Les Topos Élémentaires via les Classifiants

Alain Prouté

Résumé

Ce court texte est une introduction rapide à la structure de Topos Élémentaire (de Lawvere-Tierney) via la notion de "classifiant". Ce texte ne suppose en principe aucune connaissance préalable, pas même celle de catégorie, qui est rapidement expliquée au début. Une certaine habitude de la manipulation des ensembles (au sens naïf) est suffisante.

Les ensembles et les applications entre ensembles s'organisent en une structure qu'on appelle "catégorie". La catégorie des ensembles a des propriétés qu'on peut reformuler sans parler des éléments des ensembles (et donc sans parler d'appartenance). Le résultat de cette reformulation est une notion qui généralise la catégorie des ensembles et qu'on appelle "topos élémentaire".

Le point le plus remarquable de la Théorie des Topos est la reformulation de la correspondance entre sous-ensembles et fonctions caractéristiques. Elle permet une définition "interne" des connecteurs logique dans tout topos. La logique qui émerge de cette définition n'est pas nécessairement classique.

Table des matières

1 Catégories et foncteurs.

1.1 Catégories.

Une "catégorie" $\mathcal{C}$ est constituée de :

- une classe([1]) d'"objets" $\mathbf{Ob}(\mathcal{C})$,

[1] Une classe est une sorte de super-ensemble éventuellement trop gros pour être un ensemble.

- une classe de “flèches” $\mathbf{Fl}(\mathcal{C})$,

telles que :

- chaque flèche f à une source X et une cible Y qui sont des objets([2]), et on note une telle flèche comme ceci :
$$X \xrightarrow{f} Y$$
- pour chaque objet X il y a une flèche 1_X de source et de cible X, appelés “identité de X” :
$$\begin{tikzcd} X \arrow[loop right, "1_X"] \end{tikzcd}$$
- si on a $X \xrightarrow{f} Y$ et $Y \xrightarrow{g} Z$, alors on a une flèche “composée” notée $g \circ f$:
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$
- La composition des flèches est associative et les flèches identité sont neutres (à gauche et à droite) pour la composition.
- Les flèches d’un objet X vers un objet Y forment un ensemble qui sera noté $\mathcal{C}(X,Y)$.

Une exemple fondamental de catégorie pour ce qui nous concerne ici est celle des ensembles. Ses objets sont tous les ensembles, et ses flèches sont toutes les applications entre ensembles. Il est clair que c’est une catégorie. Elle sera notée **Ens**.

1.2 Foncteurs.

Un “foncteur” est un morphisme de catégories dans le sens le plus naïf. Précisément, un foncteur $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ de la catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégorie $\mathcal{D}$, applique chaque objet de $\mathcal{C}$ sur un objet de $\mathcal{D}$ et chaque flèche $X \xrightarrow{f} Y$ de $\mathcal{C}$ sur une flèche $F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y)$ (foncteur covariant) ou sur une flèche $F(Y) \xrightarrow{F(f)} F(X)$ (foncteur contravariant), de telle façon que :

- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ pour un foncteur covariant, et $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ pour un foncteur contravariant,
- $F(1_X) = 1_{F(X)}$.

1.3 Un exemple.

Un exemple important de foncteur contravariant de $\mathcal{C}$ vers **Ens** est le suivant. Soit Γ un objet de $\mathcal{C}$. Le foncteur associe à tout objet X l’ensemble $\mathcal{C}(X,\Gamma)$, et à toute flèche $X \xrightarrow{\varphi} Y$ de $\mathcal{C}$, l’application $\varphi^* = (f \mapsto f \circ \varphi)$ de $\mathcal{C}(Y,\Gamma)$ vers $\mathcal{C}(X,\Gamma)$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] & \Gamma \\ X \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "\varphi^*(f)=f\circ\varphi"'] & \end{tikzcd} \qquad \mathcal{C}(Y,\Gamma) \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{C}(X,\Gamma)$$

[2]En particulier, une catégorie est un graphe orienté.

Remarque : la notation φ^* est justifiée par le fait que nous n'avons pas donné de nom symbolique au foncteur $X \mapsto \mathcal{C}(X, \Gamma)$. On place l'étoile en haut pour un foncteur contravariant (comme ci-dessus) et en bas pour un foncteur covariant.

1.4 Monomorphismes, épimorphismes, isomorphismes.

Les notions d'injection, surjection et bijection s'expriment facilement sans parler d'éléments. Une bijection est une fonction $f : X \longrightarrow Y$ qui a un "inverse" $g : Y \longrightarrow X$ vérifiant $g \circ f = 1_X$ et $f \circ g = 1_Y$. Une injection est une application "simplifiable à gauche" pour la composition. Autrement-dit, $f : X \longrightarrow Y$ est une injection si et seulement si pour toute paire d'applications $h, k : Z \longrightarrow X$, telles que $f \circ h = f \circ k$, on a $h = k$. De même une surjection est une application "simplifiable à droite".

Ces caractérisations ne parlent pas d'éléments et se généralisent donc à des catégories quelconques. Une flèche qui a un inverse est appelée un "isomorphisme". Une flèche qui est simplifiable à gauche est appelée un "monomorphisme" et une flèche qui est simplifiable à droite est appelée un "épimorphisme". On se méfiera du fait qu'une flèche qui est à la fois un épimorphisme et un monomorphisme n'est pas toujours un isomorphisme. Toutefois, cette propriété est satisfaite dans les topos.

Si $f : X \longrightarrow Y$ est une flèche quelconque, on dira que $s : Y \longrightarrow X$ est une "section" de f si $f \circ s = 1_Y$ et que $r : Y \longrightarrow X$ est une "rétraction" pour f si $r \circ f = 1_X$. Toute flèche qui a une section est un épimorphisme, et toute flèche qui a une rétraction est un monomorphisme, mais les réciproques ne sont pas vraies en général, même dans un topos, ni même dans la catégorie des ensembles, puisque l'unique application $\phi \longrightarrow X$ (où ϕ est l'ensemble vide), qui est injective, n'a pas de rétraction si X n'est pas vide.

2 Classifiant.

2.1 Définition.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, et $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Ens}$ un foncteur contravariant. Un "classifiant de F" est un objet Γ de $\mathcal{C}$, tel que :

- pour chaque objet X de $\mathcal{C}$, on a une bijection $F(X) \xrightarrow{\theta_X} \mathcal{C}(X, \Gamma)$,
- pour chaque flèche $X \xrightarrow{\varphi} Y$ de $\mathcal{C}$, on a $\varphi^* \circ \theta_Y = \theta_X \circ F(\varphi)$:

$$\begin{tikzcd} F(Y) \arrow[r, "\theta_Y"] \arrow[d, "F(\varphi)"'] & \mathcal{C}(Y, \Gamma) \arrow[d, "\varphi^*"] \\ F(X) \arrow[r, "\theta_X"] & \mathcal{C}(X, \Gamma) \end{tikzcd}$$

La deuxième condition est dite de "naturalité". Elle peut encore s'écrire :

$$\theta_Y(a) \circ \varphi = \theta_X(F(\varphi)(a))$$

pour tout élément $a \in F(Y)$. Il nous arrivera de noter θ au lieu de θ_X quand cela ne conduit pas à des ambiguïtés.

Remarque : Le foncteur (contravariant) $X \mapsto \mathcal{C}(X, \Gamma)$ est appelé le "foncteur représenté par Γ". La définition ci-dessus dit seulement qu'un foncteur contravariant F de $\mathcal{C}$ vers **Ens** a un classifiant s'il est naturellement isomorphe au foncteur représenté par un objet de $\mathcal{C}$. On dit alors de F qu'il est "représentable".

2.2 Élément universel.

Si Γ est un classifiant de F, on a en particulier la bijection : $F(\Gamma) \xrightarrow{\theta_\Gamma} \mathcal{C}(\Gamma, \Gamma)$. Il en résulte qu'on a un unique élément $\iota_\Gamma \in F(\Gamma)$ tel que $\theta_\Gamma(\iota_\Gamma) = 1_\Gamma$. Cet élément sera appelé l'"élément universel" du classifiant Γ.

En appliquant la condition de naturalité à 1_Γ, on obtient :

$$\varphi = \theta_\Gamma(\iota_\Gamma) \circ \varphi = \theta_X(F(\varphi)(\iota_\Gamma))$$

pour toute flèche $X \xrightarrow{\varphi} \Gamma$. On a donc :

$$\theta_X^{-1}(\varphi) = F(\varphi)(\iota_\Gamma)$$

ce qui montre que θ_X^{-1} (et donc θ_X) est déterminé par ι_Γ pour tous les objets X de $\mathcal{C}$. C'est la raison pour laquelle ι_Γ est dit "universel".

Remarquons également que pour $a \in F(X)$, on a $\theta_X(a) \in \mathcal{C}(X, \Gamma)$, donc on a la flèche $X \xrightarrow{\theta_X(a)} \Gamma$, puis la flèche :

$$F(\Gamma) \xrightarrow{F(\theta_X(a))} F(X)$$

et finalement l'élément $F(\theta_X(a))(\iota_\Gamma) \in F(X)$. Comme on peut s'en douter, cet élément n'est autre que a. En effet :

$$\begin{aligned} \theta_X(F(\theta_X(a))(\iota_\Gamma)) &= \theta_\Gamma(\iota_\Gamma) \circ \theta_X(a) \\ &= \theta_X(a) \end{aligned}$$

L'égalité $F(\theta_X(a))(\iota_\Gamma) = a$ s'en déduit puisque θ_X est une bijection.

En résumé, on a les trois relations fondamentales suivantes([3]) :

- $F(\theta_X(a))(\iota_\Gamma) = a$
- $\theta_\Gamma(\iota_\Gamma) = 1_\Gamma$
- $\theta_Y(a) \circ \varphi = \theta_X(F(\varphi)(a))$

2.3 Unicité à isomorphisme canonique près.

Si Δ est un deuxième classifiant du même foncteur F, dont la bijection naturelle est notée :

$$F(X) \xrightarrow{\xi_X} \mathcal{C}(X, \Delta)$$

et dont l'élément universel est noté ι_Δ, alors Γ et Δ sont isomorphes, par un unique isomorphisme f : $\Gamma \longrightarrow \Delta$ tel que $F(f)(\iota_\Delta) = \iota_\Gamma$. En effet, on a la bijection :

$$F(\Delta) \xrightarrow{\theta_\Delta} \mathcal{C}(\Delta, \Gamma)$$

ce qui nous donne la flèche :

$$\Delta \xrightarrow{\theta_\Delta(\iota_\Delta)} \Gamma$$

[3] Ces relations correspondent respectivement, en beaucoup plus général, à la β-équivalence, la η-équivalence et la substitution du λ-calcul.

On obtient de même la flèche $\Gamma \xrightarrow{\xi_\Gamma(\iota_\Gamma)} \Delta$.

Considérons alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(\Delta,\Delta) \arrow[d, "\xi_\Gamma(\iota_\Gamma)^*"'] & F(\Delta) \arrow[l, "\xi_\Delta"'] \arrow[r, "\theta_\Delta"] \arrow[d, "\xi_\Gamma(\iota_\Gamma)^*"'] & \mathcal{C}(\Delta,\Gamma) \arrow[d, "\xi_\Gamma(\iota_\Gamma)^*"] \\
\mathcal{C}(\Gamma,\Delta) & F(\Gamma) \arrow[l, "\xi_\Gamma"] \arrow[r, "\theta_\Gamma"'] & \mathcal{C}(\Gamma,\Gamma)
\end{tikzcd}$$

et suivons le parcours de $\iota_\Delta \in F(\Delta)$ (les flèches horizontales sont des bijections) :

$$\begin{tikzcd}
1_\Delta \arrow[d, mapsto] & \iota_\Delta \arrow[l, mapsto] \arrow[r, mapsto] & \theta_\Delta(\iota_\Delta) \\
\xi_\Gamma(\iota_\Gamma) & \iota_\Gamma \arrow[l, mapsto] \arrow[r, mapsto] & 1_\Gamma
\end{tikzcd}$$

Ceci montre que $\theta_\Delta(\iota_\Delta)\circ\xi_\Gamma(\iota_\Gamma) = \xi_\Gamma(\iota_\Gamma)^*(\theta_\Delta(\iota_\Delta)) = 1_\Gamma$. On prouverait de même que $\xi_\Gamma(\iota_\Gamma)\circ\theta_\Delta(\iota_\Delta) = 1_\Delta$.

Par ailleurs, la preuve montre que l'application de $F(\Delta)$ vers $F(\Gamma)$ induite par l'isomorphisme $\xi_\Gamma(\iota_\Gamma)$ envoie l'élément universel ι_Δ sur l'élément universel ι_Γ. C'est le seul qui ait cette propriété (pourquoi ?), ce qui fait que cet isomorphisme de Δ vers Γ peut être appelé "canonique".

3 Exemples de classifiants.

Nous utilisons la notion de classifiant pour redéfinir sans parler d'éléments des notions qui sont habituellement définies en Théorie des Ensembles en considérant des éléments.

3.1 Objet final.

Un "singleton" est un ensemble à un seul élément. Considérons le foncteur $F : \mathbf{Ens} \longrightarrow \mathbf{Ens}$ qui envoie tout ensemble X sur un singleton S choisi une fois pour toutes. C'est un foncteur contravariant de façon triviale, l'application $F(\varphi)$ étant l'identité de S (pour toute application $\varphi : X \longrightarrow Y$).

Les classifiants de ce foncteur F sont tous les singletons de **Ens**. En effet, on a une bijection $F(X) \longrightarrow \mathbf{Ens}(X,\Gamma)$, pour tout singleton Γ, puisque les deux ensembles $F(X)$ et $\mathbf{Ens}(X,\Gamma)$ n'ont qu'un élément (il n'y qu'une seule application de X vers un singleton). La condition de naturalité est trivialement satisfaite.

Ceci donne une définition des singletons quand on sait déjà ce qu'est un singleton ! Ce n'est pas très intéressant si on se limite à la catégorie des ensembles. Toutefois, cette définition prend tout son intérêt quand on considère plus généralement un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Ens}$, où $\mathcal{C}$ est une catégorie quelconque. Dans ce cas, on a une définition des singletons de $\mathcal{C}$ sachant ce qu'est un singleton de **Ens**.

Dans une catégorie quelconque $\mathcal{C}$, un classifiant (s'il existe) du foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Ens}$ qui envoie tout objet de $\mathcal{C}$ sur S est appelé un "objet final". Il est en général noté 1. Il est bien défini à isomorphisme canonique près.

L'élément universel $\iota_\Gamma \in F(\Gamma) = S$ ne peut être que l'unique élément de S (notons le $*$). Les relations générales des classifiants deviennent (où on a posé $\theta_X(*) = !_X$, l'unique flèche de X vers Γ) :

- $* = *$, puisqu'il s'agit d'une égalité entre éléments de $F(X) = S = \{*\}$,
- $!_\Gamma = 1_\Gamma$,
- $!_Y \circ \varphi = !_X$, pour toute flèche $\varphi : X \longrightarrow Y$.

3.2 Produits.

Soient A et B deux ensembles. Considérons le foncteur $F : \mathbf{Ens} \longrightarrow \mathbf{Ens}$ qui à chaque ensemble Y associe l'ensemble des couples (f, g) où f est une application de Y vers A et g une application de Y vers B. Autrement-dit $F(Y) = \mathbf{Ens}(Y, A) \times \mathbf{Ens}(Y, B)$. Si maintenant $\varphi : X \longrightarrow Y$ est une application, $F(\varphi)(f, g)$ est défini comme le couple $(f \circ \varphi, g \circ \varphi)$. Il est facile de vérifier que F est bien un foncteur contravariant.

$$\begin{tikzcd}
 & & A \\
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[urr, bend left, "f\circ\varphi"] \arrow[drr, bend right, "g\circ\varphi"'] & Y \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"] & \\
 & & B
\end{tikzcd}$$

Sur ce diagramme : $(f, g) \in F(Y)$ et $F(\varphi)(f, g) = (f \circ \varphi, g \circ \varphi) \in F(X)$.

Dans la catégorie des ensembles, le produit cartésien $A \times B$ est un classifiant de F et son élément universel est la paire des deux projections canoniques (π_1, π_2). En effet, l'application θ_X est donnée par :

$$\begin{array}{rcl} F(X) & \xrightarrow{\theta_X} & \mathbf{Ens}(X, A \times B) \\ (f, g) & \longmapsto & (x \mapsto (f(x), g(x))) \end{array}$$

Cette application est bijective car toute application h de X vers $A \times B$ est de la forme $x \mapsto (f(x), g(x))$ où f et g sont déterminées de façon unique (ce sont les "composantes" de h).

L'élément universel est obtenu comme image réciproque de $1_{A\times B}$, et comme on a $1_{A\times B} = (x \mapsto (\pi_1(x), \pi_2(x)))$ pour tout $x \in A \times B$, on voit que l'élément universel est la paire (π_1, π_2).

La définition se généralise donc à toute catégorie $\mathcal{C}$. Si A et B sont deux objets de $\mathcal{C}$ leur produit (s'il existe) sera un classifiant du foncteur contravariant :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathbf{Ens} \\ X & \longmapsto & \{(f, g) \mid f : X \longrightarrow A,\ g : X \longrightarrow B\} \\ \varphi & \longmapsto & (f, g) \mapsto (f \circ \varphi, g \circ \varphi) \end{array}$$

Par la suite, $\theta_X(f, g)$ sera noté $\langle f, g \rangle$. Les trois relations fondamentales deviennent :

- $\pi_1 \circ \langle f, g \rangle = f$ et $\pi_2 \circ \langle f, g \rangle = g$,
- $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = 1$,
- $\langle f, g \rangle \circ \varphi = \langle f \circ \varphi, g \circ \varphi \rangle$.

Abbréviation : $\langle f \circ \pi_1, g \circ \pi_2 \rangle : X \times Y \longrightarrow A \times B$ sera noté $f \times g$ (ici on a $f : X \longrightarrow A$ et $g : Y \longrightarrow B$).

3.3 Flèches induites.

Dans la catégorie des ensembles, donnons-nous deux applications de même cible :

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & C \end{tikzcd}$$

On peut considérer l'ensemble $S = \{(a,b) \in A \times B \mid \alpha(a) = \beta(b)\}$ et l'application $\frac{\alpha}{\beta} : S \longrightarrow B$ définie par $\frac{\alpha}{\beta}(a,b) = b$:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[d, "\frac{\alpha}{\beta}"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & C \end{tikzcd}$$

L'application $\frac{\alpha}{\beta}$ est appelée l'"induite" de α le long de β.([4]) Nous allons caractériser S comme un classifiant, et l'application $\frac{\alpha}{\beta}$ se déduira de l'élément universel.

On considère le foncteur $F : \mathbf{Ens} \longrightarrow \mathbf{Ens}$ qui envoie tout ensemble Y sur l'ensemble des couples (f,g) où $f : Y \longrightarrow A$ et $g : Y \longrightarrow B$ sont des applications telles que $\alpha \circ f = \beta \circ g$.

Si $\varphi : X \longrightarrow Y$ est une application quelconque, on définit $F(\varphi)$ par :

$$F(\varphi)(f,g) = (f \circ \varphi, g \circ \varphi)$$

Il est facile de vérifier qu'on a bien un foncteur contravariant.

Notre ensemble S défini plus haut est un classifiant de F, et son élément universel est la paire d'applications $(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\alpha}{\beta})$. En effet, il suffit de définir $\theta_X : F(X) \longrightarrow \mathbf{Ens}(X,P)$ par :

$$\theta_X(f,g) = x \mapsto (f(x), g(x))$$

Le membre de droite de cette égalité est bien une fonction à valeurs dans S puisque par hypothèse $\alpha \circ f = \beta \circ g$. Par ailleurs, toute fonction de X vers S est de la forme $x \mapsto (f(x), g(x))$, où f et g sont déterminées de façon unique et satisfont nécessairement l'égalité $\alpha \circ f = \beta \circ g$.

L'élément universel est un couple de fonctions que l'on note $(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\alpha}{\beta})$.

Comme pour les produits, $\theta_X(f,g)$ sera noté $\langle f, g\rangle$. Les trois relations fondamentales deviennent :

- $\frac{\beta}{\alpha} \circ \langle f, g\rangle = f$ et $\frac{\alpha}{\beta} \circ \langle f, g\rangle = g$,
- $\langle \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\alpha}{\beta} \rangle = 1_S$,
- $\langle f, g\rangle \circ \varphi = \langle f \circ \varphi, g \circ \varphi\rangle$,

et on a bien sûr la relation suivante par définition du foncteur F :

[4]Les Anglo-saxons disent que $\frac{\alpha}{\beta}$ est le "pullback" de α le long de β.

- $\alpha \circ \frac{\beta}{\alpha} = \beta \circ \frac{\alpha}{\beta}$.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\frac{\beta}{\alpha}"] \arrow[d, "\frac{\alpha}{\beta}"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & C \end{tikzcd}$$

Il est utile de remarquer que si α est un monomorphisme, il en est de même de la flèche $\frac{\alpha}{\beta}$, induite de α le long de β.([5]) En effet, soient $h : X \longrightarrow S$ et $k : X \longrightarrow S$ deux flèches telles que $\frac{\alpha}{\beta} \circ h = \frac{\alpha}{\beta} \circ k$. On a alors successivement :

$$\begin{array}{rcll} \beta \circ \frac{\alpha}{\beta} \circ h & = & \beta \circ \frac{\alpha}{\beta} \circ k & \\ \alpha \circ \frac{\beta}{\alpha} \circ h & = & \alpha \circ \frac{\beta}{\alpha} \circ k & \\ \frac{\beta}{\alpha} \circ h & = & \frac{\beta}{\alpha} \circ k & \quad \text{(car } \alpha \text{ est un monomorphisme)} \\ \langle \frac{\beta}{\alpha} \circ h, \frac{\alpha}{\beta} \circ h \rangle & = & \langle \frac{\beta}{\alpha} \circ k, \frac{\alpha}{\beta} \circ k \rangle & \\ \langle \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\alpha}{\beta} \rangle \circ h & = & \langle \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\alpha}{\beta} \rangle \circ k & \\ h & = & k & \end{array}$$

3.4 Objets fonctionnels.

Soient A et B deux ensembles. Il s'agit de redéfinir l'ensemble des fonctions de A vers B, noté B^A, comme un classifiant. Pour cela on introduit le foncteur $F : \mathbf{Ens} \longrightarrow \mathbf{Ens}$ qui envoie tout objet X sur l'ensemble des fonctions de $X \times A$ vers B :

$$F(X) = \{f : X \times A \longrightarrow B\}$$

Si $\varphi : X \longrightarrow Y$ est une application quelconque, l'application $F(\varphi) : F(Y) \longrightarrow F(X)$ est définie par $F(\varphi)(f) = (x, a) \mapsto f(\varphi(x), a)$, c'est à dire $F(\varphi)(f) = f \circ (\varphi \times 1)$. Il est facile de vérifier qu'il s'agit d'un foncteur contravariant.

L'ensemble B^A est un classifiant du foncteur F. En effet, l'application $F(X) \xrightarrow{\theta_X} \mathbf{Ens}(X, B^A)$ est donnée par :

$$\theta_X(f) = x \mapsto (a \mapsto f(x, a))$$

L'application θ_X est bijective, car toute fonction $g : X \longrightarrow B^A$ peut s'écrire $x \mapsto (a \mapsto g(x)(a))$ Il suffit donc de poser $f(x, a) = g(x)(a)$ pour avoir l'unique antécédent de g par θ_X. La naturalité de θ (c'est à dire : $\theta_Y(a) \circ \varphi = \theta_X(F(\varphi)(a))$) ne fait qu'exprimer le fait évident suivant :

$$(x \mapsto (a \mapsto f(x, a))) \circ \varphi = x \mapsto (a \mapsto f(\varphi(x), a))$$

L'élément universel, qui s'obtient comme $\theta_{B^A}^{-1}(1_{B^A})$, est donc l'application :

$$\begin{array}{ccc} B^A \times A & \xrightarrow{\epsilon} & B \\ (f, a) & \longmapsto & f(a) \end{array}$$

[5] Par contre il n'est pas vrai en général que l'induite d'un épimorphisme soit un épimorphisme. C'est vrai toutefois dans les topos, mais nettement plus difficile à prouver.

puisque quand on applique θ_{B^A} à cette appplication on obtient (f joue le rôle de x et ϵ le rôle de f) :

$$f \mapsto (a \mapsto \epsilon(f, a))$$

c'est à dire $f \mapsto f$, puisque $a \mapsto \epsilon(f, a)$ n'est autre que $a \mapsto f(a)$ c'est à dire f. $\theta_{B^A}(\epsilon)$ est donc l'identité de B^A.

L'application $\epsilon : B^A \times A \longrightarrow A$ applique une fonction f a un argument a. C'est pourquoi on l'appelle "applicateur" ou "évaluateur".

Cette définition se généralise immédiatement à toute catégorie qui a des produits.

Par la suite, $\theta_X(f)$ sera noté $\Lambda_A(f)$. Les relations fondamentales des classifiants deviennent :

- $\epsilon \circ (\Lambda_A(f) \times 1) = f$,
- $\Lambda_A(\epsilon) = 1$,
- $\Lambda_A(f) \circ \varphi = \Lambda_A(f \circ (\varphi \times 1))$.

3.5 Sous-objets.

En Théorie des Ensembles, on a la notion de sous-ensemble. Un sous-ensemble de X est un ensemble dont tous les éléments sont dans X.

Pour pouvoir généraliser cette notion à une catégorie quelconque, il faut éviter de parler d'élément. On peut penser à remplacer un sous-ensemble A d'un ensemble X par l'inclusion canonique $i : A \longrightarrow X$, et décider qu'un sous-ensemble de X est juste une application injective d'un ensemble quelconque vers X. En fait, cela nous donne trop de sous-ensembles, car deux applications injectives distinctes de cible X (que leurs sources soient des ensembles distincts ou non) peuvent avoir la même image.

On introduit donc une notion d'équivalence entre de telles applications injectives. Deux applications injectives $i : A \longrightarrow X$ et $j : B \longrightarrow X$ sont "équivalentes" s'il existe une bijection $\varphi : X \longrightarrow Y$, telle que $j \circ \varphi = i$. Il est clair que deux injections de cible X sont équivalentes si et seulement si elles ont la même image. Il en résulte que les sous-ensembles de X sont en correspondance biunivoque avec les classes d'équivalence d'injections de cible X.

Comme on sait exprimer les notions d'injection (monomorphisme) et de bijection (isomorphisme) sans parler d'éléments, on obtient une définition des sous-ensembles (qu'on appelera alors "sous-objets") pour une catégorie quelconque. On va voir qu'en fait toute catégorie qui a des flèches induites pour toute paire de flèches de même cible, a un foncteur (contravariant) des sous-objets.

En effet, associons à chaque objet X de $\mathcal{C}$ l'ensemble de ses sous-objets([6]), qu'on notera $\mathbf{Sub}(X)$. Soit $\varphi : X \longrightarrow Y$ une flèche de X vers Y. Il s'agit de définir une fonction $\mathbf{Sub}(\varphi) : \mathbf{Sub}(Y) \longrightarrow \mathbf{Sub}(X)$.

Soit $j : B \longrightarrow Y$ un monomorphisme représentant un sous-objet de Y. Comme on a des flèches induites dans $\mathcal{C}$, on a le carré cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\frac{j}{\varphi}"'] & B \arrow[d, "j"] \\ X \arrow[r, "\varphi"'] & Y \end{tikzcd}$$

[6] On se limitera aux cas où il s'agit effectivement d'un ensemble.

Comme j est un monomorphisme, il en est de même de $\dfrac{j}{\varphi}$. Si on prend une autre flèche induite :

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[d, "j"] \\ X \arrow[r, "\varphi"'] & Y \end{tikzcd}$$

a un isomorphisme $\psi : A \longrightarrow A'$ tel que $\dfrac{j}{\varphi} = i \circ \psi$. Le sous-objet de X représenté par i est donc le même que le sous-objet de X représenté par $\dfrac{j}{\varphi}$. Il s'en suit que l'application $\mathbf{Sub}(\varphi) : \mathbf{Sub}(Y) \longrightarrow \mathbf{Sub}(X)$ est bien définie. Il reste à voir qu'il s'agit d'un foncteur (contravariant), mais ceci résulte immédiatement de la propriété de naturalité des flèches induites.

Dans une catégorie quelconque ayant des flèches induites, un classifiant du foncteur des sous-objets (s'il existe) est traditionnellement noté Ω. Son élément universel est un sous-objet de Ω. On peut montrer qu'il est représenté par un unique monomorphisme $\top : 1 \longrightarrow \Omega$, où 1 est un objet final fixé une fois pour toutes (exercice). On notera $\chi : \mathbf{Sub}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(X, \Omega)$ la bijection naturelle, qui à chaque sous-objet de X associe sa flèche caractéristique, et on écrira aussi $\chi(m)$ pour la flèche caractéristique du sous-objet représenté par le monomorphisme m. Les relations fondamentales des classifiants deviennent alors :

- $\dfrac{\top}{\chi(m)} = m$
- $\chi(\top) = 1_\Omega$
- $\chi(m) \circ \varphi = \chi(\dfrac{m}{\varphi})$

valables pour tout monomorphisme m. Dans le cas de la catégorie des ensembles, on vérifie facilement que l'ensemble à deux éléments $\mathbf{Boole} = \{\mathbf{vrai}, \mathbf{faux}\}$ est un classifiant du foncteur des sous-objets, avec $\top = \{\mathbf{vrai}\}$, et ces relations se lisent comme suit :

- tout sous-ensemble de X est l'image réciproque de $\{\mathbf{vrai}\} \subset \mathbf{Boole}$ par sa flèche caractéristique,
- la flèche caractéristique de $\{\mathbf{vrai}\}$ est l'identité de $\mathbf{Boole}$,
- la flèche caractéristique de $\varphi^{-1}(A)$ est la composée de la flèche caractéristique de A avec φ.

Toute choses bien évidentes pour qui connait un tant soit peu les ensembles.

4 Topos.

Définition 1 *Un "topos élémentaire" est une catégorie $\mathcal{T}$ telle que :*

- *$\mathcal{T}$ a un objet final,*
- *$\mathcal{T}$ a des produits pour toute paire d'objets,*
- *$\mathcal{T}$ a des flèches induites,*
- *$\mathcal{T}$ a des objets fonctionnels,*
- *$\mathcal{T}$ a un classifiant du foncteur des sous-objets.*

à suivre…, avec le "langage interne", les "topos relatifs", etc…