Corrigé Abrégé

1) • L'ensemble des contraintes $K \cap \{Cx = b\}$ est fermé, non vide, compact. J est continue. Donc $\exists$ un minimum.

• Unicité : car J est convexe (cours) sur $K \cap \{Cx = b\}$ convexe

2) $K = [-1,1]^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \leq d, \; -x \leq -g\}$

$= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Dx \leq f\}$ où $D = \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix}$ $f = \begin{bmatrix} d \\ -g \end{bmatrix}$

3) <u>C.O.</u> : (2) est un problème de minimisation d'une fonctionnelle J différentiable sur $\mathbb{R}^n$, sur un ensemble de contraintes mixtes d'inégalités et d'égalités affines.

On sait alors (cours) que les contraintes sont qualifiées en tout minimum u et qu'on peut écrire les conditions d'optimalités suivantes :

$$\begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R}^p \quad \exists \mu \in \mathbb{R}^{2n} & \text{tels que :} \\ \nabla J(u) + C^T\lambda + D^T\mu = 0 & \\ Cu = b & \\ \mu \geq 0, \quad Du - f \leq 0, \quad (\mu, Du - f) \overset{*}{=} 0 & \end{cases}$$

(avec $\underline{\nabla J(u) = u}$ ici)

(On peut aussi remplacer (*) par : $\forall i, \; \mu_i (Du - f)_i = 0$)

4) $x \geq 0, y \geq 0, \underset{\sum x_i y_i}{(x,y) = 0} \Rightarrow \forall i, \; x_i, y_i \geq 0$ et $(x_i \cdot y_i = 0 \;\forall i)$

$\Rightarrow \forall i, \; \min(x_i, y_i) = 0$

$\Rightarrow \min(x, y) = 0$

Réciproquement, $\min(x,y) = 0 \Rightarrow \forall i, \; \min(x_i, y_i) = 0$

$\Rightarrow \forall i, \; x_i \geq 0, y_i \geq 0, \; x_i y_i = 0$

$\Rightarrow x \geq 0, y \geq 0, \; (x, y) = 0$

La démonstration de (6) est analogue, on l'obtient à partir de (5) en utilisant que $\max(x,y) = -\min(-x, -y)$

5) Écrivons $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ où $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}^n$.

Les C.O s'écrivent : $\exists \lambda \in \mathbb{R}^p$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}^n$:

$$\left\{ \begin{array}{lll} u + C^T\lambda + \mu_1 - \mu_2 = 0 & & \\ Cu = b & & (**) \\ \mu_1, \mu_2 \geq 0 & u \leq d & (\mu_1, u-d) + (\mu_2, -u+g) = 0 \\ & -u \leq -g & \end{array} \right.$$

Or $\mu_1 \geq 0$, $u - d \leq 0 \Rightarrow (\mu_1, u-d) \leq 0$

$\mu_2 \geq 0$, $-u + g \leq 0 \Rightarrow (\mu_2, -u+g) \leq 0$

donc en fait $(\mu_1, u-d) = (\mu_2, -u+g) = 0$ en utilisant $(**)$

Donc : $$\left\{ \begin{array}{l} u + \mu_1 - \mu_2 = -C^T\lambda \\ Cu = b \\ \mu_1 \geq 0,\ -u+d \geq 0,\ (\mu_1, -u+d) = 0 \\ \mu_2 \geq 0,\ u - g \geq 0,\ (\mu_2, u-g) = 0 \end{array} \right.$$

D'où, en utilisant (Q4), le résultat. $\square$

6) Par théorème du cours, dans le cas de la minimisation d'une fonctionnelle J convexe (ce qui est le cas ici) sur un ensemble de contraintes affines $\mathcal{P}$, on sait que si u vérifie les conditions d'Optimalité d'ordre 1 de la question 3), ou de façon équivalente les Eq. (7), alors u est un minimum de J sur $\mathcal{P}$.

7) • $\min(\mu_1, -u+d) = 0 \Rightarrow u = u + \min(\mu_1, -u+d)$
$= \min(u + \mu_1, d)$

• $P_K(u + \mu_1) = P_{[g;d]}(u+\mu_1) = \max(g, \underbrace{\min(d, u+\mu_1)}_{u})$
$= \max(g, u)$
$= u$ car $u \geq g$

• $\min(\mu_2, u-g) = 0 = u + \min(\mu_2 - u, -g) = u - \max(u - \mu_2, g)$
Donc $\max(u - \mu_2, g) = 0$, puis $P_K(u - \mu_2) = \min(\max(u - \mu_2, g), d)$
$= \min(u, d) = u$
(car $u \leq d$) $\square$

8) $x_i \to \max(g_i, x_i)$ est une fonction $\nearrow$

de même, $x_i \to \min(d_i, x_i)$ est $\nearrow$

donc $x_i \to \min(\max(g_i, x_i), d_i)$ est $\nearrow$

donc $x \leq y \Rightarrow \forall i, \ (P_K(x))_i \leq (P_K(y))_i$
$$\Rightarrow P_K(x) \leq P_K(y)$$

9) D'après 5) on a $u + \mu_1 - \mu_2 = -C^T\lambda$

D'après 7) $u = P_K(u+\mu_1) = P_K(\underbrace{-\mu_2}_{\leq 0} - C^T\lambda)$
$$\leq P_K(-C^T\lambda) \quad \text{d'après 8).}$$

de même, $u = P_K(u - \mu_2) = P_K(\underbrace{\mu_1}_{\geq 0} - C^T\lambda) \geq P_K(-C^T\lambda)$ (@8).

d'où $u = P_K(-C^T\lambda)$ $\square$

10). Il s'agit d'un algorithme du type Uzawa.

$u = P_K(-C^T\lambda)$ donc $\forall v \in K, \ (-C^T\lambda - u, v - u) \leq 0$ (A)

$u^k = P_K(-C^T\lambda^k)$ donc $\forall v \in K \ (-C^T\lambda^k - u^k, v - u^k) \leq 0$ (B)

$\dfrac{u^k \text{ et } u \text{ sont dans } K:}{v = u^k \text{ dans (A)}} \Rightarrow (-C^T\lambda - u, u^k - u) \leq 0$

$v = u$ dans (B) $\Rightarrow (-C^T\lambda^k - u^k, u - u^k) \leq 0$
$$\| $$
$$-(-C^T\lambda^k - u^k, u^k - u)$$

En sommant, $(C^T(\lambda^k - \lambda) + (u^k - u), u^k - u) \leq 0$

donc $\|u^k - u\|^2 \leq -(C^T(\lambda^k - \lambda), u^k - u)$.

11) A) $\begin{cases} \lambda^{k+1} = \lambda^k + \rho\,(Cu^k - b) \\ \lambda \;\;\;\;= \lambda + \rho\,(Cu - b) \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \lambda^{k+1} - \lambda = (\lambda^k - \lambda) + \rho\,(C(u^k - u)).$$

$$\|\lambda^{k+1} - \lambda\|^2 = \|\lambda^k - \lambda\|^2 + 2\rho\underbrace{\left(C(u^k - u), (\lambda^k - \lambda)\right)}_{= +(u^k - u,\, C^T(\lambda^k - \lambda))} + \rho^2 \|C(u^k - u)\|^2$$

$$\leq \|\lambda^k - \lambda\|^2 - 2\rho\,\|u^k - u\|^2 + \rho^2 \|C\|^2 \|u^k - u\|^2$$

d'après (Q10)

$$\leq \|\lambda^k - \lambda\|^2 - \beta(\rho)\,\|u^k - u\|^2$$

où $\beta(\rho) = 2\rho - \rho^2 \|C\|^2$

B) donc avec $\rho_0 := 2/\|C\|^2$ on a $\beta(\rho) > 0 \quad \forall \rho \in]0, \rho_0[$.

12) Fixons $\rho \in]0, \rho_0[$: $\beta(\rho) > 0$ donc $\|\lambda^k - \lambda\|^2 \searrow_{k \to \infty}$ minorée,

donc il existe une limite $l = \lim_{k \to \infty} \|\lambda^k - \lambda\|$

D'où $\beta(\rho)\,\|u^k - u\|^2 \leq \|\lambda^k - \lambda\|^2 - \|\lambda^{k+1} - \lambda\|^2 \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

et $\lim_{k \to \infty} u^k = u$.

13). TEST D'ARRÊT :

A). Si $u^k = u^{k+1}$: On ne sait pas montrer que $Cu^k = b$ par exemple. Pas évident de conclure à la convergence.

(Rem : Si C^T n'est pas injective, on peut avoir $\lambda^k \neq \lambda^{k+1}$ tq $C^T\lambda^k = C^T\lambda^{k+1}$, auquel cas $u^k = u^{k+1}$ avec $\lambda^k \neq \lambda^{k+1}$.)

B) Si $\lambda^k = \lambda^{k+1}$: D'après (11), $\begin{cases} Cu^k = b. \\ u^k = P_K(-C^T\lambda^k) \end{cases}$

C'est les conditions d'optimalité (10). Par unicité du minimum, on a $u^k = u$. $\square$

14) A). $\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_2+x_3=1 \\ -x_1+x_3=1 \end{cases} \iff Cx=b$ avec $C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $b=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 5)

$\{x \mid Cx=b\} \neq \emptyset$ car $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est dedans

$C^T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ non injective car $C^T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=0$

donc à tout couple (u,λ) solution de (10),

$\left(u, \lambda+\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est aussi solution de (10).

B). • $\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_2+x_3=1 \end{cases} \iff Cx=b$ avec $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $b=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ici, $C^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est injective (càd $C^Tx=0 \Rightarrow x=0$).

• Unicité de λ : voir feuille suivante

• Montrons que $\lambda^k \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda$.

On a démontré que $\|\lambda^k-\lambda\| \searrow$ où (u,λ) solution de (10).

donc $\|\lambda^k-\lambda\| \leq \|\lambda^0-\lambda\|$ et (λ^k) est une suite bornée.

De toute sous-suite de (λ^k) (encore notée λ^k), on peut donc extraire une sous suite convergente vers un $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^p$

A la limite dans (11), on obtient $u=P_K(-C^T\bar{\lambda})$ Par unicité de λ tel que (u,λ) vérifie (10), on a donc $\bar{\lambda}=\lambda$. Ainsi (λ^k) est une suite

on sait aussi que $Cu=b$.

bornée qui n'admet qu'une seule valeur d'adhérence (λ), dans $\mathbb{R}^p$, ce qui implique que $\lambda^k \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda$. □

14B) $\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_2+x_3=1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 1+a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}.$ $\boxed{\text{Unicité de } \lambda}$

Écrivons l'équation $u = P_K(-C^T\lambda)$ explicitement avec les données de la question :

$$\begin{pmatrix} a \\ -a \\ 1+a \end{pmatrix} = P_K\left(-\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T \lambda\right), \text{ ou}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ -a \\ 1+a \end{pmatrix} = P_K\begin{pmatrix} -\lambda_1 \\ -\lambda_1-\lambda_2 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

On a aussi $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 1+a \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, i.e. $a \in [-1;0]$.

cas 1 : $a=-1 \Rightarrow \begin{cases} -\lambda_1 \leq -1 \\ -\lambda_1-\lambda_2 \geq 1 \\ -\lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda_1 \leq -1 \\ -\lambda_1 \geq 1 \end{cases}$, impossible.

cas 2 : $a=0$: pareil

cas 3 : $a \in]-1;0[\Rightarrow u = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 1+a \end{pmatrix}$ est strictement à l'intérieur de K

$\Rightarrow u = -C^T\lambda$. Or C^T est injective, donc la solution λ est unique

---

15 A) $-\underset{Q}{\text{Max}}\, J(x) = \underset{Q}{\text{Min}}(-J(x))$ où $Q = K \cap \{Cx=b\}$.

Le minimum de $-J$ existe et vérifie les C.O :

$\exists \lambda \in \mathbb{R}^p, \exists \mu_1, \mu_2 \geq 0,$ $\begin{cases} -v + \mu_1 - \mu_2 + C^T\lambda = 0 \\ Cv = b, \quad \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0, \quad v \leq d, \quad v \geq g, \\ (\mu_1, v-d) = 0, \quad (\mu_2, -v+g) = 0 \end{cases}$

B) Question piège : car il n'y a pas unicité du maximum !

Ex. $\underset{x\in[-1,1]}{\text{Max}} \frac{x^2}{2}$: atteint pour $x = \pm 1$ $\left(\text{avec } \begin{matrix} C=0 \\ \text{et } b=0 \end{matrix}\right)$

en fait ici $-J(x) = -\frac{x^2}{2}$ n'est pas convexe.