \rho(Cu - f)). \tag{3}$$

2b. Vérifier que (1b) est équivalent à

$$\min(\lambda, -(Cu - f)) = 0, \tag{4}$$

la dernière relation étant à comprendre au sens composante par composante:

$$\min(\lambda_i, -(Cu - f)_i) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p.$$

3. Réciproquement montrer que si $u \in \mathbb{R}^n$ vérifie (1a) et par exemple (4) pour un $\lambda \in \mathbb{R}^p$, alors u est un minimum global de J sur K .

4. Donner une condition sur A pour avoir unicité de u (quelque soit les données C et f).

5. On suppose que le minimum u est unique. Montrer que si C^T est injective, alors il y a unicité du λ . Vérifier aussi que C^T est injective $\Leftrightarrow (\nabla \varphi_1, \dots, \nabla \varphi_p)$ sont linéairement indépendants.

6. Rappeler pourquoi C^T injective $\Leftrightarrow C$ est de rang maximal (c'est à dire de rang p).

Exercice 2. On considère la matrice $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ et le vecteur $b \in \mathbb{R}^3$ définis par:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Calculer le minimum de la fonction $J : v \in \mathbb{R}^3 \mapsto \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v)$ sur l'ensemble K :

(a) $K := \{v \in \mathbb{R}^3; v_2 + v_3 = 0\}$

(b) $K := \{v \in \mathbb{R}^3; v_1 \geq 0, v_2 + v_3 = 0\}$

Dans le cas (b) on pourra éventuellement ré-écrire K qu'avec des contraintes d'inégalités affines.

Exercice 3.

On considère $K = (\mathbb{R}_+)^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$. On désire montrer que

$$\Pi_K(x) = (\max(x_i, 0))_{1 \leq i \leq n}.$$

1) Démontrer la propriété en dimension $n = 1$.

2) Dans le cas $n \geq 1$, en écrivant la définition de $\Pi_K(x)$ comme solution d'un problème de minimisation quadratique, montrer qu'on peut se ramener à n problèmes de minimisation indépendant en dimension 1 et conclure.