Examen - 28 Mai 2010

Optimisation L3 - Deuxième semestre 2009-2010 - Université Denis-Diderot

Durée: 3h

Les notes de cours sont autorisées. On pourra traiter les questions indépendamment les unes des autres.

Problème.

On note $\|x\|$ la norme euclidienne d'un élément $x \in \mathbb{R}^n$, et I la matrice identité de taille n.

Lorsque x et y sont des vecteurs de $\mathbb{R}^m$ ($m \geq 1$ entier), on utilisera la notation (x, y) pour le produit scalaire de x et de y, la notation $x \leq y$ si $\forall i,\ x_i \leq y_i$ (resp., $x \geq y$ si $\forall i,\ x_i \geq y_i$), et les notations $\min(x, y)$ ou $\max(x, y)$ pour désigner les vecteurs de composantes $\min(x_i, y_i)$ ou $\max(x_i, y_i)$, respectivement.

On note P_K la projection sur un convexe fermé non vide K ($K \subset \mathbb{R}^n$), et on rappelle la caractérisation suivante:

$$q = P_K(x) \quad \Leftrightarrow \quad \Big(y \in K,\ \text{et } \forall v \in K,\ (x - q, v - q) \leq 0 \Big) \tag{1}$$

On considère le problème de minimisation de la fonctionnelle $J(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ sur un ensemble de contraintes mixtes :

$$\min \Big\{ J(x) \mid x \in K,\ Cx = b \Big\}, \tag{2}$$

avec $K := [-1, 1]^n$, C est une matrice de $\mathbb{R}^{p \times n}$, et b est un vecteur colonne de $\mathbb{R}^p$. L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n,\ Cx = b\}$ correspond aux contraintes d'égalité. On admettra dans toute la suite que l'ensemble des contraintes $K \cap \{x \in \mathbb{R}^n,\ Cx = b\}$ est non vide.

On définit aussi g et d, deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, par:

$$g := \begin{pmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

et l'ensemble K pourra être aussi noté $[g; d]$.

1. Montrer qu'il existe un minimum au problème (2), et que le minimum est unique. On notera u ce minimum.

2. Montrer que l'ensemble des contraintes K peut se mettre sous la forme

$$K = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n,\ Dx \leq f \Big\} \tag{4}$$

où D et f sont respectivement une matrice et un vecteur colonne, que l'on précisera en fonction des données du problème.

3. Ecrire les conditions d'optimalité du problème vérifiées par u. On précisera si les contraintes sont qualifiées en u et pourquoi. On pourra faire apparaître un multiplicateur $\lambda \in \mathbb{R}^p$ associé à la contrainte $Cx = b$, et un multiplicateur $\mu \in \mathbb{R}^{2n}$ associé à la contrainte $Du \leq f$.

4. On considère x, y dans $\mathbb{R}^n$. Démontrer l'équivalence

$$\Big(x \geq 0,\ y \geq 0,\ (x,y) = 0\Big) \quad \Leftrightarrow \quad \min(x,y) = 0. \tag{5}$$

Montrer de même que

$$\Big(x \leq 0,\ y \leq 0,\ (x,y) = 0\Big) \quad \Leftrightarrow \quad \max(x,y) = 0. \tag{6}$$

5. Déduire des questions précédentes qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^p$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}^n$, tels que

$$\begin{cases} u + \mu_1 - \mu_2 = -C^T\lambda \\ Cu = b \\ \min(\mu_1, -u + d) = 0 \\ \min(\mu_2, u - g) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

6. On suppose dans cette question que u est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^p$ et $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}^n$ vérifiant (7). Que peut on dire de u ? (justifier brièvement)

7. On rappelle que pour $K = [g; d]$ et $x \in \mathbb{R}^n$, la projection de x sur K, notée $P_K(x)$, s'exprime par $P_K(x) = \min(\max(x, g), d)$. Montrer que

$$u = P_K(u + \mu_1) \tag{8}$$

et que

$$u = P_K(u - \mu_2) \tag{9}$$

(pour la première égalité, on pourra commencer par établir que $u = \min(u + \mu_1, d)$).

8. Montrer pour tout x, y dans $\mathbb{R}^n$ que

$$x \leq y \Rightarrow P_{[g,d]}(x) \leq P_{[g,d]}(y)$$

9. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^p$,

$$\begin{cases} u = P_K(-C^T\lambda) \\ Cu = b \end{cases} \tag{10}$$

(On pourra utiliser les questions 5, 7 et 8.)

Dans la suite, on considère un algorithme itératif. On se donne un $\lambda^0 \in \mathbb{R}^p$, et un scalaire $\rho > 0$. Puis on itère pour les entiers $k \geq 0$:

$$\begin{cases} u^k = P_K(-C^T\lambda^k) \\ \lambda^{k+1} = \lambda^k + \rho(Cu^k - b) \end{cases} \tag{11}$$

10. A l'aide des caractérisations de $P_K(-C^T\lambda^k)$ et de $P_K(-C^T\lambda)$, montrer que

$$(-C^T(\lambda^k - \lambda), u^k - u) \geq \|u^k - u\|^2. \tag{12}$$

11. A) En déduire une majoration de la forme

$$\|\lambda^{k+1} - \lambda\|^2 \leq \|\lambda^k - \lambda\|^2 - \beta(\rho)\|u^k - u\|^2 \tag{13}$$

et préciser la valeur de $\beta(\rho)$ en fonction de ρ et des données du problème.
B) Montrer qu'il existe $\rho_0 > 0$, $\forall \rho \in]0, \rho_0[$, $\beta(\rho) > 0$. On précisera une valeur de ρ_0 possible en fonction des données du problème.

12. En déduire que $\forall \rho \in]0, \rho_0[$, $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = u$.

13. **Test d'arrêt.** On suppose qu'on a calculé tous les itérés jusqu'à u^{k+1} et λ^{k+1}. On propose d'arrêter l'algorithme suivant un des deux tests d'arrêt

$$(A) \qquad \|u^{k+1} - u^k\| \leq \epsilon$$

ou

$$(B) \qquad \|\lambda^{k+1} - \lambda^k\| \leq \epsilon$$

où ϵ est un petit paramètre. Discuter de la pertinence des tests d'arrêt (A) ou (B). Par exemple on pourra étudier si lorsque $u^k = u^{k+1}$ dans le cas (A) (resp. si $\lambda^k = \lambda^{k+1}$ dans le cas (B)), l'algorithme a bien convergé vers un minimum.

14. A) On considère le cas $n = 3$ et des contraintes d'égalités de la forme

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Soit u un minimum. Expliciter les (C, b) correspondant à ces contraintes; Montrer qu'il existe au moins deux $\lambda \in \mathbb{R}^3$ différents tels que (u, λ) soit solution du système (10).

B) On considère le cas $n = 3$ et des contraintes d'égalités de la forme

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Soit u un minimum. Démontrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}^2$ tel que (u, λ) soit solution du système (10). Que dire dans ce cas de la suite λ^k ?

15. On considère dans cette question le problème de **maximisation** suivant:

$$\max \left\{ J(x) \mid x \in K,\ Cx = b \right\}. \tag{14}$$

A) Donner les conditions d'optimalité pour un maximum v.
B) Proposer un algorithme itératif convergent vers ce maximum (démonstration non demandée).