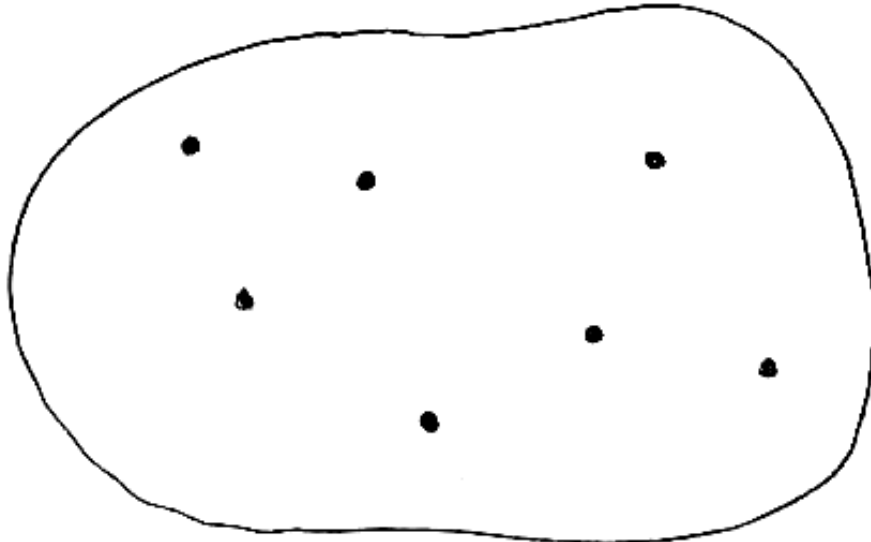


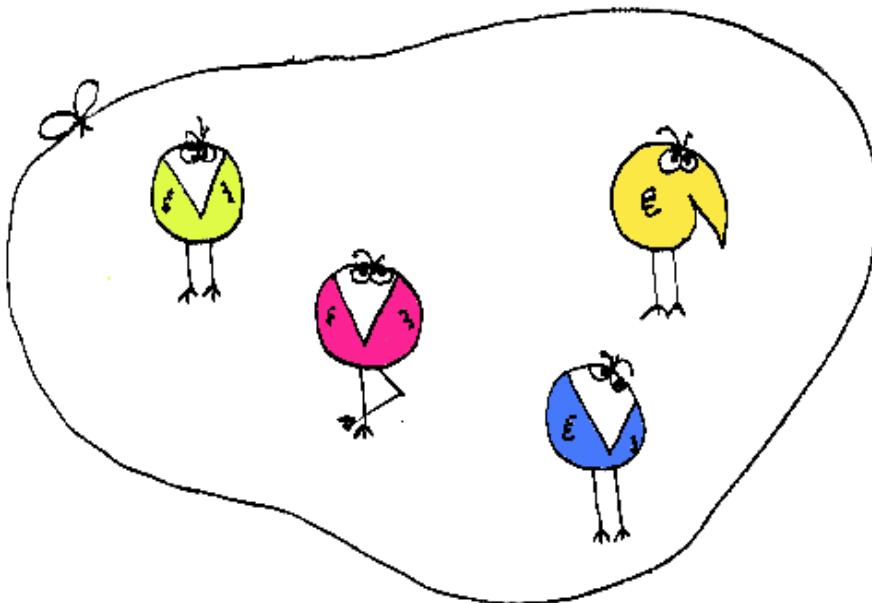
La Théorie des Ensembles selon les Shadoks

Tout ce que vous avez toujours voulu savoir
sur les topos
sans jamais oser le demander.

Alain Prouté
Université Denis Diderot
et
Institut Cosmique de Logique Shadok.
(Assistant du Pr. Shadoko)



Ensemble ordinaire (patatoïde)

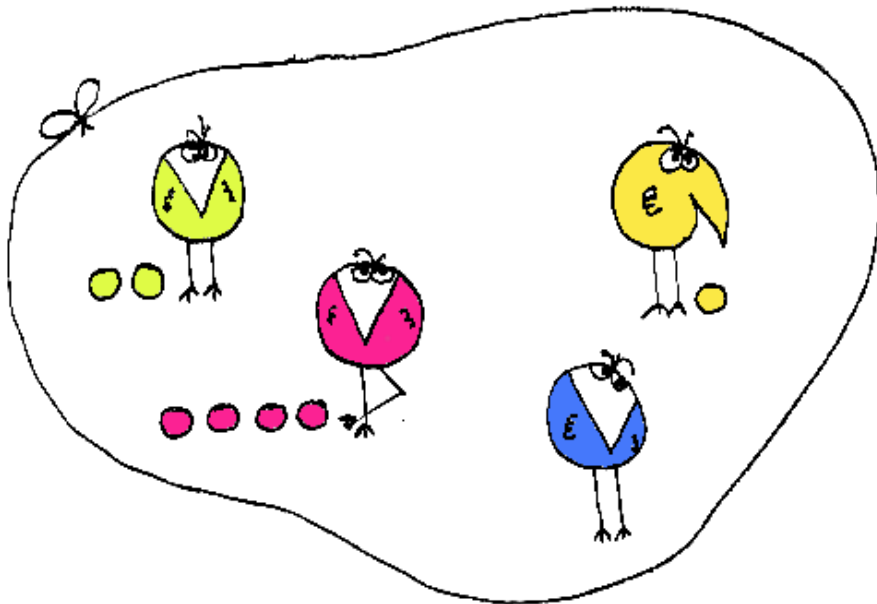


Ensemble de Shadoks

Hé bien voilà ! Ça devait arriver ! Les shadoks ont décidé d'avoir leur propre Théorie des Ensembles.

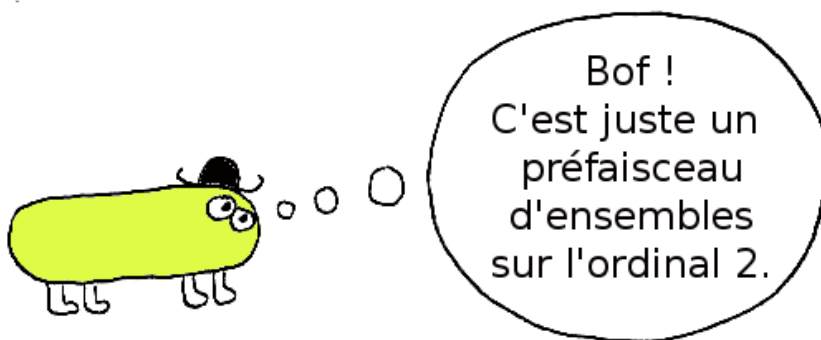
Il ont décidé qu'un ensemble contiendrait des ...
Shadoks !

Cela ne change pas grand chose direz-vous.
Détrompez-vous ! Cela change tout car... les
shadoks ont des œufs.



Véritable ensemble de Shadoks

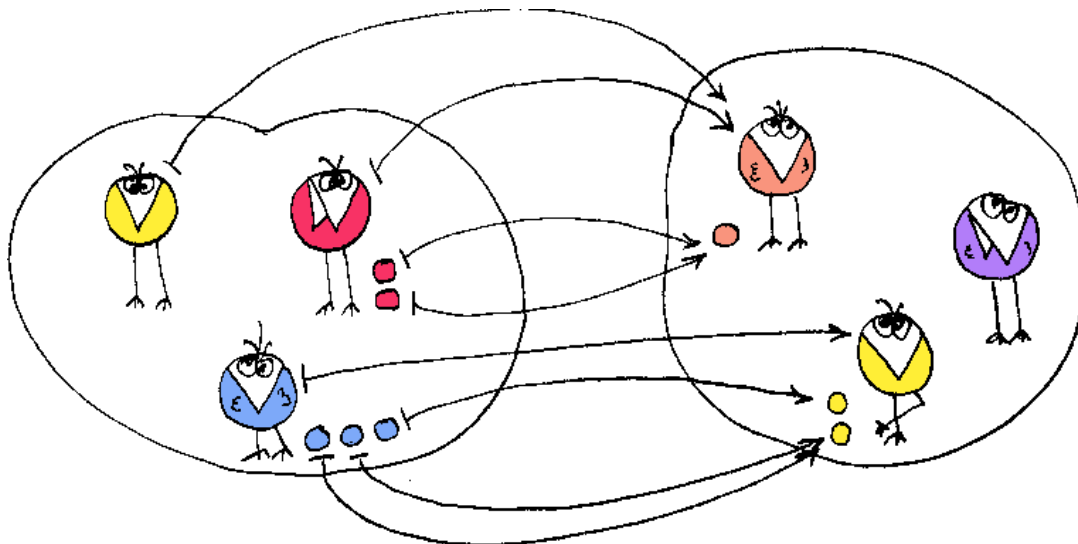
Important : chaque œuf appartient à un unique shadok.



Bien sûr, comme il n'y a pas d'éléments dans les ensembles de shadoks, il faut se rabattre sur autre chose. Par exemple, sur les applications entre ensembles.

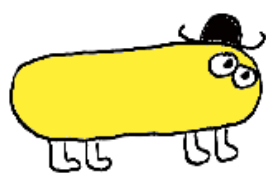
On supposera bien sûr qu'on peut les composer (quand elles sont composables), que la composition est associative, et que chaque ensemble est muni d'une application identique neutre pour la composition.

Bref! On a une catégorie des ensembles de shadoks.



Application entre ensembles de Shadoks

Important : si l'œuf a appartient au shadok b ,
alors l'œuf $f(a)$ appartient au shadok $f(b)$.



J'en étais sûr.
Une transformation
naturelle
(morphisme de
préfaisceaux).

L'absence d'éléments dans les ensembles de shadoks nous force à redéfinir les concepts usuels de la Théorie des Ensembles sans parler d'éléments.

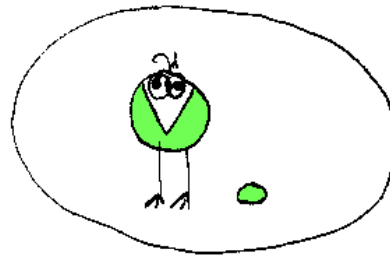
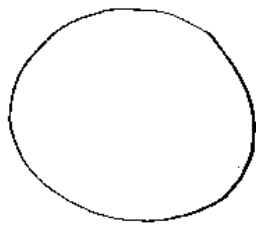
L'un de ces concepts est celui de “bijection”, qui se laisse très bien redéfinir, pour une application f , par la propriété d'avoir une application “inverse” g , c'est à dire vérifiant $g \circ f = 1_E$ et $f \circ g = 1_F$.

$$1_E \circlearrowleft E \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} F \circlearrowright 1_F$$

Comment caractériser l'ensemble vide sans parler d'éléments ? C'est simple. L'ensemble vide a la propriété que pour tout ensemble X il existe une et une seule application de l'ensemble vide vers X .

De même, un singleton (ensemble à un seul élément) est caractérisé par le fait que pour tout ensemble X il existe une et une seule application de X vers ce singleton.

Ces propriétés permettent de dire ce qu'est un ensemble vide et ce qu'est un singleton dans la catégorie des ensembles de shadoks.



L'ensemble vide (0) et un singleton (1)

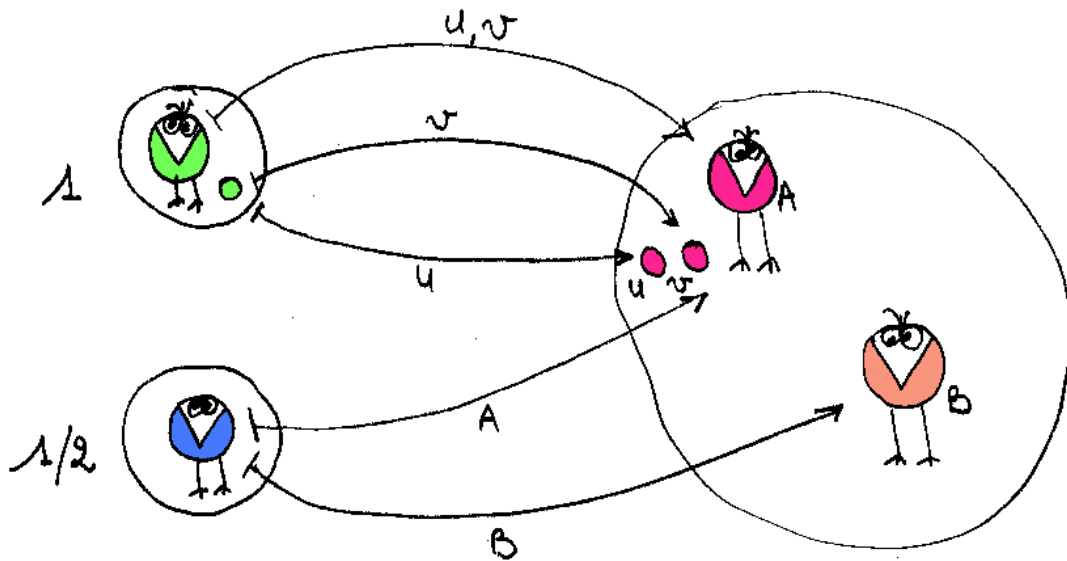


$1/2$ (un ensemble intermédiaire entre vide et singleton)

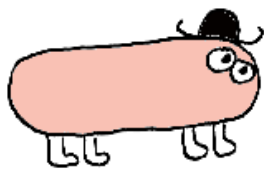
Très important !

Il y a exactement autant de shadoks dans X qu'il y a de fonctions de $1/2$ vers X .

Il y a exactement autant d'œufs dans X qu'il y a de fonctions de 1 vers X .



Deux ensembles importants



1 et 1/2, les deux
seuls préfaïceaux
représentables.
(Yoneda !)

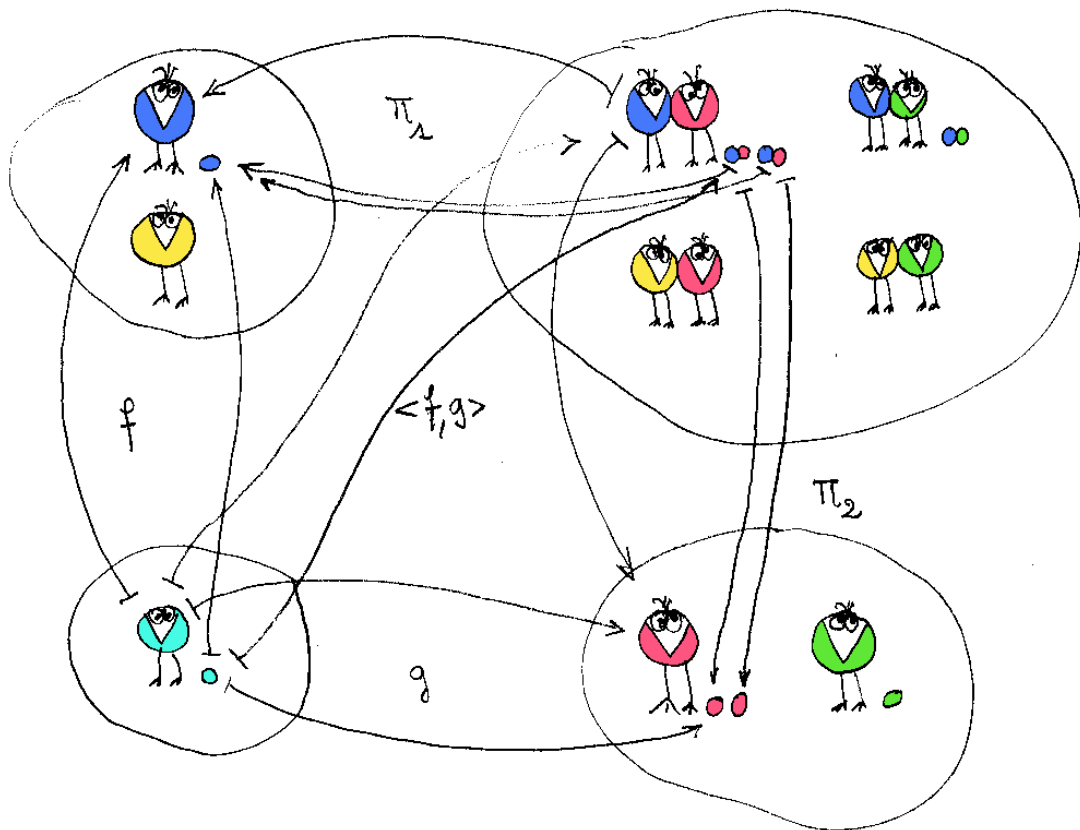
Pour connaître le shadok auquel l'œuf
correspondant à $1 \xrightarrow{f} E$ appartient, il suffit
de composer f avec l'unique application de $1/2$
vers 1 .

Pour définir le produit (cartésien) sans parler d'éléments, on se basera sur le fait qu'il est équivalent de se donner une application de X vers $E \times F$, ou de se donner deux applications, une de X vers E et l'autre de X vers F .

En conséquence, se donner une application de $1/2$ vers $E \times F$ est la même chose que se donner une application de $1/2$ vers E et une application de $1/2$ vers F . Il en résulte que les shadoks de $E \times F$ sont des paires (a, b) où a est un shadok de E et b un shadok de F .

Le même raisonnement avec 1 à la place de $1/2$ nous montre qu'un œuf de $E \times F$ est une paire (u, v) faite d'un œuf de E et d'un œuf de F .

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xleftarrow{\pi_1} & E \times F \\
 f \uparrow & \nearrow \langle f, g \rangle & \downarrow \pi_2 \\
 X & \xrightarrow{g} & F
 \end{array}$$

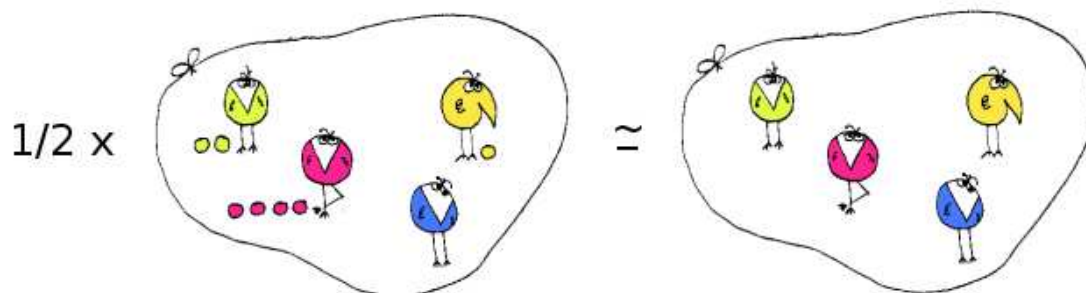


Produit d'ensembles (remplacer X successivement par $1/2$ et 1 , puis par $E \times F$ pour obtenir π_1 et π_2).

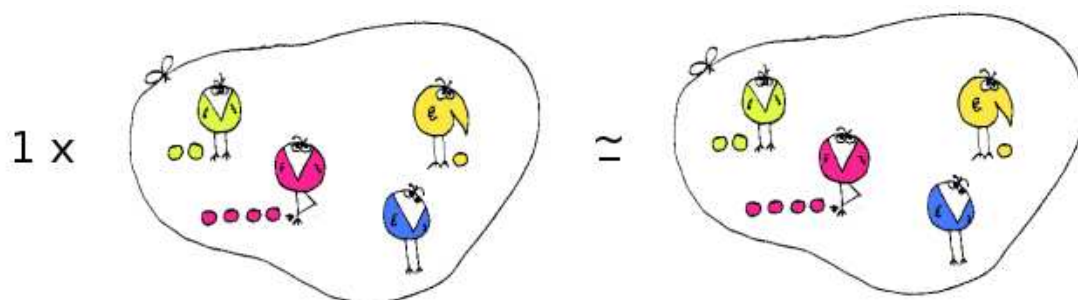
Comment définir l'ensemble fonctionnel F^E sans parler d'éléments ? Cet ensemble est caractérisé à isomorphisme près par la propriété suivante. Pour tout ensemble X , se donner une application g de X vers F^E est équivalent à se donner une application f de $X \times E$ vers F .

Le passage de la seconde application à la première s'appelle "curryfication". Ces deux applications se calculent l'une à partir de l'autre par la formule suivante :

$$g(x)(y) = f(x, y)$$

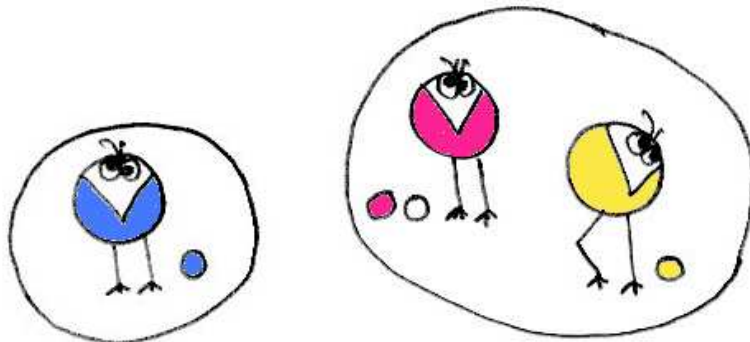


Faire le produit de E par $1/2$ revient à retirer tous les œufs de E .

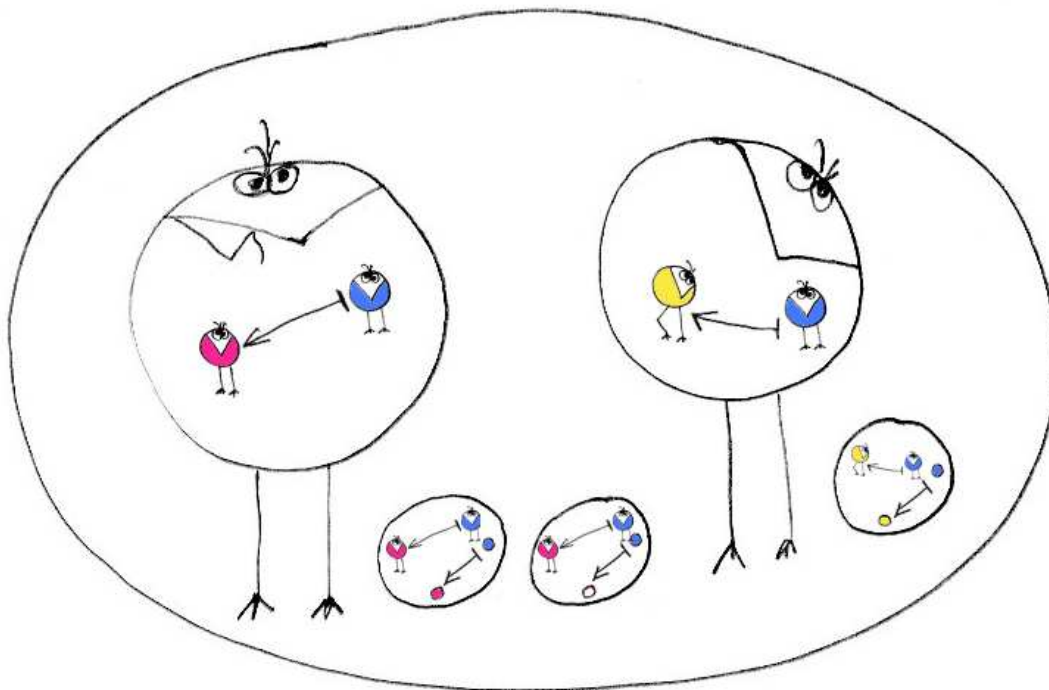


Faire le produit de E par 1 ne change pas fondamentalement E .

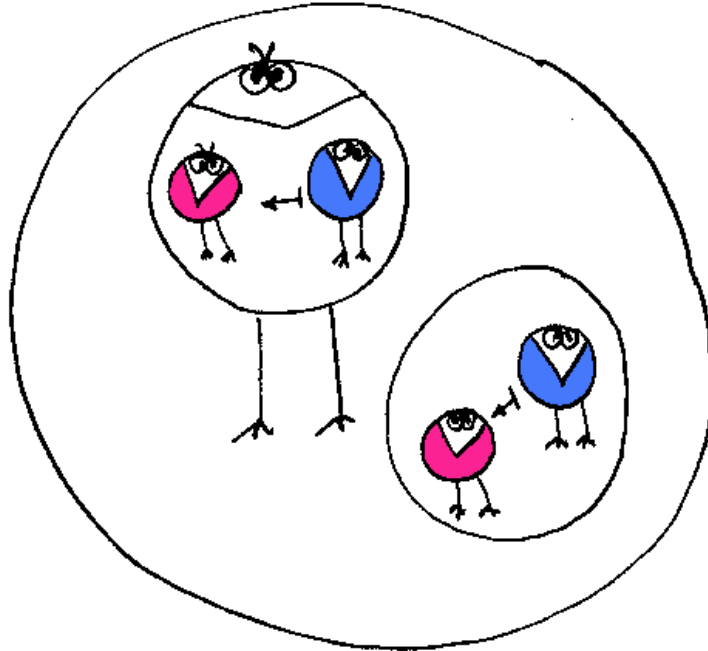
En conséquence, les shadoks de F^E sont les applications (ordinaires) entre l'ensemble (ordinaire) des shadoks de E vers l'ensemble (ordinaire) des shadoks de F , et les œufs de F^E sont les applications (entre ensembles de shadoks) de E vers F .



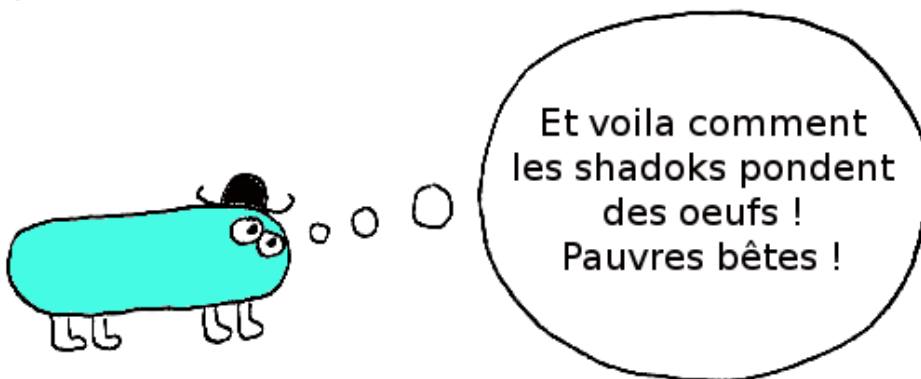
L'ensemble E et l'ensemble F .



L'ensemble F^E .



Attention piège ! Si E et F ne contiennent pas d'œufs, F^E peut très bien en contenir. Ci-dessus l'ensemble $(1/2)^{(1/2)}$ (isomorphe à 1).



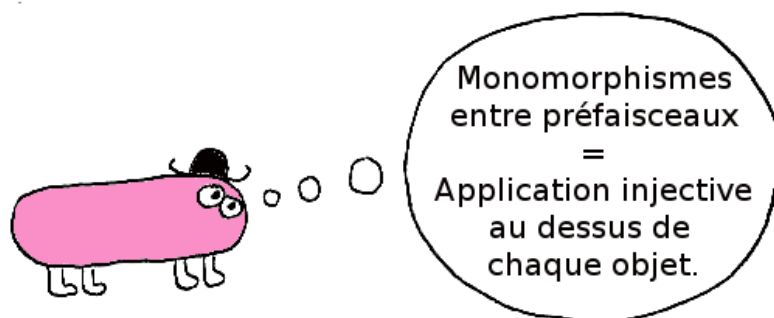
Comment dire qu'une application est injective (ou surjective) sans parler d'éléments? C'est un exercice élémentaire de montrer qu'une application (ordinaire) f est injective si et seulement si elle est simplifiable à gauche, c'est à dire si on a :

$$f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$$

quelles que soient g et h (composables avec f).

De même une application (ordinaire) est surjective si et seulement si elle est simplifiable à droite.

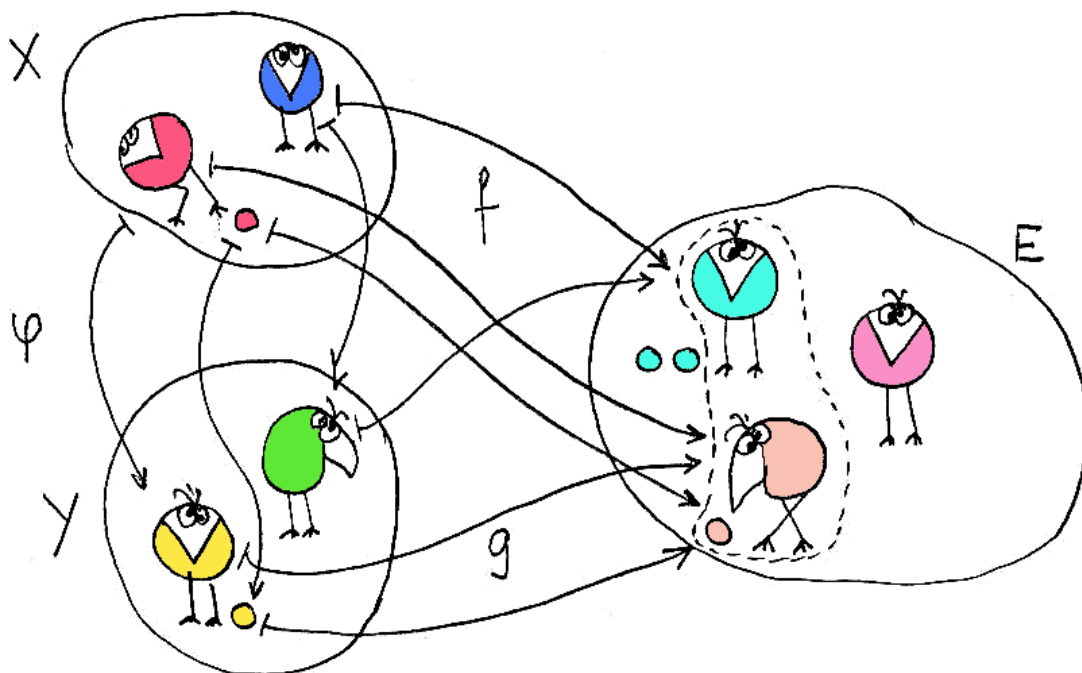
En fait, dans le cas des ensembles de shadoks, dire qu'une application est "injective" revient à dire qu'elle est injective sur les shadoks et injective sur les œufs.



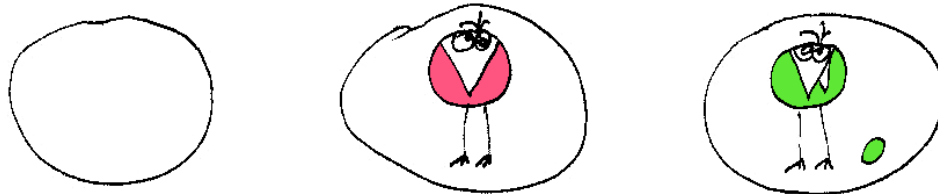
De même, dire qu'elle est "surjective" revient à dire qu'elle est surjective sur les shadoks et surjective sur les œufs.

Comment définir la notion de “sous-ensemble” sans parler d’éléments ? On peut penser à remplacer le sous-ensemble par une injection. Malheureusement, deux injections distinctes $f : X \longrightarrow E$ et $g : Y \longrightarrow E$ peuvent avoir la même image. Toutefois, elle ont la même image si et seulement si il existe une bijection $\varphi : X \longrightarrow Y$ telle que $g \circ \varphi = f$. Deux “injections” (monomorphismes) qui ont cette propriété sont dites “équivalentes”.

Un “sous-ensemble” de E sera donc une classe d’équivalence d’“injections” de cible E . On l’appelera “sous-objet”.



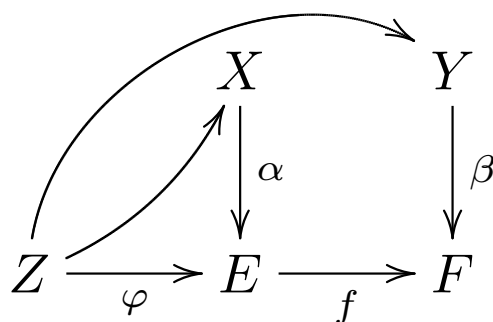
Un sous-ensemble (sous-objet) de E .



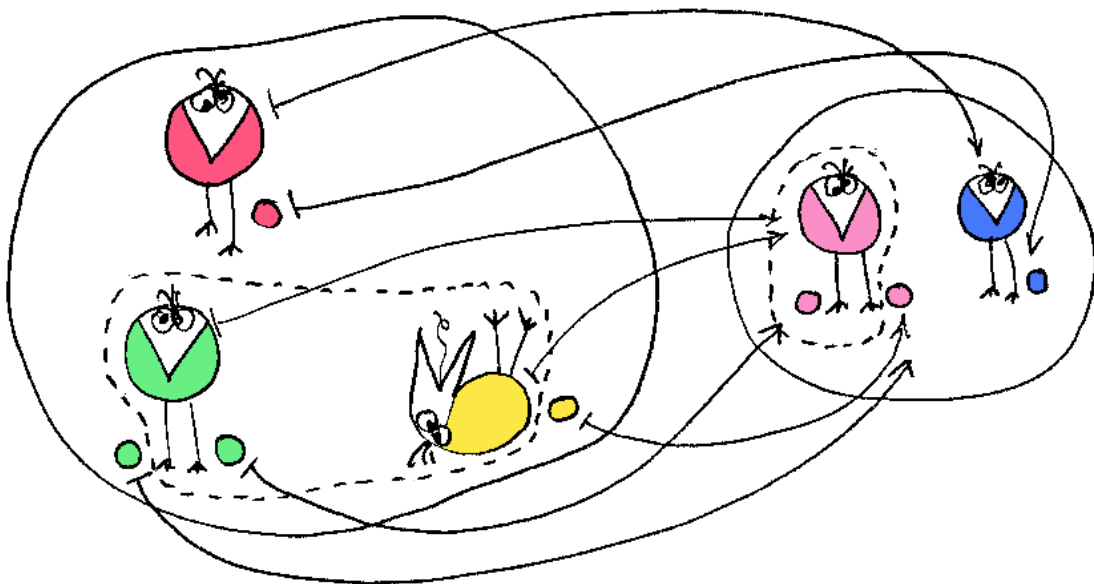
Les trois sous-ensembles du singleton : 0, 1/2 et 1.

Est-il possible de définir la notion d'image réciproque d'un sous-ensemble sans parler d'éléments ? On y parvient comme ceci.

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Soit B un sous-ensemble de F représenté par une injection $\beta : Y \longrightarrow F$. L'image réciproque de B sera représentée par une injection $\alpha : X \longrightarrow E$, telle que toute application $\varphi : Z \longrightarrow E$ se relève le long de α si et seulement si le composé $f \circ \varphi$ se relève le long de β .



En clair : $\text{Im}(\varphi) \subset f^{-1}(B) \Leftrightarrow \text{Im}(f \circ \varphi) \subset B$



Une image réciproque.

Classiquement, on a une correspondance biunivoque entre les sous-ensembles de E et les fonctions de E vers un ensemble Ω à deux éléments.

Une fonction $f : E \longrightarrow \Omega$ étant donnée, le sous-ensemble de E correspondant est obtenu comme l'image réciproque d'un des deux éléments de Ω , c'est à dire comme image réciproque du singleton formé par cet élément.

Pour définir cette correspondance sans parler d'éléments, il est bien évidemment nécessaire d'oublier que Ω "a deux éléments".

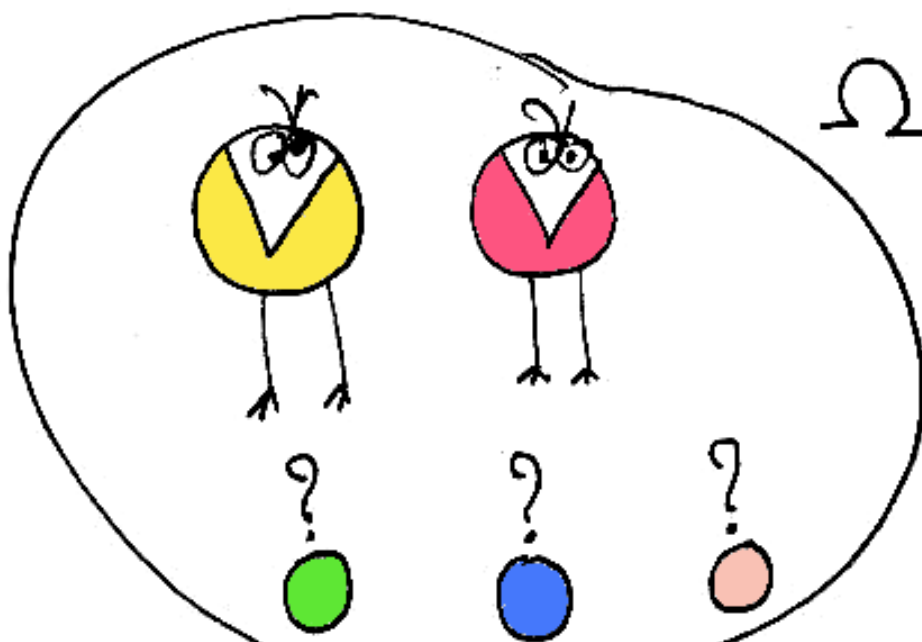
Nous nous souviendrons donc seulement du fait qu'il y a un sous-ensemble T de Ω tel que le sous-ensemble de E correspondant à $f : E \longrightarrow \Omega$ soit $f^{-1}(T)$. On notera \top une injection de cible Ω représentant T .

Quels sont les shadoks de Ω ? Ils sont en correspondance biunivoque avec les applications $1/2 \longrightarrow \Omega$, donc avec les sous-objets de $1/2$.

De même, les œufs de Ω sont en correspondance biunivoque avec les applications $1 \longrightarrow \Omega$, c'est à dire avec les sous-objets de 1 .

Il y a donc 2 shadoks et 3 œufs dans Ω .

Mais à quels shadoks appartiennent ces œufs?



Mystère ... ???

Pour le savoir on a besoin de préciser que la correspondance entre applications de E vers Ω et sous-objets de E doit être “naturelle”, ce qui peut s’exprimer de la façon suivante :

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} \Omega$$

$$f^{-1}(g^{-1}(T)) = (g \circ f)^{-1}(T)$$

Par conséquent, un sous-ensemble $f^{-1}(T)$ de 1 étant donné, son image réciproque par $i : 1/2 \longrightarrow 1$ est $(f \circ i)^{-1}(T)$.

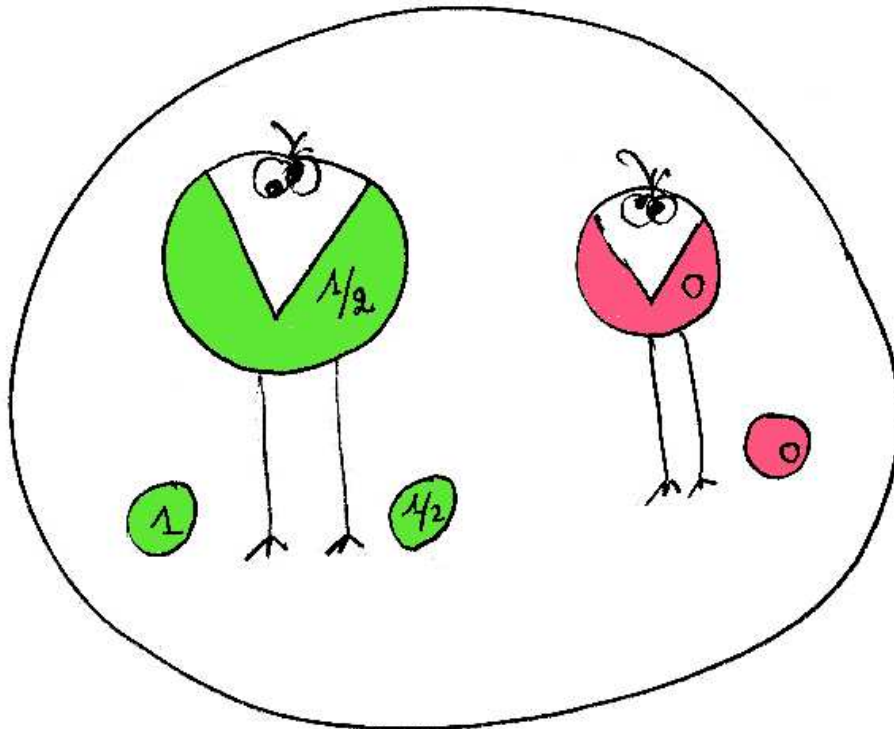
Il y a donc trois situations possibles :

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & & 0 & & \bullet \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow_{\top} \\
 1/2 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & \Omega
 \end{array}
 \qquad i^{-1}(0) = 0$$

$$\begin{array}{ccccc}
 1/2 & & 1/2 & & \bullet \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow_{\top} \\
 1/2 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & \Omega
 \end{array}
 \qquad i^{-1}(1/2) = 1/2$$

$$\begin{array}{ccccc}
 1/2 & & 1 & & \bullet \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow_{\top} \\
 1/2 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & \Omega
 \end{array}
 \qquad i^{-1}(1) = 1/2$$

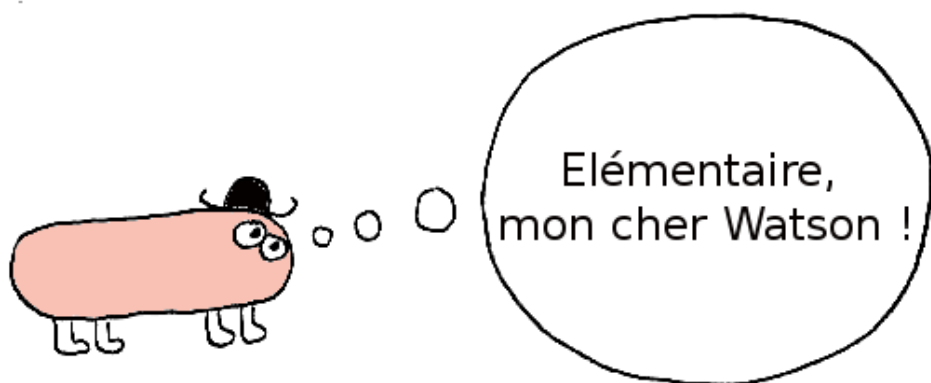
D'où il résulte que Ω est fait comme ceci :



Exercice : identifier le sous-ensemble T de Ω , et en déduire que la source de \top est un singleton.

Comme il y a trois applications de 1 vers Ω , la logique de la catégorie des ensembles de shadoks est dite “trivaluée” (celle de la catégorie des ensembles est “bivaluée”).

Définition : Un “topos élémentaire” est une catégorie qui a (au moins) un singleton, des produits, des objets fonctionnels, des images réciproques, et un objet Ω “classifiant” les sous-objets.



Note : Cette définition n’entraîne pas l’existence d’“ensembles” infinis. Aussi ajoute-t-on souvent l’hypothèse que l’on a un NNO (Natural Number Object).

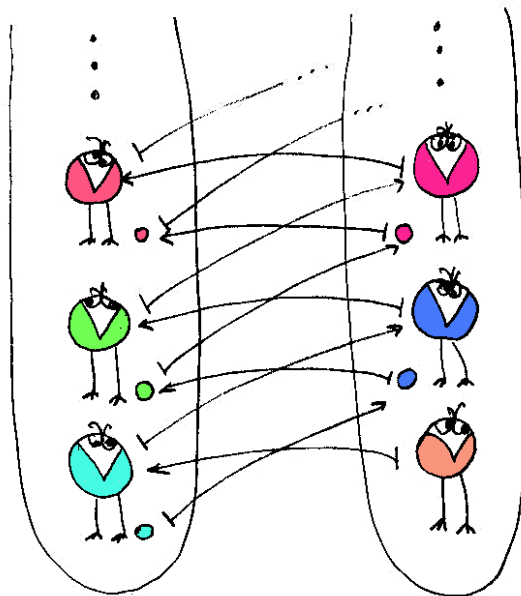
Comme conséquence de la définition des produits, on a l'application "diagonale" $\Delta : X \longrightarrow X \times X$, qui est un monomorphisme puisque $\pi_1 \circ \Delta = 1_X$. On a $\Delta = \text{eq}^{-1}(T)$ pour une certaine application eq qu'on appellera "égalité interne" :

$$X \times X \xrightarrow{\text{eq}} \Omega$$

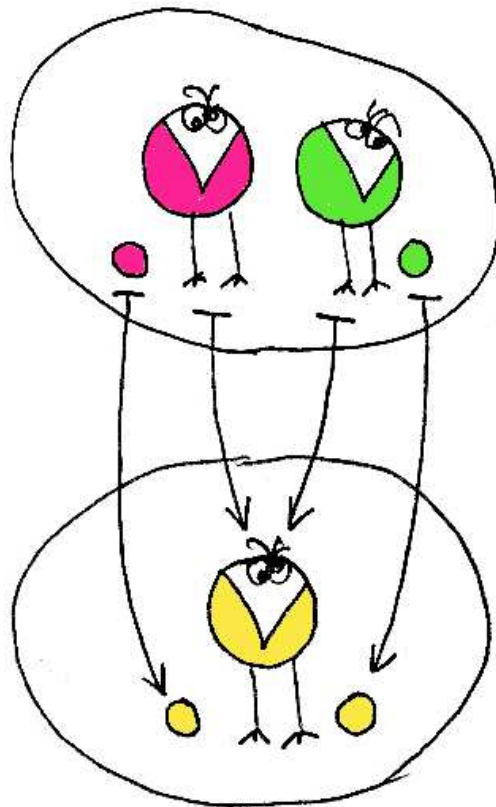
À partir de l'égalité interne on construit la "logique du topos". En particulier, on peut définir (par exemple dans cet ordre) le quantificateur universel, l'énoncé \perp ("faux") (on connaît déjà "vrai" qui est représenté par \top), la conjonction, l'implication, le quantificateur existentiel et la disjonction.

Bien que les objets d'un topos n'aient a priori pas d'éléments (ni même plusieurs sortes d'éléments comme dans le topos des shadoks), le “langage interne” permet de faire comme s'ils en avaient. Ce langage s'interprète dans tout topos, et les énoncés de ce langage qu'on démontre en se limitant aux principes “intuitionnistes” sont vrais dans tous les topos.

On exhibe facilement des topos dans lesquels le principe du tiers exclu n'est pas vérifié (par exemple le topos des shadoks, dans lequel on peut voir que le Théorème de Cantor-Bernstein n'est pas vrai), ou dans lesquels l'axiome du choix n'est pas vérifié (encore le topos des shadoks qui contient des “surjections” qui n'ont pas de section).



Pourquoi le Théorème de Cantor-Bernstein n'est pas vrai chez les shadoks. Une "injection" dans chaque sens. Pas de "bijection".



Pourquoi l'axiome du choix n'est pas vrai chez les shadoks. Une "surjection" f qui n'a pas de section (c'est à dire qu'il n'existe pas d'application s telle que $f \circ s = 1$).

Note : En fait, il y a une petite arnaque dans ce qui vient d'être dit sur Cantor-Bernstein et l'axiome du choix, car il faut distinguer les versions "internes" des versions "externes". Les exemples précédents contredisent les versions externes de ces énoncés. Toutefois, dans le cas du topos des shadoks, les deux versions sont équivalentes. Ceci tient au fait que l'objet final est "projectif" dans ce topos. Dans le topos des G -ensembles et applications G -équivariantes (où G est un groupe non trivial), l'objet final n'est pas projectif et des phénomènes différents apparaissent.

Petite bibliographie.

J.L. Bell *Toposes and Local Set Theories*. Dover Publications.

R. Goldblatt *Topoi*. North-Holland Amsterdam.

S. Mac Lane, I. Moerdijk *Sheaves in Geometry and Logic*. Universitext Springer-Verlag.

C. McLarty *Elementary Categories, Elementary Toposes*. Oxford Science Publications.

J. Rouxel *Les Shadoks : ga bu zo meu*. Circonflexe.