
Examen (Session de rattrapage) - 25 JUIN 2010

Optimisation L3 - Deuxième semestre 2009-2010 - Université Denis-Diderot

Durée: 3h

Les notes de cours sont autorisées. On pourra traiter les questions et les deux exercices indépendamment les uns des autres.

On note $n \geq 1$ un entier et A une matrice réelle de taille n . On dira que A est SDP si elle est symétrique définie positive. $\|\cdot\|$ désignera toujours la norme euclidienne dans l'espace considéré, et (\cdot, \cdot) le produit scalaire.

Exercice I.

On considère la fonctionnelle

$$J(x) = \|x\|^4 + \frac{1}{2}\|Ax + b\|^2,$$

où A est une matrice quelconque de $\mathbb{R}^{n \times n}$ et b un vecteur de \mathbb{R}^n .

1. Calculer $\nabla J(x)$.
2. Montrer que J est strictement convexe.
3. On suppose que A est une matrice SDP. Montrer que J est α -convexe.
4. On ne suppose plus que A est SDP. Donner un exemple de matrice A pour laquelle J n'est pas α -convexe.
5. Indiquer dans chacun des cas suivants, si J admet un minimum ou un maximum sur l'ensemble considéré, et si le minimum ou le maximum est unique :
 - (a) $K = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| < 1\}$.
 - (b) $K = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1\}$.

Dans la suite, D est une matrice de $\mathbb{R}^{n \times n}$ et c un vecteur de \mathbb{R}^n .

6. On travaille sur l'ensemble $K = \{x \in \mathbb{R}^n, Dx \geq c\}$.
 - (a) Montrer que J admet un unique minimum x sur K .
 - (b) Etudier si les contraintes sont qualifiées au point de minimum (éventuellement sous certaines hypothèses sur D , c et x , à préciser).
 - (c) En supposant que les contraintes sont qualifiées, écrire les conditions d'optimalité.
7. On travaille désormais sur l'ensemble $K = \{x \in \mathbb{R}^n, \|Dx + c\| \leq 1\}$.
 - (a) Montrer que J admet un unique minimum x sur K .
 - (b) Montrer que K peut se mettre sous la forme $K = \{x \in \mathbb{R}^n, \varphi(x) \leq 0\}$ où $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable *et convexe*, à déterminer.
 - (c) Etudier si les contraintes sont qualifiées au point de minimum (éventuellement sous certaines hypothèses sur D , c et x , à préciser).

- (d) En supposant que les contraintes sont qualifiées, écrire les conditions d'optimalité.
- (e) Proposer un algorithme d'Uzawa pour la minimisation de J sur K et étudier sa convergence à l'aide des résultats du cours.

Exercice II.

Soit A une matrice SDP de $\mathbb{R}^{n \times n}$, b un vecteur de \mathbb{R}^n , et J défini sur \mathbb{R}^n par :

$$J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v).$$

On cherche à approcher la solution du problème de minimisation de J sur K , avec

$$K := \{v \in \mathbb{R}^n \mid Cv = f\},$$

et où C est une matrice de $\mathbb{R}^{m \times n}$ et f un vecteur de \mathbb{R}^m .

1. Rappeler pourquoi le minimum u existe et est unique. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^m$ t.q. $Au + C^T \lambda = b$.

Dans la suite, on considère le méthode itérative suivante:

- (a) (u^0, λ^0) donnés dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$
- (b) A l'étape $k \geq 0$, (u^k, λ^k) étant connus, on calcule (u^{k+1}, λ^{k+1}) par :

$$\begin{aligned} u^{k+1} &= u^k - \rho_1(Au^k - b + C^T \lambda^k) \\ \lambda^{k+1} &= \lambda^k + \rho_1 \rho_2 (Cu^{k+1} - f) \end{aligned}$$

où ρ_1, ρ_2 sont deux réels strictement positifs.

2. Montrer que si $\rho_1 > 0$ est suffisamment petit, alors

$$\beta := \|I - \rho_1 A\|_2 < 1.$$

On a noté $\|\cdot\|_2$ la norme matricielle induite par la norme euclidienne: pour toute matrice M , on a $\|M\|_2 := \max_{x \neq 0} \frac{\|Mx\|}{\|x\|}$.

3. On choisit le paramètre ρ_1 pour que l'inégalité $\beta < 1$ ait lieu. On pose $\gamma = 2 - 2\beta - \rho_1^2 \rho_2 \|C\|_2^2$.

(a) Montrer que

$$\frac{\|\lambda^{k+1} - \lambda\|^2}{\rho_2} + \beta \|u^{k+1} - u\|^2 \leq \frac{\|\lambda^k - \lambda\|^2}{\rho_2} + \beta \|u^k - u\|^2 - \gamma \|u^{k+1} - u\|^2$$

(Indication : on pourra utiliser que $\rho_1 C^T (\lambda^k - \lambda) = (I - \rho_1 A)(u^k - u) - (u^{k+1} - u)$, après l'avoir démontré.)

(b) Montrer alors que si le paramètre ρ_2 est suffisamment petit, alors $\gamma > 0$.

4. En déduire que pour de tels choix de paramètres ρ_1 et ρ_2 , on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k = u$.
5. Que peut on dire de la suite (λ^k) lorsque $\text{rang}(C) = m$?
6. Quel peut être l'intérêt pratique de cet algorithme par rapport à un algorithme d'Uzawa classique ?