Université Denis Diderot
Séminaire Général de Logique
http://www.logique.jussieu.fr/semgen.html

9 mai 2011

Comment on traite la question de l'indépendance de l'hypothèse du continu et de l'axiome du choix avec la théorie des faisceaux de Grothendieck.

Alain Prouté ([1])
alp@logique.jussieu.fr

Dernière révision de ce texte : 9 mai 2011

Résumé

Ce court texte est juste une discussion informelle sur le sujet. Pour les définitions et les détails techniques, voir mon précédent exposé [10].

En 1963, Paul Cohen prouve que l'hypothèse du continu ne se déduit pas des axiomes de Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix. Un peu plus tard, il montre que l'axiome du choix ne se déduit pas des axiomes de Zermelo-Fraenkel (voir par exemple [4]). Bien sûr, ceci suppose que l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel soit non contradictoire. En 1972, Myles Tierney prouve que l'hypothèse du continu ne se déduit pas des axiomes de la catégorie des ensemble de Lawvere (avec axiome du choix) ([7] et [13]), et en 1980 Peter Freyd prouve que l'axiome du choix ne se déduit pas de cette même axiomatique de Lawvere (sans axiome du choix bien sûr) ([6]). Ces deux résultats supposent bien sûr que l'axiomatique de Lawvere est non contradictoire.

Il convient donc d'abord de noter que les preuves de Tierney et Freyd ne constituent pas une manière différente de prouver la même chose que Cohen. Il s'agit plutôt d'une adaptation du travail de Cohen à une situation similaire. L'une des raisons d'entreprendre ce travail était que l'axiomatique des topos est un candidat à la fondation des mathématiques, d'ailleurs concurrent de la théorie des ensembles et de ses variantes. Le travail de Cohen joue bien sûr un rôle important dans ceux de Tierney et Freyd, mais il se trouve qu'une bonne partie des techniques initiés par Cohen sont remplacées par des techniques appartenant à la théorie des topos de faisceaux, initié par Alexandre Grothendieck l'année même où Cohen faisant sa découverte ([2]). D'une certaine façon, Cohen et Grothendieck ont étudié en parallèle des constructions semblables, bien évidemment avec une intuition différente, du domaine de la logique pour Cohen, et de celui de la géométrie pour Grothendieck. C'est très peu de temps après le travail de Grothendieck que William Lawvere, qui avait de son coté proposé une axiomatique pour la « catégorie

[1] Équipe de Logique, Institut Mathématique de Jussieu, Université Denis Diderot - Paris 7.

des ensembles » ([7])([2]) s'aperçoit que les topos de Grothendieck sont autant d'alternatives à cette catégorie des ensembles. Ceci a été le point de départ de la logique dite catégorique, autrement-dit, la théorie des topos vu sous ses aspects logiques, qui a ensuite été développée par Lawvere, Tierney, Freyd et d'autres catégoriciens.

Rappelons que pour prouver qu'un énoncé E ne se déduit pas d'une théorie T, c'est-à-dire d'une famille (finie ou infinie) d'énoncés, la méthode la plus utilisée consiste à construire à partir d'un modèle M de T, un autre modèle M' de T dans lequel E est faux. Bien entendu, le simple fait de partir d'un modèle M de T équivaut à supposer que T n'est pas contradictoire, ce que tout le monde fait concernant la théorie des ensembles de même que concernant la théorie des topos. Il faut toutefois se méfier, car concernant la théorie des topos, il existe un modèle trivial. C'est la catégorie à un seul objet et une seule flèche. La théorie des topos n'est donc pas contradictoire, mais ce topos ne présente bien sûr aucun intérêt.([3]) On exigera donc de ne manipuler que des topos non dégénérés, c'est-à-dire non équivalents à ce modèle trivial. Un topos non dégénéré est un objet hautement non trivial, comme l'est un modèle de la théorie des ensembles. On admettra l'existence d'un topos non dégénéré comme on admet l'existence d'un modèle de la théorie des ensembles.

Un topos est donc une catégorie qui peut être vue comme une variante de celle des ensembles. Toutefois, le plus souvent, la logique (dite « interne » ; voir plus loin) de cette variante n'est pas classique mais intuitionniste. Si on veut qu'un topos puisse être considéré comme un modèle valable de la « catégorie des ensembles », il faut que la logique y soit classique et même éventuellement que l'axiome du choix y soit vrai. C'est ce qu'on exigera dans le cas de l'indépendance de l'hypothèse du continu, car on veut montrer que l'hypothèse du continu peut être invalidée en présence des axiomes qui assurent que notre mathématique est classique, c'est-à-dire le tiers exclu (qui permet par exemple le raisonnement par l'absurde) et l'axiome du choix (dans le cas Tierney, mais évidemment pas dans le cas Freyd). C'est ce que propose l'axiomatique de Lawvere. Par ailleurs, tout topos a à la fois une « logique externe » et une « logique interne ». La logique externe nous permet d'affirmer des choses au sujet des objets et des flèches du topos. Autrement-dit, cette logique est celle qui permet d'étudier le topos en tant qu'objet mathématique au sens usuel. D'ailleurs, les raisonnements qu'on fait de manière externe à propos d'un topos donné sont toujours faits classiquement, avec usage de l'axiome du choix quand cela est nécessaire. De ce point de vue, les topos sont considérés comme une structure au même titre que les groupes, les anneaux ou les espaces topologiques, et il n'est nullement question de logique intuitionniste. D'ailleurs, il n'y a pas réellement de « logique externe » d'un topos en ce sens qu'elle se résume aux propriétés du topos vu comme un objet mathématique usuel. La « logique interne » d'un topos est au contraire un monde mathématique à part entière, une abstraction qui admet le topos comme « support matériel » en quelque sorte. C'est un monde dans lequel on peut refaire les mathématiques, par exemple la théorie des groupes (on parle alors de « groupe interne »), des anneaux, des espaces topologiques, etc, et même la théorie des topos, bien entendu seulement les aspects intuitionnistes de ces théories, sauf si le topos ambiant est suffisamment classique. En particulier, il ne fait aucun doute qu'on peut traiter dans la théorie de Lawvere toutes les mathématiques qu'on traite usuellement dans celle de Zermelo-Fraenkel.

Il y a un algorithme qui permet de traduire toute expression E du langage interne d'un topos $\mathcal{T}$, relative à un contexte Γ (c'est-à-dire un ensemble fini de déclarations de variables), en une flèche $\lfloor E \rfloor_\Gamma : \overline{\Gamma} \to Y$ de $\mathcal{T}$, où $\overline{\Gamma}$ est un objet qui « réalise » le contexte Γ, et où l'objet Y est le « type » de E. Dans le cas où E est un énoncé, Y est l'objet Ω, alias le « classifiant du foncteur des sous-objets », nom barbare qui ne désigne en fait que l'objet qui fait office d'« ensemble des valeurs de vérité ». D'ailleurs, dans le cas de la catégorie des ensembles, cet objet est juste l'ensemble à deux éléments des booléens, mais dans un topos quelconque il peut être quelque chose de plus compliqué. Par définition, un énoncé E du langage

[2] Cette axiomatique peut être résumée ainsi : Une « catégorie des ensembles » est un topos avec entiers naturels, booléen et bivalué, dans lequel tout objet est projectif.

[3] En fait, ce topos et tous ceux qui sont des catégories équivalentes, sont caractérisés par le fait que leur « logique interne » est contradictoire.

interne de $\mathcal{T}$ interprétable dans le contexte Γ est « vrai », si la flèche $\lfloor E \rfloor_\Gamma$ est le composé

$$\overline{\Gamma} \xrightarrow{\langle\rangle} \mathbf{1} \xrightarrow{\top} \Omega$$

où $\langle\rangle$ est l'unique flèche vers l'objet final $\mathbf{1}$ (qui joue le rôle d'un ensemble singleton), et où $\top$ est la « valeur de vérité vraie », une notion qui fait partie de l'axiomatique même des topos.([4]) On démontre que pour tout topos $\mathcal{T}$, tout énoncé du langage interne de $\mathcal{T}$ qu'il est possible de démontrer intuitionnistiquement est vrai dans le sens ci-dessus (théorème de robustesse).([5]) Si le topos est booléen (on en donnera la définition plus loin), on peut ajouter le principe du tiers exclu à notre arsenal, ou de manière équivalente, l'axiome de la double négation ou le raisonnement par l'absurde. Si le topos satisfait l'axiome du choix « interne », on peut également utiliser cet axiome. La propriété de robustesse tient toujours.

L'intuitionnisme, inventé par Brouwer au début du XX$^{\text{ième}}$ siècle, est longtemps resté une curiosité pour la plupart des mathématiciens. Le fait que la logique interne d'un topos soit le plus souvent intuitionniste, fait découvert seulement vers 1964, a largement contribué à redorer le blason de l'intuitionnisme. Parallèlement, Cohen tombe naturellement sur des questions d'intuitionnisme dans son travail sur l'hypothèse du continu. Sa relation de forcing peut en effet forcer la double négation d'un énoncé sans forcer cet énoncé. Bien entendu, la cause de cette affleurement de l'intuitionnisme dans le travail de Cohen est la même que celle de son apparition dans la théorie des topos. Cette cause est facilement mise en évidence par la considération d'un topos de préfaisceaux d'ensembles sur un ensemble ordonné aussi simple que l'ordinal 2.

J'ai évoqué ci-dessus la notion d'« axiome du choix interne ». On se doute donc qu'il doit y avoir un « axiome du choix externe ». En fait, l'axiome du choix interne est juste l'énoncé usuel :

$$(\forall_{x\in X}\ \exists_{y\in Y}\ \varphi(x,y)) \Rightarrow (\exists_{f\in Y^X}\ \forall_{x\in X}\ \varphi(x,f(x)))$$

qui est un énoncé du langage interne de tout topos. En fait, c'est un schéma d'énoncés, puisque X, Y et φ y jouent des rôles de paramètres. Si toutes les instances de ce schéma sont des énoncés vrais dans le langage interne d'un topos $\mathcal{T}$, on dit que ce topos satisfait l'axiome du choix interne. L'axiome du choix externe est l'affirmation que tous les objets de $\mathcal{T}$ sont projectifs, ou de manière équivalente que tout épimorphisme de $\mathcal{T}$ a une section, ce qui dans le cas de la catégorie des ensembles signifie que toute surjection a une section. Dans le cas de la catégorie des ensembles, l'axiome du choix interne se confond avec l'axiome du choix externe, mais dans le cas général, les deux notions sont distinctes. Toutefois, tout topos qui satisfait l'axiome du choix externe satisfait aussi l'axiome du choix interne. Le modèle M' qui invalide l'hypothèse du continu construit par Tierney satisfait l'axiome du choix externe, donc aussi l'axiome du choix interne (et bien sûr le tiers exclu). S'il est facile d'exhiber un topos qui satisfait le tiers exclu mais ne satisfait pas l'axiome du choix externe,([6]) ou un topos qui ne satisfait ni le tiers exclu ni l'axiome du choix interne,([7]) il est beaucoup moins facile d'en exhiber un qui satisfait le tiers exclu et ne satisfait pas l'axiome du choix interne. C'est ce travail qui a été réalisé par Freyd.

Maintenant, on peut se demander quelle est la signification externe d'un énoncé du langage interne qui est vrai. La réponse à cette question est apportée par la « sémantique de Kripke-Joyal », que les logiciens catégoriciens considèrent comme la version catégorique du « forcing de Cohen ». Comme toutes nos constructions de modèles sont pour l'essentiel des constructions externes, il est nécessaire d'utiliser cette sémantique, qui établit le lien existant entre propriétés internes et propriétés externes, pour établir

[4] Ou qui s'en déduit dès les premiers développements, dans le cas de certaines variantes axiomatiques, bien sûr équivalentes.

[5] On trouve facilement des contre-exemples dans le cas de démonstrations qui ne sont pas intuitionnistes. D'ailleurs, ceci constitue aussi un moyen de prouver que certains énoncés ne peuvent pas être prouvés intuitionnistiquement.

[6] Un exemple simple de topos qui satisfait l'axiome du choix interne et le tiers exclu mais ne satisfait pas l'axiome du choix externe est celui des ensembles munis d'une symétrie.

[7] Il suffit de considérer le topos des préfaisceaux d'ensembles sur l'ordinal 2.

que l'hypothèse du continu par exemple ne se déduit pas de manière interne dans la logique interne du topos construit pour l'invalider.

Ce que fait Tierney est de construire à partir d'un topos **Ens** qu'on peut considérer comme un modèle de la catégorie des ensembles, un autre topos $\mathbf{Ens}'$, tout aussi valide comme modèle de la catégorie des ensembles, et dans lequel l'hypothèse du continu, qui est alors un énoncé du langage interne, n'est pas vraie au sens défini ci-dessus. Ce qui est démontré est donc que dans la logique interne de ce topos, qui est classique, c'est-à-dire où l'usage du tiers exclu et de l'axiome du choix est licite, l'hypothèse du continu ne peut pas être démontrée. Noter que l'axiomatique des topos ne constitue pas une axiomatisation de la logique interne du topos, même si bien sûr elle a un lien étroit avec elle. Ce que fait Tierney n'est donc pas démontrer que l'hypothèse du continu est indépendante de l'axiomatique des topos avec axiome du choix, ce qui d'ailleurs n'aurait pas grand sens. Par contre, la démonstration de Tierney prouve que l'hypothèse du continu est indépendante de tout système d'énoncés vrais dans tout topos satisfaisant l'axiome du choix interne. La même remarque s'applique mutatis mutandis pour la démonstration de Freyd et d'une manière plus générale pour toute démonstration d'indépendance reposant sur la construction d'un topos.

Des informations plus formelles et des preuves détaillées de certains points peuvent être trouvées dans mon précédent exposé sur cette question ([10]) pour ce qui concerne l'hypothèse du continu, de même que dans mon cours de Master 2 (voir ma page web [11]) pour un exposé général de théorie des topos et pour ce qui concerne l'axiome du choix, ou dans les ouvrages maintenant classiques [8] et [3], et bien sûr dans [13] et [6].

Références

[1] **P. Ageron** *Logique, Ensembles, Catégories. Le point de vue constructif.* Ellipses 2000.

[2] **M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier** *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas.* Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1963-64 (SGA4), tome 1. Springer LNM 269, Springer-Verlag, 1970.

[3] **J. L. Bell** *Toposes and Local Set Theories. An introduction.* Dover 2008.

[4] **P. Cohen** *Set theory and the continuum hypothesis.* Benjamin.

[5] **R. Diaconescu** *Axiom of choice and complementation.* Proc. A.M.S. **51** (1975) pages 175-178.

[6] **P. Freyd** *The axiom of choice.* JPAA 19 (1980), pages 103-125.

[7] **F. W. Lawvere** *An elementary theory of the category of sets.* Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A., **52**, page 1506-1511.

[8] **S. Mac Lane, I. Moerdijk** : *Sheaves in Geometry and Logic.* Universitext, 629 pages, Springer-Verlag, 1992.

[9] **R. Paré** *Colimits in Topoi.* Bull. Amer. Math. Soc. 80, n^{o}3, 1974, pages 556-561.

[10] **A. Prouté** *Pourquoi les topologies de Grothendieck interessent-elles les logiciens ?* `http://people.math.jussieu.fr/~alp/Topologies_de_Grothendieck_et_logique.pdf`

[11] `http://people.math.jussieu.fr/~alp`

[12] **M. La Palme Reyes, G.E. Reyes, H. Zolfaghari** *Generic figures and their gluings.* Polimetrica, Monza 2004.

[13] **M. Tierney** *Sheaf theory and the continuum hypothesis.* Springer LNM 274, 1972, pages 13-42.