Intégrale Simple.

par Alain Prouté
Université Denis Diderot — Paris 7

Table des matières

Table des matières

Nous traitons ici *l'intégrale de Cauchy*, c'est-à-dire l'intégrale de Riemann restreinte aux seules fonctions réglées. Ceci suffit à couvrir les besoins de l'intégration élémentaire.

Dans tout ce chapitre, $[a, b]$ $(a \leq b)$ désigne un intervalle compact de $\mathbb{R}$, et I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. On prendra garde au fait que certains résultats ne sont valables que sur des intervalles compacts.

1 Préliminaires.

1.1 Quelques questions de topologie.

Une fonction f, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace métrique E, a en x_0 une *limite à droite*, notée $f(x_0^+)$, si

$$f(x_0^+) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x).$$

On a une notion analogue de limite à gauche, notée $f(x_0^-)$:

$$f(x_0^-) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x).$$

Remarque : f est continue en x_0 si et seulement si $f(x_0^+) = f(x_0^-) = f(x_0)$.

Rappellons le lemme de Lebesgue, dont on aura besoin à plusieurs reprises.

THÉORÈME. *(Lemme de Lebesgue) Soit A une partie compacte d'un espace métrique E, et soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille de parties ouvertes de E, telle que*

$$A \subset \bigcup_{i\in I} U_i.$$

Alors il existe un réel ρ strictement positif (appelé "nombre de Lebesgue" pour le recouvrement donné), tel que toute boule ouverte de rayon ρ ayant son centre dans A soit contenue dans l'un des ouverts de la famille $(U_i)_{i\in I}$.

Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'aussi petit que soit ρ, il existe une boule ouverte de rayon ρ ayant son centre dans A et non contenue dans l'un des ouverts de la famille. Alors, pour tout entier n, il existe une boule $B(x_n, \frac{1}{n})$, de centre x_n et de rayon $\frac{1}{n}$, telle que x_n soit dans A, et qui n'est pas contenue dans l'un des ouverts de la famille. La suite (x_n) a un point d'accumulation γ dans A (par définition des compacts). Comme la famille d'ouverts couvre A, il existe un ouvert de la famille qui contient γ, et qui contient donc une boule $B(\gamma, \varepsilon)$ de centre γ, et de rayon $\varepsilon > 0$. Choisissons n assez grand pour que, d'une part la distance de x_n à γ soit plus petite que $\frac{\varepsilon}{2}$, et d'autre part $\frac{1}{n}$ soit lui-même plus petit que $\frac{\varepsilon}{2}$. Alors, la boule $B(x_n, \frac{1}{n})$ est contenue dans la boule $B(\gamma, \varepsilon)$, donc dans l'un des ouverts de la famille, ce qui ne se peut pas. □

COROLLAIRE. *(Théorème de Borel-Lebesgue) Soit A une partie compacte d'un espace métrique E, et soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de E recouvrant A. Alors il existe une partie finie J de I, telle que la famille $(U_i)_{i\in J}$ recouvre A.*

Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'aucune sous–famille finie de $(U_i)_{i\in I}$ ne suffise à couvrir A. Soit $\rho > 0$ un nombre de Lebesgue pour le recouvrement donné. On va construire par récurrence une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A, telle que $\forall_{p\in\mathbb{N}}\ \forall_{q\in\mathbb{N}}\ p \neq q \Rightarrow d(x_p, x_q) \geq \rho$. Ceci impliquera qu'aucune sous–suite de la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger et donc que A n'est pas compact.

Comme la sous–famille vide de $(U_i)_{i\in I}$ ne recouvre pas A, A n'est pas vide et contient donc un point x_0. Supposons maintenant $x_0, \dots, x_n$ contruits, tels que $d(x_p, x_q) \geq \rho$ pour tous p et q tels que $0 \leq p < q \leq n$. Pour chaque p, tel que $0 \leq p \leq n$, la boule ouverte de centre x_p et de rayon ρ est contenue dans l'un des ouverts (appelons–le U_p) de la famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$. Comme les ouverts $U_0, \dots, U_n$ ne sauraient recouvrir A, il existe un point x_{n+1} dans A dont la distance à chacun des $x_0, \dots, x_n$ est au moins ρ. □

Rappelons également le théorème suivant de prolongement par continuité (adapté ici aux application lipschitziennes).

THÉORÈME. *(Théorème du prolongement par continuité) Soient E et F des espaces métriques, D une partie* dense *de E, et $f : D \longrightarrow F$ une application k-lipschitzienne. On suppose F complet. Alors, il existe* *une unique application continue $\overline{f} : E \longrightarrow F$, prolongeant f (i.e : telle que $\forall x \in D$ $f(x) = \overline{f}(x)$), et cette application est k-lipschitzienne.*

Soit x un point quelconque de E. Comme D est dense dans E, il existe une suite (x_n) de points de D qui converge vers x. Cette suite est évidemment de Cauchy, puisqu'elle converge. La suite $(f(x_n))$ est alors une suite de F, qui est de Cauchy car f est k-lipschitzienne (vérification aisée). Elle converge donc vers un élément de F que l'on notera $\overline{f}(x)$.

Cette construction est indépendante du choix de la suite (x_n). En effet, si (x'_n) est une autre suite convergeant vers x, alors $d(x_n, x'_n)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, et comme f est k-lipschitzienne, il en est de même de $d(f(x_n), f(x'_n))$.

La fonction $\overline{f} : E \longrightarrow F$ est donc bien définie. Il reste à montrer qu'elle est k-lipschitzienne (ce qui impliquera qu'elle est continue). Soient x et y des points de E, (x_n) et (y_n) des suites de points de D convergeant respectivement vers x et y. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n assez grand pour que $d(\overline{f}(x), f(x_n)) < \varepsilon$, $d(\overline{f}(y), f(y_n)) < \varepsilon$, $d(x, x_n) < \varepsilon$ et $d(y, y_n) < \varepsilon$. On a alors

$$\begin{aligned} d(\overline{f}(x), \overline{f}(y)) &\leq d(\overline{f}(x), f(x_n)) + d(f(x_n), f(y_n)) + d(f(y_n), \overline{f}(y)) \\ &\leq 2\varepsilon + kd(x_n, y_n) \\ &\leq 2\varepsilon + k(2\varepsilon + d(x, y)) \end{aligned}$$

Comme ε est arbitraire, on voit que $\overline{f}$ est k-lipschitzienne.

L'unicité de $\overline{f}$ continue prolongeant f est conséquence immédiate de la continuité et du fait que D est dense dans E. □

1.2 Le théorème des accroissements finis.

On connait bien sûr le théorème des accroissements finis pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$:

THÉORÈME. *Soit $[a, b]$ ($a < b$) un intervalle compact de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$, tel que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Ce théorème (qui résulte facilement du théorème de Rolle) n'admet qu'une version plus faible pour les fonctions à valeurs dans un espace de Banach quelconque :

THÉORÈME. *(Théorème des accroissements finis) Soit F un espace de Banach, $[a, b]$ ($a \leq b$) un intervalle compact de $\mathbb{R}$, et $f : [a, b] \longrightarrow F$ une application continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et dont la dérivée est bornée sur $]a, b[$. On a alors :*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq |b - a| \sup_{x \in]a,b[} \|f'(x)\|.$$

Le résultat étant trivial pour $a = b$, on peut supposer $a < b$. Posons $M = \sup_{x \in]a,b[} \|f'(x)\|$. Soit $\varepsilon > 0$. Il suffit de montrer que b appartient à l'ensemble A suivant :

$$A = \{x \in [a, b] \mid \|f(x) - f(a)\| \leq |x - a|M + \varepsilon(x - a + 1)\}.$$

En effet, si $b \in A$, on a $\|f(b) - f(a)\| \leq |b - a|M + \varepsilon(b - a + 1)$, et comme ε est arbitraire, on a le résultat annoncé.

A n'est pas vide, puisqu'il contient a. Il est par ailleurs majoré par b et a donc une borne supérieure γ telle que $a \leq \gamma \leq b$. A est fermé, puisque les deux membres de l'inégalité large $\|f(x) - f(a)\| \leq$

$|x-a|M+\varepsilon(x-a+1)$ qui le définit sont des fonctions continues de x. γ appartient donc à A. De plus, A contient un voisinage de a, par continuité de f en a (c'est à cela que sert le $+1$ dans la définition de A). On voit donc que $a<\gamma$. Comme $\gamma\in A$, il suffit maintenant de montrer que $\gamma=b$.

Supposons $\gamma<b$. Alors $\gamma\in]a,b[$, et f est dérivable en γ. Il existe donc un $\eta>0$, tel que pour $|h|<\eta$, on ait :

$$\left\|\frac{f(\gamma+h)-f(\gamma)}{h}-f'(\gamma)\right\|<\varepsilon.$$

On a alors, pour $0<h<\eta$:

$$\begin{aligned}\|f(\gamma+h)-f(a)\| &\leq \|f(\gamma+h)-f(\gamma)\|+\|f(\gamma)-f(a)\|\\ &\leq hM+h\varepsilon+|\gamma-a|M+\varepsilon(\gamma-a+1)\\ &= |\gamma+h-a|M+\varepsilon(\gamma+h-a+1),\end{aligned}$$

c'est à dire $\gamma+h\in A$, ce qui contredit le fait que γ est la borne supérieure de A. □

1.3 Fonctions réglées.

DÉFINITION. *Une fonction f définie sur un intervalle quelconque I de $\mathbb{R}$, et à valeurs dans un espace de Banach E, est dite* réglée, *si elle admet en tout point intérieur à I une limite à gauche et une limite à droite, ainsi qu'une limite à droite en $\inf(I)$ si celui-ci est dans I et une limite à gauche en $\sup(I)$ si celui-ci est dans I.*

DÉFINITION. *Une fonction f définie sur $[a,b]$, et à valeurs dans un espace de Banach E, est dite* en escalier, *si elle est localement constante, sauf en un nombre fini de points de $[a,b]$.*

La réunion de deux ensembles finis étant un ensemble fini, il est clair que la somme de deux fonctions en escalier est encore une fonction en escalier. On vérifie alors facilement que l'ensemble des fonctions en escalier définies sur $[a,b]$ et à valeurs dans E est un espace vectoriel réel.

Si on note $x_0,\dots,x_n$, les points où la fonction en escalier f n'est pas localement contante, (avec $x_0<\dots<x_n$), on voit que f est constante dans chaque intervalle $]x_i,x_{i+1}[$ (pour $0\leq i<n$).

Remarque : Une fonction en escalier est réglée. Une fonction continue est réglée. Une fonction en escalier sur $[a,b]$ est bornée, puisqu'elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

On rappelle que la norme de la convergence uniforme (sur l'espace des fonctions bornées définies sur l'intervalle I et à valeurs dans un espace vectoriel normé E), est définie par :

$$\|f\|=\sup_{x\in I}\|f(x)\|.$$

Le fait que f soit bornée sur I assure que cette définition a bien un sens.

THÉORÈME. *Pour tout $\varepsilon>0$, et toute fonction réglée f sur $[a,b]$ à valeurs dans l'espace de Banach E, il existe une fonction en escalier g définie sur $[a,b]$, et à valeurs dans E, telle que $f-g$ soit bornée, et $\|f-g\|<\varepsilon$.*

Remarque : ceci implique que toute fonction réglée sur un intervalle compact $[a,b]$ est bornée.

Pour tout point c de $[a,b]$, posons

$$g_c(x)=\begin{cases} f(c^-) & \text{si } x<c\\ f(c) & \text{si } x=c\\ f(c^+) & \text{si } x>c\end{cases}$$

Par définition des limites à gauche et à droite, il existe un intervalle ouvert non vide V_c de centre c, tel que

$$\forall x\in V_c\ \|f(x)-g_c(x)\|<\varepsilon.$$

En appliquant le lemme de Lebesgue à la famille $(V_c)_{c\in[a,b]}$, on voit qu'il existe un entier n, tel que chacun des intervalles $U_i =]a + \frac{i}{n}(b-a), a + \frac{i+1}{n}(b-a)[$ $(0 \leq i < n)$ soit contenu dans l'un des V_c, disons V_{c_i}.

La fonction g égale à g_{c_i} sur U_i, et à f en chacun des points $a + \frac{i}{n}(b-a)$ est une fonction en escalier satisfaisant l'inégalité $\|f - g\| < \varepsilon$. $\square$

On notera $\mathcal{E}([a,b], E)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$ à valeurs dans E, $\mathcal{C}([a,b], E)$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans E, et $\mathcal{R}([a,b], E)$ l'ensemble des fonctions réglées sur $[a,b]$ à valeurs dans E. Tous ces ensembles sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel des fonctions bornées sur $[a,b]$ à valeurs dans E, et sont donc tous des espaces vectoriels normés.

Le théorème ci-dessus peut encore s'exprimer ainsi : $\mathcal{E}([a,b], E)$ est dense dans $\mathcal{R}([a,b], E)$.

2 Intégrale d'une fonction réglée.

2.1 Définition.

Commençons par définir l'intégrale d'une fonction en escalier.

DÉFINITION. *Soit $g : [a,b] \longrightarrow E$ une fonction en escalier (où E est un espace vectoriel normé) constante et égale à y_i sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ $(0 \leq i < n$, $x_0 = a$ et $x_n = b)$. L'intégrale de g sur $[a,b]$ est définie par :*

$$\int_a^b g(t)dt = \sum_{0\leq i<n} (x_{i+1} - x_i)y_i.$$

Dans l'expression $\int_a^b f(t)dt$, la variable t est muette.

Il est facile de vérifier que :

$$\left\| \int_a^b g(t)dt \right\| \leq (b-a)\|g\|.$$

De plus, l'intégrale est linéaire, c'est–à–dire que :

$$\int_a^b g(t)dt + \int_a^b h(t)dt = \int_a^b (g+h)(t)dt$$

et

$$\int_a^b \alpha g(t)dt = \alpha \int_a^b g(t)dt,$$

comme on le vérifie facilement.

Il en résulte immédiatement que la fonction de $\mathcal{E}([a,b], E)$ vers E définie par

$$g \mapsto \int_a^b g(t)dt$$

est une application linéaire continue, dont la norme est inférieure ou égale à $b-a$. En fait sa norme est exactement $b-a$, comme on peut le constater en intégrant une fonction contante sur $[a,b]$.

Cette application est donc $(b-a)$–lipschitzienne. En conséquence, d'après ce qui a été prouvé précédemment, elle se prolonge d'une façon unique en une application $(b-a)$-lipschitzienne de $\mathcal{R}([a,b], E)$ vers E, que l'on note encore

$$f \mapsto \int_a^b f(t)dt.$$

La linéarité est conservée grâce à la continuité de la somme et de la multiplication par un réel. Ce qui vient d'être dit vaut donc pour toute fonction réglée.

L'intégrale vérifie de plus les relations suivantes

$$\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$$

$$\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$$

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$$

$$L\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b L(f(t))dt$$

la première pouvant être prise comme une définition, puisque nous avons supposé dès le début que $a < b$, et où L est une application linéaire continue.

En effet, ces relations sont clairement satisfaites par les fonctions en escalier. Elle sont donc satisfaites par toutes les fonctions réglées par densité de $\mathcal{E}([a,b],E)$ dans $\mathcal{R}([a,b],E)$, car chaque membre de ces égalités est fonction continue de f.

2.2 Primitives.

Définition. *Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, et $f : I \longrightarrow E$ une fonction réglée. On appelle* primitive *de f sur I, toute fonction de la forme*

$$x \mapsto C + \int_{x_0}^x f(t)dt$$

où C est un réel et x_0 un point de I.

Il est aisé de constater que deux primitives quelconques de f ne diffèrent que d'une constante. En effet

$$C + \int_{x_0}^x f(t)dt - C' - \int_{x_1}^x f(t)dt = C - C' + \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt.$$

La dernière expression ci–dessus est une constante, puisqu'elle ne dépend pas de x.

La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^x f(t)dt$ est la seule primitive de f qui s'annule en x_0.

L'expression

$$\int f(t)dt$$

sert à désigner une primitive quelconque de f. Cette expression n'est bien définie que modulo l'ajout d'une fonction constante (si on est sur un intervalle ; en général elle n'est bien définie que modulo l'ajout d'une fonction *localement* constante). Aussi, pour rappeler cette indétermination, note-t-on

$$\int f(t)dt + C$$

une primitive de f, où C désigne une constante indéterminée.

Il est immédiat que si F est une primitive quelconque de f, on a

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

(Formule de Stockes). L'expression $F(b)-F(a)$ est souvent notée $[F(x)]_a^b$, ou si une confusion est à craindre $[F(x)]_{x=a}^{x=b}$.

Lemme. *Toute primitive F de la fonction réglée et bornée f sur I est $\|f\|$-lipschitzienne sur I (donc en particulier continue).*

Ceci résulte immédiatement de

$$\|F(y)-F(x)\| = \left\| \int_x^y f(t)dt \right\| \leq |y-x| \|f\|. \ \square$$

Lemme. *Toute primitive F de la fonction réglée f est dérivable en tout point de I en lequel f est continue, et en un tel point x_0, on a $F'(x_0) = f(x_0)$.*

En effet, on a

$$\begin{aligned} \left\| \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) \right\| &= \frac{1}{|x-x_0|} \left\| \int_{x_0}^x f(t)dt - \int_{x_0}^x f(x_0)dt \right\| \\ &= \frac{1}{|x-x_0|} \left\| \int_{x_0}^x (f(t)-f(x_0))dt \right\| \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. On a un $\eta > 0$ tel que $\|f(t)-f(x_0)\| < \varepsilon$ dès que $|t-x_0| < \eta$. Alors, pour $|x-x_0| < \eta$, la dernière expression ci-dessus est majorée par ε. $\square$

Remarque : Une primitive n'est donc pas nécessairement une fonction dérivable partout. Penser par exemple à une primitive de fonction en escalier. Toutefois, elle est continue partout.

En particulier, si f est continue en tout point de I, alors une primitive quelconque de f est dérivable en tout point de I, et sa dérivée est f. Voici la réciproque de cette assertion.

Lemme. *Si F est continuement dérivable sur I, alors elle est une primitive de sa dérivée.*

En effet, soit x_0 un point de I. La dérivée de (notez que la continuité de F' implique que l'intégrale à un sens)

$$x \mapsto g(x) = F(x) - \int_{x_0}^x F'(t)dt$$

est $x \mapsto F'(x) - F'(x)$, et est donc nulle. Il en résulte que g est une fonction constante (théorème des accroissements finis), et que $F(x)$ est de la forme $C + \int_{x_0}^x F'(t)dt$. $\square$

2.3 Techniques de calcul.

Le dernier lemme nous donne bon nombre de primitives, puisqu'il suffit de lire à l'envers une table de dérivées, pour avoir une table de primitives.

Par exemple,

$$\int_0^\pi \sin(x)dx = [-\cos(x)]_0^\pi = 2.$$

On retiendra en particulier les primitives suivantes.

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arc tg}(x) + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arc sin}(x) + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \text{Arg sh}(x) + C$$

La règle de dérivation d'un produit $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ nous donne :

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

(intégration par parties). Noter que f et g sont supposées être à valeurs dans une algèbre de Banach (qui peut être $\mathbb{R}$), pour que le produit ait un sens.

Soit $f : [c,d] \longrightarrow E$ une application continue, et soit F une primitive de f. Comme f est continue, f est la dérivée de F en tout point. La règle de dérivation des fonctions composées $(F(\varphi(x)))' = \varphi'(x)f(\varphi(x))$ nous donne :

$$F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_a^b \varphi'(t)f(\varphi(t))dt.$$

Si $\varphi : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ envoie a sur c et b sur d, on a alors $F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_c^d f(t)dt$, ce qui donne la formule dite de “changement de variable” suivante :

$$\int_c^d f(t)dt = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

En pratique, cette formule s'utilise en faisant la cuisine suivante. Posons $t = \varphi(u)$, alors $dt = \varphi'(u)du$, et quand t varie de c à d, u varie de a à b. La substitution de $\varphi(u)$ à t donne donc :

$$\int_c^d f(t)dt = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)du.$$

Nous n'avons pas donné de sens à l'expression dt dans l'expression $\int_a^b f(t)dt$ qui a un sens global.

Exemples d'utilisation des deux méthodes ci-dessus.

$$\begin{aligned}
\int_1^a \ln(x)dx &= [x\ln(x)]_1^a - \int_1^a x\frac{1}{x}dx \\
& \textit{(intégration par parties)} \\
&= a\ln(a) - a + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)dt \\
& \textit{(en posant } x = \sin(t), \textit{ on a } dx = \cos(t)dt\textit{)} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)dt \\
& \textit{(car } \cos(t) \geq 0 \textit{ entre } 0 \textit{ et } \frac{\pi}{2}\textit{)} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2t)+1)dt \\
&= \frac{1}{4}[\sin(2t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

2.4 Majoration des intégrales.

La majoration des intégrales se fait essentiellement avec les formules

$$\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| \leq (b-a)\|f\| \qquad \left\|\int_a^b f(t)dt\right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt.$$

La relation de Chasles
$$\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$$
est aussi souvent utile en combinaison avec l'une des précédentes, par exemple pour montrer (sans utiliser de primitive) que
$$\int_0^1 x^n dx$$
tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Soit en effet $\varepsilon > 0$, alors
$$\int_0^1 x^n dx = \int_0^{1-\varepsilon} x^n dx + \int_{1-\varepsilon}^1 x^n dx$$
La première intégrale se majore par $\sup\limits_{0\leq x\leq 1-\varepsilon} x^n$, c'est-à-dire par $(1-\varepsilon)^n$, qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini, et la deuxième se majore par ε. Le découpage en deux parties était ici nécessaire, car la formule de majoration appliquée à $\displaystyle\int_0^1 x^n dx$ ne donne qu'une majoration par 1.

Une méthode très utilisée consiste à majorer l'intégrale par une autre intégrale qu'on sait calculer.

La première et la seconde "formule de la moyenne" sont aussi souvent utiles pour majorer des intégrales.

Lemme. *(Première formule de la moyenne) Si f et g sont réglées sur $[a, b]$, f à valeurs dans $\mathbb{R}$, et g à valeurs dans un espace de Banach E, et si f a un signe constant sur $[a, b]$, alors*
$$\int_a^b f(t)g(t)dt = \left(\int_a^b f(t)dt\right) K_{f,g},$$
où $K_{f,g}$ est dans l'adhérence de l'enveloppe convexe de l'image de g.

On peut supposer que f est non nulle en au moins l'un des points où elle est continue, sinon les deux intégrales sont nulles, et le résultat est trivial. Dans ces conditions, l'intégrale du membre de droite ne peut pas être nulle.

Si f et g sont des fonctions en escalier, le quotient :
$$K_{f,g} = \frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b f(t)dt}$$
représente le barycentre d'une famille finie de points de l'image de g, avec des poids qui sont tous de même signe. Ce quotient est donc dans l'enveloppe convexe de l'image de g. Par ailleurs, le numérateur et le dénominateur sont des fonctions continues des f et g, ce qui donne le résultat. □

Lemme. *(Seconde formule de la moyenne) Si f et g sont réglées sur $[a, b]$, toutes deux à valeurs dans $\mathbb{R}$, et si f est positive et décroissante (au sens large) sur $[a, b]$, alors*
$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(a)\int_a^c g(t)dt$$
avec $c \in [a, b]$.

Quitte à multiplier f par une constante, on peut supposer que $f(a) = 1$. Posons $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)dt$. Alors, G est continue sur $[a, b]$, donc bornée, et prend toute valeur comprise entre ses bornes. De plus $G(a) = 0$. On notera respectivement m et M les bornes inférieure et supérieure de G sur $[a, b]$. Comme G est continue, il nous suffit de prouver que
$$m \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq M.$$

Supposons d'abord g en escalier. On a donc une suite $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, avec $x_0 = a$, $x_n = b$ et g constante égale à g_i sur chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$ (pour $1 \leq i \leq n$).

Posons $\mu_i = \dfrac{1}{x_i - x_{i-1}} \displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt$. Alors, d'après les hypothèses et la première formule de la moyenne, on a

$$f(a) = 1 \geq \mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n \geq 0.$$

De plus $G(x_i) - G(x_{i-1}) = g_i(x_i - x_{i-1})$. On a donc

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)g(t)dt &= \sum_{i=1}^n g_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt \\
&= \sum_{i=1}^n (G(x_i) - G(x_{i-1}))\mu_i \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n-1} G(x_i)(\mu_i - \mu_{i+1})\right) + G(x_n)\mu_n,
\end{aligned}$$

avec la convention que $\mu_0 = 1$ (notez que $G(x_0) = 0$).

Comme G est une fonction affine par morceaux, elle atteint nécessairement ses bornes en des points de la suite $x_0 \dots x_n$.

Or l'expression $\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} G(x_i)(\mu_i - \mu_{i+1})\right) + G(x_n)\mu_n$ est un barycentre à coefficients positifs des $G(x_0) \dots G(x_n)$ (la somme des coefficients vaut $\mu_0 = 1$). Elle représente donc un réel compris entre les bornes de G.

Supposons maintenant que g est une fonction réglée quelconque. Soit $\varepsilon > 0$, et soit h une fonction en escalier telle que $\|g - h\| < \varepsilon$. Posons $H(x) = \displaystyle\int_a^x h(t)dt$. On notera encore m et M les bornes de H sur $[a, b]$. On vient de voir que $\displaystyle\int_a^b f(t)h(t)dt$ est entre les bornes de H. Par ailleurs, pour tout x de $[a, b]$, on a $|H(x) - G(x)| \leq (b - a)\varepsilon$. Comme on a aussi

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt - \int_a^b f(t)h(t)dt\right| \leq (b - a)\varepsilon,$$

on voit qu'a $2(b - a)\varepsilon$ près, $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$ se situe entre les bornes de G. Comme ε est arbitraire, le lemme est démontré. □

Exercice : Dans une galerie de mine rectiligne, il y a deux voies ferrées parallèles sur chacune desquelles roule un wagonnet télécommandé. Les deux wagonnets reçoivent les ordres sur la même fréquence et sont donc sensés avoir les mêmes mouvements. Ces ordres consistent uniquement en un réglage de la vitesse qui peut être positive ou négative (marche arrière). On fait partir les deux wagonnets d'un même point de la galerie. Le deuxième wagonnet a une transmission qui patine, et ce de plus en plus au cours de la manœuvre. Démontrer que le second wagonnet ne saurait atteindre un point de la galerie où le premier wagonnet ne soit déjà passé.

2.5 Application aux nombres complexes.

Théorème. *L'application exponentielle de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}^*$ est surjective.*

Soit D le complémentaire de l'ensemble des réels négatifs ou nuls dans $\mathbb{C}$, et soit $z \in D$. Alors le segment joignant 1 à z est dans D. Pour $a \in [0,1]$, posons (on remarquera que $t+(1-t)z$ ne s'anulle pas)

$$g(a) = \int_0^a \frac{1-z}{t+(1-t)z}dt.$$

En dérivant, on obtient :

$$g'(a) = \frac{1-z}{a+(1-a)z}.$$

Posons $h(a) = e^{-g(a)}(a+(1-a)z)$. Alors, $h'(a) = -g'(a)e^{-g(a)}(a+(1-a)z) + e^{-g(a)}(1-z) = 0$. En conséquence, $h(0) = h(1)$, et $z = h(0) = h(1) = e^{-g(1)}$.

Il reste à traiter le cas des réels strictement négatifs. On a $-1 = i^2$, donc -1 est dans l'image de l'application exponentielle. Comme tous les réels positifs y sont aussi, tous les réels négatifs y sont. □

Comme conséquence, on voit que pour tout entier $k \geq 1$, tout complexe z à au moins une racine $k^{\text{ième}}$. En effet, il suffit d'écrire $z = e^u$, et on a $\left(e^{\frac{u}{k}}\right)^k = z$.

Théorème. *(Théorème de d'Alembert) Tout polynôme non constant à coefficients complexes a au moins une racine complexe.*

Comme $|P(z)|$ tend vers l'infini quand z tend vers l'infini, l'image de $z \mapsto |P(z)|$ est fermée. En effet, si y est un point adhérent à l'image de cette application, il est la limite d'une suite de la forme $(|P(z_n)|)_{n\in\mathbb{N}}$. L'hypothèse implique que la suite (z_n) ne peut pas avoir de sous–suite tendant vers l'infini. Elle est donc bornée, et a un point d'accumulation γ qui vérifie nécessairement $|P(\gamma)| = y$. On voit donc que la fonction $z \mapsto |P(z)|$ doit atteindre son minimum en un point z_0 de $\mathbb{C}$. Si $P(z)$ est sans racine, on a nécessairement $P(z_0) \neq 0$, et considérons le polynôme

$$Q(z) = \frac{P(z+z_0)}{P(z_0)}.$$

$|Q(z)|$ atteint son minimum en 0 et celui-ci vaut 1. On peut donc écrire

$$Q(z) = 1 - az^k(1+\varepsilon(z))$$

où $\varepsilon(z)$ tend vers 0 quand z tend vers 0, $a \neq 0$ et $k \geq 1$.

Comme a peut s'écrire b^k, on a

$$Q(z) = 1 - (bz)^k(1+\varepsilon(z)).$$

Soit u réel positif, tel que $|\varepsilon(\frac{u}{b})| < \frac{1}{2}$, alors

$$\begin{aligned}
|Q(\frac{u}{b})| &= |1-u^k-u^k\varepsilon(\frac{u}{b})| \\
&\leq |1-u^k| + |u^k|\frac{1}{2} \\
&\leq 1-u^k+\frac{u^k}{2} \\
&\leq 1-\frac{u^k}{2} \\
&< 1
\end{aligned}$$

ce qui est contradictoire. □

2.6 Primitives des fractions rationnelles.

On appelle *fraction rationnelle* un quotient de deux polynômes $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Nous supposerons ici que les coefficients de ces polynômes sont réels.

Les fractions rationnelles des types suivants sont appelées des *éléments simples*

$$\frac{a}{(x-b)^n} \qquad \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$$

où a, b, p et q sont des réels, n un entier au moins égal à 1, et où le trinôme x^2+px+q n'a pas de racine réelle. Les éléments simples ci-dessus sont qualifiés respectivement d'élément simple de *première espèce* et d'élément simple de *deuxième espèce.*

Voici des exemples d'éléments simples.

$$\frac{1}{x-1} \qquad \frac{1}{(x-2)^3} \qquad \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{2x+1}{(1+x+x^2)^2}$$

Le calcul des primitives des éléments simples de première espèce ne pose pas de problème particulier.

$$\int \frac{dx}{x-b} = \ln(|x-b|) + C$$

$$\int \frac{dx}{(x-b)^n} = \int (x-b)^{-n} dx = \frac{1}{(1-n)(x-b)^{n-1}} + C \qquad (\text{pour } n \geq 2)$$

Pour les éléments simpes de deuxième espèce, le changement de variable

$$y = \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}$$

(on remarquera que $4q-p^2$ est positif, car le trinôme n'a pas de racine réelle), nous ramène à une intégrale de la forme

$$\int \frac{(\alpha y+\beta)dy}{(1+y^2)^n}.$$

On est donc ramené au calcul des deux intégrales suivantes

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)^n} \qquad \int \frac{ydy}{(1+y^2)^n}$$

La deuxième se calcule en posant $u = y^2$, ce qui donne $du = 2ydy$, et ramène au calcul de $\displaystyle\int \frac{du}{(1+u)^n}$.

Pour calculer la première, remarquons qu'une intégration par parties donne

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)^n} = \left[\frac{y}{(1+y^2)^n}\right] + 2n \int \frac{y^2 dy}{(1+y^2)^{n+1}}.$$

Le dernier terme du membre de droite peut être remplacé par

$$2n \int \frac{dy}{(1+y^2)^n} - 2n \int \frac{dy}{(1+y^2)^{n+1}},$$

ce qui résoud le problème par récurrence, sachant que

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \text{Arc tg}(y) + C.$$

Soit maintenant $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle quelconque. Supposons que nous sachions décomposer le dénominateur en facteurs irréductibles (ceci est toujours théoriquement possible, mais ce résultat n'est pas effectif). Ces derniers ne peuvent être que de degré 1 ou 2, et donc de l'une des formes $(x-b)$ ou (x^2+px+q), où ce dernier trinôme n'a pas de racine réelle.

LEMME. *Toute fraction rationnelle est décomposable en la somme d'un polynôme et d'éléments simples.*

Soit $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle. Si la décomposition de $Q(x)$ ne contient pas deux facteurs irréductibles distincts, alors $Q(x)$ est de l'une des formes $(x-b)^n$ ou $(x^2+px+q)^n$. Toutefois la fraction rationnelle n'est peut être pas un élément simple, car le degré de $P(x)$ reste quelconque.

Pour faire baisser le degré de $P(x)$, il suffit d'effectuer la division euclidienne (ce qui est possible, car $\mathbb{R}$ est un corps) de $P(x)$ par le facteur irréductible de $Q(x)$. On a alors, pour $Q(x) = I(x)^n$, où $I(x)$ est $(x-b)$ ou (x^2+px+q),

$$P(x) = I(x)P'(x) + R(x)$$

où le degré de $R(x)$ est strictement inférieur à celui de $I(x)$.

Mais alors,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P'(x)}{I(x)^{n-1}} + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

et le problème est résolu par récurrence. Notez que c'est cette opération qui introduit des polynômes, lorsque $n = 1$.

Supposons maintenant que $Q(x)$ ait au moins deux facteurs irréductibles non identiques. Alors, $Q(x)$ peut s'écrire $A(x)B(x)$, où $A(x)$ et $B(x)$ sont premiers entre eux. L'identité de Bezout, nous donne

$$1 = A(x)U(x) + B(x)V(x),$$

et l'on a

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)A(x)U(x) + P(x)B(x)V(x)}{A(x)B(x)} = \frac{P(x)U(x)}{B(x)} + \frac{P(x)V(x)}{A(x)},$$

ce qui démontre le lemme par récurrence. □

Ceci résoud en principe le problème de la recherche des primitives pour une fraction rationnelle quelconque. Le seul obstacle pratique est la non effectivité de la décomposition du dénominateur en facteurs irréductibles.

Bien que la démonstration ci-dessus soit constructive, il peut être interressant de décomposer une fraction rationnelle en éléments simples par la méthode d'*identification*, qui consiste à écrire la décomposition avec des coefficients indéterminés, et à calculer ces derniers en réduisant au même dénominateur. Notez que les dénominateurs des éléments simples de la décomposition sont nécessairement des diviseurs du dénominateur de la fraction rationnelle, comme cela résulte de la preuve ci-dessus.

Exercices

1 Soit f une fonction réglée sur $[a, b]$. Trouver la limite de

$$\int_a^b f(x)\cos(nx)dx$$

quand n tend vers l'infini.

2 *Soient $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$ deux réels, tels que $\alpha + \beta = 1$. Soit x_0 un réel. On considère les deux fonctions :*

$$x \mapsto \varphi(x) = e^{\alpha x}e^{\beta x_0} \qquad \text{et} \qquad x \mapsto \psi(x) = \alpha e^x + \beta e^{x_0}$$

a) Montrer que φ et ψ prennent la même valeur en x_0.

b) Montrer que pour $x \geq x_0$, $\varphi(x) \leq \psi(x)$.

c) En déduire que si x et y sont deux réels quelconques, on a

$$e^{\alpha x}e^{\beta y} \leq \alpha e^{x} + \beta e^{y}.$$

Soient p et q deux entiers positifs, tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Soient f et g deux fonction réglées définies sur l'intervalle $[a,b]$ $(a<b)$.

d) Montrer que si f et g ne prennent que des valeurs strictement positives, et si :

$$\int_a^b f(x)^p dx = \int_a^b g(x)^q dx = 1,$$

alors :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq 1.$$

(Poser $f(x) = e^{\frac{\varphi(x)}{p}}$ et $g(x) = e^{\frac{\psi(x)}{q}}$, en justifiant que cela est possible.)

e) Montrer que si f et g ne prennent que des valeurs strictement positives, on a :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left(\int_a^b f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g(x)^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

$\boxed{3}$ On note S^1 l'ensemble des nombres complexes de module 1. Soit $f : [0,2\pi] \longrightarrow S^1$ une application dérivable. On pose

$$h(u) = \int_0^u \frac{f'(x)}{f(x)}dx.$$

a) On pose $g(u) = e^{-h(u)}f(u)$. Montrer que la fonction g est constante.

b) En déduire que si $f(0) = f(2\pi)$,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f'(x)}{f(x)}dx$$

est un élément de $\mathbb{Z}$.

Si φ est une application de S^1 dans S^1, telle que $x \mapsto f(x) = \varphi(e^{ix})$ soit dérivable (c'est une fonction de $\mathbb{R}$ vers S^1), l'entier $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ sera noté $\mathrm{d}^o(\varphi)$, et appelé le *degré* de φ.

c) Calculer le degré de l'application de S^1 dans S^1, définie par

$$z \mapsto z^n,$$

où n est un entier relatif quelconque.

On dit qu'une application φ de S^1 vers S^1 est *équivariante*, si elle satisfait $\varphi(-z) = -\varphi(z)$ pour tout z de S^1.

d) Montrer que si φ est équivariante, son degré est impair.

Soit S^2 la sphère unité de $\mathbb{R}^3$, c'est–à–dire l'ensemble des vecteurs de norme 1 dans $\mathbb{R}^3$, où il est entendu que la norme est la norme euclidienne. On considère une application F de classe $\mathcal{C}^1$ de S^2 vers $\mathbb{C}$ (c'est–à–dire la restriction à S^2 d'une application dérivable définie sur un voisinage de S^2 dans $\mathbb{R}^3$). On suppose que pour tout x de S^2, on a $F(x) \neq F(-x)$. On pose

$$\Phi(x) = \frac{F(x)-F(-x)}{|F(x)-F(-x)|}.$$

e) Montrer que Φ est dérivable, qu'elle envoie S^2 dans S^1, et qu'elle est équivariante (c'est–à–dire qu'elle vérifie $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ pour tout x de S^2).

On envoie le "rectangle" $[0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ dans $\mathbb{R}^3$ par l'application E suivante

$$(x, t) \overset{E}{\mapsto} (\cos(x)\cos(t), \sin(x)\cos(t), \sin(t)).$$

Il est clair que cette application est de classe $\mathcal{C}^1$, et qu'elle prend ses valeurs dans S^2.

f) Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on considère l'application f_t de $[0, 2\pi]$ vers S^1 définie par

$$x \overset{f_t}{\mapsto} F(E(x, t)).$$

Montrer que pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{f_t'(x)}{f_t(x)} dx$$

est nulle.

g) Démontrer que pour toute application F de classe $\mathcal{C}^1$ de S^2 dans $\mathbb{R}^2$, il existe un x de S^2 tel que $F(x) = F(-x)$.

h) Étendre le resultat de la question précédente au cas où F est seulement continue.

i) Montrer que toute involution continue de $\mathbb{R}^2$ a un point fixe.

3 Intégrales généralisées.

Jusqu'à maintenant, nous n'avons parlé que d'intégrales de la forme $\int_a^b f(t)dt$, où la fonction f est réglée sur $[a, b]$ (donc en particulier bornée). Nous allons maintenant généraliser la notion d'intégrale à des intervalles non compacts.

3.1 Convergence et critère de Cauchy.

Définition. *Si f est une fonction réglée, à valeurs dans un espace de Banach E, et définie sur un intervalle I quelconque (non nécessairement borné ni fermé), de borne inférieure α et de borne supérieure β (α ou β peut être $\pm\infty$), nous dirons que f est* intégrable *sur I, s'il existe un réel l tel que*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists [a, b] \subset I\ \forall [c, d] \subset I\ ([a, b] \subset [c, d]) \Rightarrow \left\| \int_c^d f(t)dt - l \right\| < \varepsilon$$

Si tel est le cas, l est noté

$$\int_I f(t)dt \qquad ou \qquad \int_\alpha^\beta f(t)dt.$$

On dit aussi que l'intégrale $\int_I f(t)dt$ est *convergente*. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est *divergente*. Elle n'a alors pas de sens.[1]

[1] Ce vocabulaire désuet, mais qu'on conserve par tradition, montre la confusion qu'on peut facilement faire entre le signifiant (l'écriture de l'intégrale) et le signifié (la valeur de l'intégrale). Il est clair que le mot *divergente* ne saurait s'appliquer au signifié. Le sens du mot *intégrale* est donc ici différent de celui qu'il a par exemple dans la phrase : "L'intégrale ci–dessus est nulle."

On remarquera la similitude entre cette définition et celle de la limite d'une suite. Dans la définition ci-dessus, les intervalles compacts de I tiennent un rôle analogue à celui des entiers dans le cas des limites de suites. En quelque sorte $\int_I f(t)dt$ est la limite de $\int_a^b f(t)dt$ lorsque "$[a, b]$ tend vers I".

Lemme. *(Critère de Cauchy pour les intégrales) La convergence de l'intégrale*

$$\int_I f(t)dt$$

est équivalente à

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists [a, b] \subset I \ \forall [c, d] \subset I \ (]a, b[\cap]c, d[= \phi) \Rightarrow \left\| \int_c^d f(t)dt \right\| < \varepsilon.$$

Comme on le remarquera, cette caractérisation des intégrales convergentes ne fait pas mention de la limite $l = \int_I f(t)dt$, de même que le critère de Cauchy pour les suites ne fait pas mention de la limite de la suite.

Il est clair que si l'intégrale est convergente, le critère de cauchy est satisfait. Réciproquement, prenons une suite d'intervalles compacts

$$[a_1, b_1] \subset \cdots \subset [a_n, b_n] \subset \ldots$$

tels que $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$. Alors l'hypothèse montre que la suite de réels $(\int_{a_n}^{b_n} f(t)dt)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, qui admet donc une limite l. On montre facilement que cette limite est la valeur de l'intégrale. □

La convergence de l'intégrale $\int_I f(t)dt$ est équivalente à l'existence des deux limites (où x_0 est un point quelconque de I)

$$\lim_{a\to\alpha} \int_a^{x_0} f(t)dt \qquad \lim_{b\to\beta} \int_{x_0}^b f(t)dt$$

comme on peut facilement le vérifier à l'aide du critère de Cauchy.

Exemple : La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est réglée (car continue) sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$. On a

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \left[\sqrt{x}\right]_a^b = 2(\sqrt{b} - \sqrt{a}).$$

Quand a tend vers 0 et b tend vers 1, l'expression ci-dessus a une limite égale à 2. On a donc

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

Une autre situation est celle où l'intervalle d'intégration n'est pas borné. Par exemple, la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est réglée (car continue) sur $\mathbb{R}$ tout entier. On a

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = [\text{Arc tg}(x)]_a^b = \text{Arc tg}(b) - \text{Arc tg}(a).$$

Quand a tend vers $-\infty$, et b vers $+\infty$, cette expression tend vers π, et on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

Si l'intégrale généralisée $\int_I |f(t)|dt$ est convergente, on dit que l'intégrale généralisée $\int_I f(t)dt$ est *absolument convergente.* La convergence absolue entraine la convergence (ceci résulte facilement du critère de Cauchy pour les intégrales), mais la réciproque est fausse. Par exemple, on peut prouver que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)dt}{t}$ est convergente, mais non absolument convergente. Pour cela, nous aurons besoin du critère suivant.

3.2 Critère d'Abel.

LEMME. *(Critère d'Abel de convergence des intégrales généralisées) Si les fonctions réglées g et h (à valeurs dans $\mathbb{R}$) définies sur $I = [A, +\infty[$, sont telles que*

1. *il existe une constante K, telle que pour tout intervalle compact $[a, b]$ contenu dans I, on ait*

$$\left| \int_a^b g(t)dt \right| \leq K,$$

2. *la fonction h est positive, décroissante (au sens large) et tend vers 0 quand t tend vers l'infini,*

alors l'intégrale généralisée

$$\int_A^\infty h(t)g(t)dt$$

est convergente.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $B > A$, assez grand pour que $|h(t)| < \varepsilon$, dès que $t > B$. Soit $[c, d]$ un intervalle compact contenu dans $]B, +\infty[$. Alors la seconde formule de la moyenne donne

$$\int_c^d h(t)g(t)dt = h(c) \int_c^{d'} g(t)dt$$

pour un certain d' entre c et d. On en déduit immédiatement que

$$\left| \int_c^d h(t)g(t)dt \right| \leq K\varepsilon. \ \square$$

Le critère d'Abel montre immédiatement la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)dt}{t}$ (en prenant $h(t) = \frac{1}{t}$ et $g(t) = \sin(t)$). Par contre,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|dt}{t} \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)|dt \geq \frac{2}{(k+1)\pi}.$$

Comme la série harmonique est divergente, ceci montre que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|dt}{t}$ est divergente.

Nons calculerons plus loin la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)dt}{t}$.

Exercices

$\boxed{1}$ a) Calculer (si elles existent) les intégrales suivantes :

$$\int_2^\infty \frac{1}{1-t^2}dt \qquad \int_1^\infty \text{Arc tg}\,\frac{1}{t}dt$$

b) Etudier l'existence des intégrales suivantes :

$$\int_1^\infty \frac{e^{\sin(t)}}{t}dt \qquad\qquad \int_1^\infty \sin(t^2)dt$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Soient m et n deux entiers, tels que $0 < m < n$. Montrer, en décomposant la fraction en éléments simples, que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx = \frac{\pi}{n\sin(\frac{m\pi}{n})}.$$

4 Intégrales dépendant d'un paramètre.

4.1 Cas d'un intervalle compact.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, et $f : I \times [a,b] \longrightarrow F$ une fonction continue, où F est un espace de Banach. La fonction de I vers F définie par :

$$x \mapsto \int_a^b f(x,t)dt$$

est appelée une *fonction définie par une intégrale.* L'expression $\displaystyle\int_a^b f(x,t)dt$ est aussi appelée une *intégrale dépendant d'un paramètre* (le paramètre ici est x).

Notez que l'intégrale ci-dessus a un sens, puisque pour tout x de I, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[a,b]$.

On appelle "currifiée de f" l'application $\psi : I \longrightarrow \mathcal{C}([a,b],F)$ de I vers l'espace des applications continues de $[a,b]$ vers F, définie par l'une quelconque des formules suivantes, qui sont équivalentes :

$$\psi(x)(t) = f(x,t) \qquad\qquad \psi(x) = t \mapsto f(x,t) \qquad\qquad \psi = x \mapsto (t \mapsto f(x,t))$$

On notera que $[a,b]$ étant compact, L'espace vectoriel réel $\mathcal{C}([a,b],F)$ est un espace de Banach quand on le munit de la norme de la convergence uniforme.

LEMME. *ψ est continue.*

Il s'agit de prouver que, pour tout $x_0 \in I$:

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\eta>0}\ \forall_{x\in I}\ |x-x_0| < \eta \Rightarrow \|\psi(x) - \psi(x_0)\| < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue, on a pour chaque point t de $[a,b]$, un $\eta_t > 0$, et un voisinage ouvert V_t de t dans $[a,b]$, tels que pour tous $x \in I$ et $t' \in [a,b]$:

$$|x-x_0| < \eta_t \wedge t' \in V_t \Rightarrow \|f(x,t') - f(x_0,t)\| < \varepsilon/2.$$

La famille d'ouverts $(V_t)_{t\in[a,b]}$ recouvre $[a,b]$. Il en est donc de même d'une sous–famille finie $V_{t_1},\dots,V_{t_p}$ de cette famille. Posons $\eta = \inf(\eta_{t_1},\dots,\eta_{t_p})$. On a $\eta > 0$. Il nous reste à prouver que :

$$\forall_{x\in I}\ |x-x_0| < \eta \Rightarrow \|\psi(x) - \psi(x_0)\| < \varepsilon,$$

c'est à dire que :

$$\forall_{x\in I}\ |x-x_0| < \eta \Rightarrow \forall_{t\in[a,b]}\ \|\psi(x)(t) - \psi(x_0)(t)\| < \varepsilon.$$

Soit donc $x \in I$, tel que $|x - x_0| < \eta$ et soit $t \in [a, b]$. Il reste à prouver que $\|f(x,t) - f(x_0,t)\| < \varepsilon$. Il existe un t_i $(1 \leq i \leq p)$, tel que $t \in V_{t_i}$. On a donc $\|f(x,t) - f(x_0,t_i)\| < \varepsilon/2$. Pour la même raison on a aussi $\|f(x_0,t) - f(x_0,t_i)\| < \varepsilon/2$, puisque $|x_0 - x_0| = 0 < \eta$. Donc :

$$\|f(x,t) - f(x_0,t)\| \leq \|f(x,t) - f(x_0,t_i)\| + \|f(x_0,t_i) - f(x_0,t)\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \ \square$$

Corollaire. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, et $f : I \times [a, b] \longrightarrow F$ une fonction continue, où F est un espace de Banach. La fonction de I vers F définie par :*

$$x \mapsto \int_a^b f(x,t)dt$$

est continue sur I.

En effet, c'est la composée de la currifiée de f, qui est continue d'après le lemme précédent, avec l'intégrale sur $[a, b]$ qui est elle–même continue. $\square$

Lemme. *(Dérivée d'une currifiée) Si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, F un espace de Banach, $f : I \times [a, b] \longrightarrow F$ une application continue, dont la dérivée partielle $D_1(f)$ par rapport à la première variable (celle qui appartient à I) existe et est continue, alors la currifiée $\psi : I \longrightarrow \mathcal{C}([a, b], F)$ de f est dérivable, et sa dérivée en $x \in I$, $\psi'(x) \in \mathcal{C}([a, b], F)$ est donnée par :*

$$\psi'(x) = t \mapsto D_1(f)(x,t).$$

Par définition, $D_1(f)(x,t)$ est la dérivée en x de la fonction composée $f \circ \alpha_t$, où α_t est définie par $\alpha_t(x) = (x,t)$, c'est à dire $D_1(f)(x,t) = (f \circ \alpha_t)'(x)$.

La seule chose qu'on ait à prouver est que :

$$\frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} - (t \mapsto (f \circ \alpha_t)'(x))$$

tend vers 0, quand h tend vers 0. Cette expression est égale à :

$$t \mapsto \frac{f(x+h,t) - f(x,t)}{h} - (f \circ \alpha_t)'(x).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il s'agit de trouver $\eta > 0$, tel que :

$$|h| < \eta \Rightarrow \left\| t \mapsto \frac{f(x+h,t) - f(x,t)}{h} - (f \circ \alpha_t)'(x) \right\| < \varepsilon.$$

La norme sur les fonctions continues de $[a, b]$ vers F étant celle de la convergence uniforme, cette dernière implication est équivalente à :

$$|h| < \eta \Rightarrow \sup_{t \in [a,b]} \left\| \frac{f(x+h,t) - f(x,t)}{h} - (f \circ \alpha_t)'(x) \right\| < \varepsilon.$$

La question essentielle est donc de majorer l'expression $\left\| \frac{f(x+h,t) - f(x,t)}{h} - (f \circ \alpha_t)'(x) \right\|$ d'une manière indépendante de t. Or cette expression n'est autre que :

$$\left\| \frac{(f \circ \alpha_t)(x+h) - (f \circ \alpha_t)(x)}{h} - (f \circ \alpha_t)'(x) \right\|$$

Comme $f \circ \alpha_t$ est par hypothèse dérivable en x, l'expression :

$$\gamma_{x,t}(h) = \frac{(f \circ \alpha_t)(x+h) - (f \circ \alpha_t)(x)}{h} - (f \circ \alpha_t)'(x),$$

tend vers 0 quand h tend vers 0, le point délicat étant que $\gamma_{x,t}(h)$ dépend de t. Si ce n'était pas le cas, la démonstration serait finie ici.

On a :

$$\begin{aligned} h\gamma_{x,t}(h) &= (f \circ \alpha_t)(x+h) - (f \circ \alpha_t)(x) - h(f \circ \alpha_t)'(x) \\ &= [(f \circ \alpha_t)(x+h) - h(f \circ \alpha_t)'(x)] - [(f \circ \alpha_t)(x) - 0(f \circ \alpha_t)'(x)] \\ &= \beta_t(h) - \beta_t(0), \end{aligned}$$

où on a posé $\beta_t(h) = (f \circ \alpha_t)(x+h) - h(f \circ \alpha_t)'(x)$. On a donc :

$$\gamma_{x,t}(h) = \frac{\beta_t(h) - \beta_t(0)}{h}.$$

Pour chaque $t \in [a,b]$, la fonction β_t est dérivable sur un voisinage de 0 dans E, puisque pour h assez petit, $x+h$ appartient à I (I est ouvert). Sa dérivée en h est :

$$(\beta_t)'(h) = (f \circ \alpha_t)'(x+h) - (f \circ \alpha_t)'(x).$$

Par hypothèse, la fonction $(x,t) \mapsto (f \circ \alpha_t)'(x)$ est continue sur $I \times [a,b]$. Il résulte du lemme précédent que sa currifiée $x \mapsto (t \mapsto (f \circ \alpha_t)'(x)$ est continue sur I, et donc que la fonction :

$$h \mapsto (t \mapsto (\beta_t)'(h))$$

est continue sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$. Or, cette dernière fonction vaut 0 (le 0 de l'espace de Banach $\mathcal{C}([a,b],F)$) en 0 (le 0 de $\mathbb{R}$). Il existe donc $\eta > 0$, tel que :

$$|h| < \eta \Rightarrow \forall_{t \in [a,b]} \ \|(\beta_t)'(h)\| < \varepsilon.$$

Le théorème des accroissements finis nous montre donc que :

$$|h| < \eta \Rightarrow \forall_{t \in [a,b]} \ \left\| \frac{\beta_t(h) - \beta_t(0)}{h} \right\| < \varepsilon,$$

c'est à dire :

$$|h| < \eta \Rightarrow \|t \mapsto \gamma_{x,t}(h)\| < \varepsilon. \ \square$$

Corollaire. *(Règle de Leibnitz) Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, F un espace de Banach, et $f : I \times [a,b] \longrightarrow F$ une fonction continue, ayant une dérivée partielle $D_1 f$ par rapport à la première variable, continue sur $I \times [a,b]$. Alors, la fonction θ définie par :*

$$\theta(x) = \int_a^b f(x,t)dt$$

est dérivable sur I et sa dérivée en un point x de I est donnée par :

$$\theta'(x) = \int_a^b D_1(f)(x,t)dt.$$

On a $\theta = J \circ \psi$, où ψ est la currifiée de f, et où $J(\varphi) = \int_a^b \varphi(t)dt$, pour toute $\varphi \in \mathcal{C}([a,b],F)$. On sait par le lemme précédent que ψ est dérivable. Par ailleurs, J est dérivable, puisque c'est une application linéaire continue (on a d'ailleurs $\|J\| = |b-a|$). Il en résulte que θ est dérivable, et que

$$\theta'(x) = I(\psi'(x)) = \int_a^b D_1(f)(x,t)dt. \ \square$$

Théorème. *(Théorème de Fubini) Pour f continue sur $[c,d]\times[a,b]$ (à valeurs dans un espace de Banach E), on a*

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)dt\right) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)dx\right) dt.$$

Posons

$$\varphi(x) = \int_c^x \left(\int_a^b f(s,t)dt\right) ds - \int_a^b \left(\int_c^x f(s,t)ds\right) dt.$$

Alors, $\varphi(c)=0$, et la règle de Leibnitz donne $\varphi'(x)=0$ pour tout x. On a donc $\varphi(d)=0$. $\square$

4.2 Cas d'un intervalle non compact.

Nous allons étendre les résultats de la section précédente aux intégrales généralisées. On a essentiellement les mêmes théorèmes, avec pour seule différence une hypothèse supplémentaire sur la convergence des intégrales.

Dans toute cette section, f désigne une fonction continue $f : I\times J \longrightarrow F$, où I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, J un intervalle de $\mathbb{R}$ (non nécessairement compact), et F un espace de Banach.

Rappelons que la convergence (pour tout x) de l'intégrale $\int_J f(x,t)dt$ est définie par l'existence d'une fonction $x\mapsto l(x)$ de I vers F (valeur de cette intégrale pour x donné), telle que :

$$\forall_{x\in I}\ \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{[a,b]\subset J}\ \forall_{[c,d]\subset J}\ ([a,b]\subset[c,d]) \Rightarrow \left\|\int_c^d f(x,t)dt - l(x)\right\| < \varepsilon.$$

On remarquera que l'intervalle $[a,b]$, qui dépend bien sûr de ε, dépend aussi de x. Si l'on exige que $[a,b]$ ne dépende que de ε, et non plus de x, on obtient un notion plus forte que la “convergence pour tout x”, que l'on appelle la “convergence uniforme sur I”, et qui s'énonce ainsi :

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{[a,b]\subset J}\ \forall_{x\in U}\ \forall_{[c,d]\subset J}\ ([a,b]\subset[c,d]) \Rightarrow \left\|\int_c^d f(x,t)dt - l(x)\right\| < \varepsilon.$$

Cette condition est équivalente au *critère de Cauchy uniforme* pour les intégrales, que voici :

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{[a,b]\subset J}\ \forall_{x\in I}\ \forall_{[c,d]\subset J}\ (]a,b[\cap]c,d[=\phi) \Rightarrow \left\|\int_c^d f(x,t)dt\right\| < \varepsilon.$$

Remarque : Pour prouver qu'une intégrale $\int_J f(x,t)dt$ est uniformément convergente sur I, il suffit de trouver une fonction $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, intégrable sur I, telle que $\forall_{x\in I}\ \forall_{t\in J}\ \|f(t,x)\| \leq g(t)$. On dit alors que l'intégrale *converge uniformément par domination.*

Théorème. *Si l'intégrale $\int_J f(x,t)dt$ est uniformément convergente sur I, alors la fonction :*

$$x \mapsto \int_J f(x,t)dt$$

est continue sur I.

Soit $\varepsilon>0$, et $x_0\in I$. Pour tout intervalle compact $[a,b]$ assez grand contenu dans J, et pour tout x dans I, on a

$$\left\|\int_J f(x,t)dt - \int_a^b f(x,t)dt\right\| < \varepsilon.$$

Par ailleurs, les résultats obtenus dans la section précédente montrent qu'il existe un $\eta > 0$, tel que pour $|x - x_0| < \eta$, on ait
$$\left\| \int_a^b f(x,t)dt - \int_a^b f(x_0,t)dt \right\| < \varepsilon.$$
La combinaison de ces deux inégalités, la première étant utilisée en x et en x_0, donne le résultat. □

THÉORÈME. *Soit $f : I \times J \longrightarrow F$ une application continue, telle que $(x,t) \mapsto D_1(f)(x,t)$ soit définie et* continue *sur $I \times J$, et que les intégrales :*

$$\int_J f(x,t)dt \qquad \text{et} \qquad \int_J D_1(f)(x,t)dt$$

soient uniformément convergentes sur I. Alors la fonction g définie par :

$$x \mapsto \int_J f(x,t)dt$$

est dérivable sur I et a pour dérivée
$$x \mapsto \int_J D_1(f)(x,t)dt.$$
(règle de Leibnitz).

Soit x un point de I, et soit $\varepsilon > 0$. Il s'agit de trouver un $\eta > 0$, tel que pour tout h tel que $|h| < \eta$, on ait :
$$\left\| \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - \int_J D_1(f)(x,t)dt \right\| \leq \varepsilon.$$

Comme l'integrale $\int_J D_1(f)(x,t)dt$ est *uniformément* convergente sur I, on a un intervalle $[a,b]$ ne dépendant pas de x et inclus dans I, tel que :

$$\left\| \int_J D_1(f)(x,t)dt - \int_a^b D_1(f)(x,t)dt \right\| \leq \varepsilon.$$

Par ailleurs, $\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$ n'est autre que $\displaystyle\int_J \frac{f(x+h,t) - f(x,t)}{h}dt$, et on a :
$$\left\| \int_J \frac{f(x+h,t) - f(x,t)}{h}dt - \int_a^b \frac{f(x+h,t) - f(x,t)}{h}dt \right\| < \varepsilon.$$

En effet, pour montrer cette inégalité, il suffit de montrer que pour tout intervalle $[c,d]$ disjoint de $[a,b]$, et contenu dans J, on a :
$$\left\| \int_c^d \frac{f(x+h,t) - f(x,t)}{h}dt \right\| \leq \varepsilon.$$

La fonction $u \mapsto \displaystyle\int_c^d f(x+uh,t)dt$ est continue et dérivable sur un intervalle ouvert contenant l'intervalle $[0,1]$. Sa dérivée en u est égale à :

$$h \int_c^d D_1(f)(x+uh,t)dt,$$

puisqu'elle est la composée des fonctions $u \mapsto x + uh$ et $y \mapsto \displaystyle\int_c^d f(y,t)dt$.

Cette dérivée, qui est continue, reste bornée sur l'intervalle $[0,1]$. On a donc, par le théorème des accroissements finis :

$$\left\| \int_c^d (f(x+h,t) - f(x,t))dt \right\| \leq |h| \sup_{u \in [0,1]} \left\| \int_c^d D_1(f)(x+uh,t)dt \right\|.$$

Or l'intervalle $[a,b]$ a justement été choisi tel que $\left\| \int_c^d D_1(f)(x,t)dt \right\|$ soit inférieur à ε, dès que $[c,d]$ est disjoint de $[a,b]$, et ceci quelle que soit la valeur de x, ce qui vaut donc si on remplace x par $x+uh$.

Il nous reste donc simplement à trouver $\eta > 0$, tel que :

$$\left\| \int_a^b \frac{f(x+h,t) - f(x,t)}{h} dt - \int_a^b D_1(f)(x,t)dt \right\| \leq \varepsilon,$$

pour $|h| \leq \eta$. Or ceci résulte du théorème de dérivation d'une intégrale sur un intervalle compact par rapport à un paramètre. $\square$

Théorème. *(Théorème de Fubini) Soit $f : I \times [\alpha,\beta] \longrightarrow F$ une application continue, où I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, et F un espace de Banach. Si l'intégrale $\int_I f(t,x)dt$ est uniformément convergente pour $x \in [\alpha,\beta]$, alors :*

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_I f(t,x)dt \right) dx = \int_I \left(\int_\alpha^\beta f(t,x)dx \right) dt.$$

On procède comme précedemment, en considérant la fonction φ définie par :

$$\varphi(u) = \int_\alpha^u \left(\int_I f(t,x)dt \right) dx - \int_I \left(\int_\alpha^u f(t,x)dx \right) dt.$$

En dérivant φ, on trouve :

$$\varphi'(u) = \int_I f(t,u)dt - \int_I f(t,u)dt = 0.$$

L'intégrale $\int_I f(t,u)dt$ étant uniformément convergente, cette dérivation est licite. φ est donc constante, c'est–à–dire nulle. $\square$

4.3 Un exemple.

Comme illustration des théorèmes précédents, nous allons calculer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt,$$

dont nous avons déjà montré qu'elle est convergente.

Soit a un réel positif ou nul, et considérons l'intégrale :

$$I_a = \int_0^{+\infty} e^{-ta} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

Pour $a = 0$, il s'agit de l'intégrale à calculer. Comme $\frac{\sin(t)}{t}$ est de module inférieur à 1, l'intégrale ci–dessus est dominée par l'intégrale :

$$I_a = \int_0^{+\infty} e^{-ta} dt,$$

qui est convergente si $a > 0$. Comme e^{-ta} est fonction décroissante de a, il en résulte que la convergence de l'intégrale I_a est uniforme sur tout intervalle de la forme $[\varepsilon, +\infty[$, avec $\varepsilon > 0$. I_a est donc une fonction continue de a sur $]0, +\infty[$.

$a \mapsto I_a$ est aussi continue en 0. En effet, on a :

$$|I_0 - I_a| = \left|\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-ta}}{t}\sin(t)dt\right|,$$

et la fonction $t \mapsto \dfrac{1-e^{-ta}}{t}$ est décroissante. En effet, sa dérivée est $t \mapsto \dfrac{(1+ta)e^{-ta}-1}{t^2}$. Pour voir qu'elle reste négative pour tout $t > 0$, il suffit de montrer que $(1+ta)e^{-ta}$ reste plus petit que 1, c'est–à–dire que $1 + ta \leq e^{ta}$. Or ceci est clair pour t et a positifs, puisque $e^{ta} = 1 + ta + \dfrac{(ta)^2}{2!} + \dots$.[2]

Par ailleurs, la fonction $t \mapsto \dfrac{1-e^{-ta}}{t}$ est positive, et tend vers a quand t tend vers 0. La deuxième formule de la moyenne donne donc, pour tout réel positif A, un réel B entre 0 et A, tel que :

$$\left|\int_0^{A} \frac{1-e^{-ta}}{t}\sin(t)dt\right| = a\left|\int_0^{B}\sin(t)dt\right| \leq 2a.$$

On a donc $|I_0 - I_a| \leq 2a$, ce qui montre la continuité de $a \mapsto I_a$ en 0.

Par ailleurs, on peut calculer I_a pour $a > 0$. En effet, en appliquant la règle de Leibnitz à I_a, on obtient l'intégrale :

$$I'_a = -\int_0^{+\infty} e^{-ta}\sin(t)dt,$$

qui est uniformément convergente (car dominée) sur tout intervalle de la forme $[\varepsilon, +\infty[$, avec $\varepsilon > 0$. I'_a est donc bien la dérivée de I_a par rapport à a, pour $a > 0$.

Cette intégrale est la partie imaginaire de $-\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ta}e^{it}dt$, qui se calcule facilement. On trouve que $I'_a = \dfrac{-1}{1+a^2}$, d'où on déduit que $I_a = -\text{Arc tg}(a) + C$, pour une certaine constante C. Cette constante est déterminée en faisant tendre a vers l'infini. En effet, I_a tend alors vers 0, ce qui fait que $C = \dfrac{\pi}{2}$.

On a donc $I_a = -\text{Arc tg}(a) + \dfrac{\pi}{2}$, ce qui donne, quand on fait tendre a vers 0 :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}.$$

<u>Exercices</u>

$\boxed{1}$ *Soit $x > 0$. On considère l'intégrale $I_x = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}dt$.*

a) Montrer que la règle Leibnitz s'applique pour $x \in]\alpha, +\infty[$, pour tout $\alpha > 0$. (On pourra utiliser le fait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (intégrale de Gauss).)

b) Calculer I_x. (On justifiera toutes les étapes.)

[2] En fait $1 + u$ est inférieur à e^u pour tout réel u (donc en particulier ta), car $u \mapsto 1 + u$ a pour graphe la tangente en 0 au graphe de $u \mapsto e^u$, qui est convexe.

$\boxed{2}$ a) On considère les deux fonctions de x suivantes :

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2 \qquad \text{et} \qquad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

Dériver des deux fonctions, et calculer $f(x) + g(x)$.

b) Chercher la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$, et en déduire la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt.$$

$\boxed{3}$ Soit $\alpha > 0$. Démontrer en dérivant par rapport au paramètre, et en utilisant l'intégrale de Gauss, que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(\alpha x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{\alpha^2}{4}}.$$

$\boxed{4}$ Soit $\alpha > 0$. Démontrer en dérivant par rapport au paramètre, et en utilisant l'intégrale de Gauss, que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\alpha x^2}}{x^2} dx = \sqrt{\pi\alpha}.$$

$\boxed{5}$ On pose pour x réel strictement positif :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

a) Montrer que cette intégrale est uniformément convergente pour x dans un intervalle compact de $]0, +\infty[$. (Traiter séparément les intégrales entre 0 et 1 et entre 1 et $+\infty$.) Que peut-on dire de la fonction Γ sur $]0, +\infty[$?

b) Montrer que pour $x > 0$, on a :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad \Gamma(1) = 1 \qquad \Gamma(n) = (n-1)!$$

(pour n entier positif).

c) Montrer que $\Gamma(x)$ est équivalent à $\dfrac{1}{x}$ quand x tend vers 0.

d) Montrer que

$$\Gamma(1 + \frac{1}{x}) = \int_0^\infty e^{-t^x} dt.$$

(Faire le changement de variable $t = u^x$.)

e) Montrer que

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

(On rappelle que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.)

Solutions des exercices.

Section 2.

$\boxed{\textbf{1.}}$ Soit $\varepsilon > 0$. Comme la fonction f est réglée, il existe une fonction en escalier g définie sur $[a, b]$, telle que pour tout x de $[a, b]$, on ait $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$.

On voit alors que la différence des deux intégrales

$$\int_a^b f(x)\cos(nx)dx \qquad \text{et} \qquad \int_a^b g(x)\cos(nx)dx$$

n'est pas plus grande que $\varepsilon(b - a)$.

Si on prouve que la limite de la seconde intégrale est 0 quand n tend vers l'infini, il en résultera que la première tend aussi vers 0, car ε est arbitrairement petit.

Or la seconde intégrale est une combinaison linéaire finie (à coefficients réels) d'intégrales de la forme

$$\int_\alpha^\beta \cos(nx)dx,$$

qui tendent toutes vers 0 quand n tend vers l'infini (calcul explicite).

$\boxed{\textbf{2.}}$ a) On a

$$\varphi(x_0) = e^{\alpha x_0}e^{\beta x_0} = e^{(\alpha+\beta)x_0} = e^{x_0},$$
$$\psi(x_0) = (\alpha + \beta)e^{x_0} = e^{x_0}.$$

b) Dérivons $\varphi - \psi$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) - \psi'(x) &= \alpha e^{\alpha x}e^{\beta x_0} - \alpha e^x \\
&= \alpha e^x(e^{(\alpha-1)x+\beta x_0} - 1) \\
&= \alpha e^x(e^{\beta(x_0-x)} - 1)
\end{aligned}$$

Comme β est positif, et $x_0 - x$ négatif, $e^{\beta(x_0-x)}$ est plus petit que 1, et la dérivée de $\varphi - \psi$ est négative. Il en résulte que pour $x \leq x_0$, on a $\varphi(x) \leq \psi(x)$.

c) Comme x et y jouent des rôles identiques dans l'inégalité demandée, on peut supposer $x \geq y$. y peut donc jouer le rôle de x_0 dans les questions précédentes. L'inégalité demandée résulte alors de la question précédente.

d) On a, en définissant φ et ψ comme indiqué dans l'énoncé (ce qui est possible parce que f et g sont à valeurs strictement positives) :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)g(x)dx &= \int_a^b e^{\frac{\varphi(x)}{p}+\frac{\psi(x)}{q}}dx \\
&\leq \frac{1}{p}\int_a^b e^{\varphi(x)}dx + \frac{1}{q}\int_a^b e^{\psi(x)}dx \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q}(\text{car } e^{\varphi(x)} = f(x)^p) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

e) Posons

$$A = \left(\int_a^b f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad\qquad B = \left(\int_a^b g(x)^q dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

et
$$F(x) = \frac{f(x)}{A} \qquad\qquad G(x) = \frac{g(x)}{B}.$$
Alors,
$$\int_a^b F(x)^p dx = \frac{1}{A^p} \int_a^b f(x)^p dx = 1,$$
et de même $\displaystyle\int_a^b G(x)^q dx = 1$. On peut donc appliquer le résultat de la question précédente à F et G, ce qui donne
$$\int_a^b F(x)G(x)dx \leq 1,$$
c'est-à-dire, en multipliant par AB :
$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq AB,$$
ce qui est le résultat cherché.

3. a) On a d'abord $h'(u) = \dfrac{f'(u)}{f(u)}$, soit $h'(u)f(u) = f'(u)$. Dérivons maintenant g. On a
$$g'(u) = -h'(u)e^{-h(u)}f(u) + e^{-h(u)}f'(u) = 0$$
g (qui est définie sur un intervalle) est donc constante.

b) Il résulte de la question précédente que $g(0) = g(2\pi)$. Or on a aussi $f(0) = f(2\pi)$. Comme f ne s'annulle pas (elle prend ses valeurs dans S^1), on en déduit
$$e^{-h(0)} = e^{-h(2\pi)},$$
soit $e^{h(2\pi)} = 1$, puisque $h(0) = 0$. Il en résulte que $h(2\pi)$ est de la forme $2i\pi n$ avec n entier relatif.

c) C'est un calcul d'intégrale particulièrement simple.
$$\mathrm{d}^o(z \mapsto z^n) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ine^{inx}}{e^{inx}} dx = n.$$
En particulier, l'identité est de degré 1, l'application constante qui envoie tout élément de S^1 sur 1 est de degré 0, la conjugaison $z \mapsto \overline{z}$ est de degré -1.

d) Posons $f(x) = \varphi(e^{ix})$. On a
$$f(x+\pi) = \varphi(e^{i(x+\pi)}) = \varphi(-e^{ix}) = -\varphi(e^{ix}) = -f(x),$$
d'où on déduit $f'(x+\pi) = -f'(x)$.

On a alors, en faisant le changement de variable $x = u + \pi$,
$$\int_\pi^{2\pi} \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int_0^\pi \frac{f'(u+\pi)}{f(u+\pi)} du = \int_0^\pi \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$
d'où
$$\int_0^{2\pi} \frac{f'(x)}{f(x)} dx = 2 \int_0^\pi \frac{f'(x)}{f(x)} dx.$$

Les fonctions h et g étant définies comme dans la question a), on doit calculer $h(\pi)$. Or, g étant constante, on a $g(\pi) = g(0)$. On a aussi $f(\pi) = -f(0)$. On a donc $e^{h(\pi)} = -1$, ce qui montre que $h(\pi)$ est de la forme $(2k+1)i\pi$.

Le degré de φ, est égal par définition à $\frac{1}{2i\pi}2h(\pi)$, c'est–à–dire à un nombre impair.

e) Φ est dérivable, car elle est le quotient de deux fonctions dérivable (la fonction “valeur absolue” est dérivable sur $\mathbb{C}-\{0\}$), dont la deuxième ne s'annulle pas. Elle envoie S^2 dans S^1, car clairement $\Phi(x)$ est de module 1. Enfin la vérification qu'elle est équivariante se fait à vue.

f) f_t est dérivable, comme composée de fonctions dérivables. Par ailleurs, la fonction

$$(x,t)\mapsto \frac{f_t'(x)}{f_t(x)}$$

est continue sur le compact $[0,2\pi]\times[0,\frac{\pi}{2}]$. Il en résulte que la fonction

$$t\mapsto \int_0^{2\pi}\frac{f_t'(x)}{f_t(x)}dx$$

est continue sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

Par ailleurs, pour tout t, on a $f_t(0)=f_t(2\pi)$. Il en résulte d'après la question b), que $\int_0^{2\pi}\frac{f_t'(x)}{f_t(x)}dx$ est dans $2i\pi\mathbb{Z}$. Comme $2i\pi\mathbb{Z}$ est discret, cette intégrale est indépendante de t. Il suffit donc de montrer qu'elle est nulle pour $t=\frac{\pi}{2}$, ce qui est clair car la fonction $f_{\frac{\pi}{2}}$ est constante.

g) S'il n'existe pas d'x tel que $F(x)=F(-x)$, on est dans les conditions d'application des questions e) et f). Considérons alors la fonction f_0 définie dans la question précédente. On a vu que

$$\int_0^{2\pi}\frac{f_0'(x)}{f_0(x)}dx=0.$$

On a $f_0(x)=\varphi(e^{ix})$, où φ est l'application de S^1 dans S^1 définie par $y\mapsto F(\Re(y),\mathrm{Im}\,(y),0)$. L'integrale ci–dessus montre que le degré de φ est 0. Par ailleurs, φ est équivariante. Son degré doit donc être impair, ce qui est une contradiction.

h) Si la fonction continue $F:S^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ vérifie $F(x)\neq F(-x)$ pour tout x de S^2, alors, par compacité elle vérifie $\|F(x)-F(-x)\|>\varepsilon$ pour un certain $\varepsilon>0$. D'après le théorème se Stone–Weierstrass (S^2 est compacte), appliqué à chacune des composantes de F, il existe une fonction polynômiale (donc de type $\mathcal{C}^1$) $G:S^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ telle que pour tout x de S^2, $\|F(x)-G(x)\|<\frac{\varepsilon}{3}$. Ceci interdit $G(x)=G(-x)$ pour tout point x de S^2, ce qui est impossible, d'après la question précédente.

i) Appelons encore “équivariante” une application $F:S^n\longrightarrow\mathbb{R}^2$ qui vérifie pour tout x de S^n : $F(-x)=f(F(x))$, où f est l'involution donnée sur $\mathbb{R}^2$.

On identifie S^{n-1} à “l'équateur” de S^n, c'est–à–dire l'ensemble des points de S^n dont la dernière coordonnée est nulle. Montrons que toute application équivariante F de S^{n-1} vers $\mathbb{R}^2$ se prolonge en une application équivariante $\overline{F}$ de S^n vers $\mathbb{R}^2$.

Si x est distinct des deux pôles de S^n, x a une “projection” $\overline{x}$ bien définie sur l'équateur de S^n. Elle est définie par

$$\overline{(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})}=\frac{(x_1,\dots,x_n,0)}{\|(x_1,\dots,x_n,0)\|}.$$

Si x est dans l'hémisphère nord de S^n (c'est–à–dire si sa dernière coordonnée x_{n+1} est positive ou nulle), et distinct du pôle nord, on pose $\overline{F}(x)=(1-x_{n+1})F(\overline{x})$. Noter que si x est dans S^{n-1}, $\overline{F}(x)=F(x)$. Cette application $\overline{F}$ est continue. Elle se prolonge par continuité au pôle nord de S^n. En effet, ceci résulte de ce que la norme de $\overline{F}(x)$ est majorée par le produit de $(1-x_{n+1})$ et du sup des normes des $F(x)$ pour x dans S^{n-1}. $\overline{F}(x)$ tend donc vers 0 quand x tend vers le pôle nord de S^n. $\overline{F}$ est alors automatiquement définie sur l'hémisphère sud par l'exigence d'équivariance $\overline{F}(-x)=f(\overline{F}(x))$.

Il en résulte qu'il existe une application continue équivariante F de S^2 dans $\mathbb{R}^2$. En effet, il est facile de construire une application équivariante de S^0 dans $\mathbb{R}^2$ en envoyant 1 sur 0 et -1 sur $f(0)$.

Appliquons le résultat de la question précédente à F. On a alors un x de S^2 tel que $F(x) = F(-x) = f(F(x))$, ce qui signifie que $F(x)$ est un point fixe de f.

Note : Les résultats démontrés ici dans les deux dernières questions, restent valables si on remplace $\mathbb{R}^2$ par $\mathbb{R}^n$. On peut facilement constater que certains arguments se généralisent facilement à la dimension n. En fait, la seule difficulté est de montrer que toute application équivariante de S^n dans S^n est de degré impair (il faut aussi bien sûr définir ce qu'on entend par degré dans ce cas). Ceci demeure non élémentaire.

Section 3.

1. a) Première intégrale : En $t = 2$, la fonction est continue. Au voisinage de l'infini, elle est équivalente à $-\frac{1}{t^2}$ donc intégrable. On trouve facilement qu'elle vaut $-\frac{1}{2}\text{Log}\,(3)$ en décomposant la fraction en éléments simples.

Deuxième intégrale : En $t = 1$, la fonction est continue. Au voisinage de l'infini, $\frac{1}{t}$ tend vers 0, et Arc tg $(\frac{1}{t})$ est équivalent à $\frac{1}{t}$. L'intégrale est donc divergente.

b) Première intégrale : Comme $\sin(t)$ oscille entre -1 et 1, $e^{\sin(t)}$ oscille entre $\frac{1}{e}$ et e. La fonction à intégrer est donc minorée au voisinage de l'infini par $\frac{1}{et}$, et l'intégrale est divergente.

Deuxième intégrale : En faisant le changement de variable $t^2 = u$, l'intégrale devient

$$\int_1^\infty \sin(u)\frac{1}{2\sqrt{u}}du.$$

Or cette dernière intégrale est convergente en vertu du critère d'Abel. En effet, l'intégrale de $\sin(u)$ reste majorée par 2 sur tout intervalle, et la fonction $u \mapsto \frac{1}{2\sqrt{u}}$ est positive, décroissante, et tend vers 0 à l'infini. Bien sûr, cette intégrale n'est pas absolument convergente (même raison que pour $\int_1^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt$, voir le cours).

2. La convergence de l'intégrale en 0 ne pose aucun problème, de même qu'en $+\infty$, car $m-1 \leq n-2$.

Bien que le théorème des résidus soit appliquable ici, on se propose de traiter l'exercice par des moyens élémentaires. On va donc décomposer la fraction rationnelle en éléments simples.

Soient $\zeta_0 \dots \zeta_{n-1}$ les racines du polynôme $1 + x^n$, c'est-à-dire les racines n-ièmes de -1. On a

$$\zeta_k = e^{i\pi\frac{2k+1}{n}}.$$

La décomposition en éléments simples a la forme

$$\frac{x^{m-1}}{1+x^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{x-\zeta_k}$$

On détermine la valeur de a_k en multipliant chaque membre de cette égalité par $x - \zeta_k$, et en faisant $x = \zeta_k$. On obtient

$$a_k = \frac{\zeta_k^{m-1}}{\prod_{j\neq k}(\zeta_k - \zeta_j)}.$$

En mettant ζ_k^{n-1} en facteur au dénominateur, et en tenant compte du fait que $\zeta_k^n = -1$, on a

$$a_k = -\frac{\zeta_k^m}{\prod_{j\neq k}(1-\frac{\zeta_j}{\zeta_k})}.$$

Par ailleurs, $\dfrac{\zeta_j}{\zeta_k} = e^{\frac{2i\pi(j-k)}{n}}$. Les $\dfrac{\zeta_j}{\zeta_k}$, pour $j \neq k$, sont donc les racines n-ièmes de l'unité, autres que 1. Il en résulte que le produit

$$\prod_{j\neq k}(1-\frac{\zeta_j}{\zeta_k})$$

est simplement la valeur de $\dfrac{x^n-1}{x-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$ pour $x = 1$, c'est-à-dire n. En conséquence,

$$a_k = -\frac{1}{n}\zeta_k^m.$$

Posons

$$I(A) = \int_0^A \frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx,$$

où A est un réel positif grand (destiné à tendre vers $+\infty$). On a

$$I(A) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \int_0^A \frac{dx}{x-\zeta_k}.$$

Remarquer que pour aucune valeur de x dans $[0, +\infty[$, $x - \zeta_k$ ne peut être un réel négatif ou nul, car ζ_k ne peut pas être égal à 1. En conséquence, en choisissant la détermination habituelle (dite principale) du logarithme complexe, c'est-à-dire telle que $\log(z)$ soit défini pour tout complexe z qui n'est pas un réel négatif ou nul, et que $\log(z)$ ait une partie imaginaire comprise strictement entre $-\pi$ et $+\pi$, on voit que

$$I(A) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(\log(A-\zeta_k) - \log(-\zeta_k)).$$

$A - \zeta_k = \rho e^{i\theta}$ est un nombre complexe dont l'argument θ tend vers 0, et dont le module ρ est équivalent à A, quand A tend vers $+\infty$ (comme on le constate aisément an faisant le dessin). On a donc

$$\log(A) - \log(A-\zeta_k) = \log(A) - \log(\rho) - i\theta = \log(\frac{A}{\rho}) - i\theta,$$

ce qui montre que $\log(A) - \log(A - \zeta_k)$ tend vers 0 quand A tend vers $+\infty$.

Par ailleurs, la somme des a_k est nulle. On peut le constater d'au moins deux façons. D'abord parce qu'elle est invariante par multiplication par $e^{\frac{2i\pi m}{n}}$, qui n'est pas 1 car $0 < m < n$. Dautre part, parce qu'elle est une fonction symétrique de degré m des ζ_k, et que toutes les fonctions symétriques élémentaires des ζ_k de degrés strictement inférieurs à n sont nulles, comme on le voit en examinant le polynôme $1 + x^n$. Il en résulte que

$$I(A) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(\log(A-\zeta_k) - \log(A) - \log(-\zeta_k)).$$

En faisant maintenant tendre A vers $+\infty$, on voit que

$$I = \sum_{k=0}^{n-1} -a_k \log(-\zeta_k).$$

Comme $\zeta_k = e^{\frac{i\pi(2k+1)}{n}}$, on a $-\zeta_k = e^{i\pi(\frac{2k+1}{n}-1)}$, et donc

$$\log(-\zeta_k) = i\pi(\frac{2k+1}{n} - 1).$$

Notez que $\frac{2k+1}{n} - 1$ est compris entre -1 et 1, et qu'en conséquence cette formule respecte la détermination du logarithme. On a donc

$$I = \frac{2i\pi}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k\zeta_k^m,$$

toujours en tenant compte de ce que la somme des ζ_k^m est nulle.

En utilisant la formule d'Euler pour sin, on a

$$\sin(\frac{m\pi}{n})I = \frac{\pi}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} ke^{\frac{i\pi(2k+1)m}{n}}(e^{\frac{im\pi}{n}} - e^{\frac{-im\pi}{n}}) = \frac{\pi}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k(e^{\frac{i\pi m}{n}(2k+2)} - e^{\frac{i\pi m}{n}(2k)}).$$

Cette dernière sommation se calcule en faisant une transformation d'Abel.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} k(e^{\frac{2i\pi m}{n}(k+1)} - e^{\frac{2i\pi m}{n}k}) &= -e^{\frac{2i\pi m}{n}} + (n-1)e^{n\frac{2i\pi m}{n}} + \sum_{k=1}^{n-2}(k-(k+1))e^{(k+1)\frac{2i\pi m}{n}} \\ &= n - \sum_{k=0}^{n-1} e^{k\frac{2i\pi m}{n}} \\ &= n,\end{aligned}$$

car la somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.

Section 4.

$\boxed{\textbf{1.}}$ a) On a $e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}} \leq e^{-t^2}$. Comme l'intégrale de Gauss est convergente, on a donc convergence uniforme pour $x \in]0,+\infty[$. Considérons maintenant l'intégrale $J_x = \int_0^{+\infty} -\frac{2x}{t^2}e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}\,dt$. Cette intégrale est uniformément convergente sur $]\alpha,+\infty[$, pour $\alpha > 0$. En effet, J_x est la somme des deux intégrales suivantes : $\int_0^1 -\frac{2x}{t^2}e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}\,dt + \int_1^{+\infty} -\frac{2x}{t^2}e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}\,dt$. La seconde converge uniformément par domination par la fonction $\frac{2xe^{-t^2}}{t^2}$. La première converge uniformément pour $x > \alpha$ par domination par la fonction $\frac{e^{-\frac{\alpha^2}{t^2}}}{t^2}$, puisque $x > \alpha$ entraine $e^{-\frac{x^2}{t^2}} \leq e^{-\frac{\alpha^2}{t^2}}$. On peut donc appliquer la règle de Leibnitz sur $]\alpha,+\infty[$, et on a donc $J_x = I'_x$ pour $x > 0$.

b) En posant $u = \frac{x}{t}$, on a $du = \frac{-x}{t^2}dt$, et on obtient $J_x = -2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{u^2}-u^2}du = -2I_x$. $x \mapsto I_x$ est donc solution de l'équation diffférentielle $I'_x = -2I_x$, c'est–à–dire de la forme $I_x = Ae^{-2x}$. On a par ailleurs $A = I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Donc $I_x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2x}$.

$\boxed{\textbf{2.}}$ a) Les deux fonctions sont bien définies et continues pour toute valeur de x. Elle sont dérivables (on utilise la dérivation sous le signe somme pour la deuxième). On obtient

$$f'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt \qquad \text{et} \qquad g'(x) = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}dt.$$

La seconde intégrale peut être transformée par le changement de variable $u = xt$, ce qui donne $g'(x) = -f'(x)$.

La somme $f(x) + g(x)$ est donc constante. En faisant $x = 0$, on trouve que cette constante vaut $\frac{\pi}{4}$.

b) La famille φ_x de fonctions définies par

$$\varphi_x(t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$$

tend uniformément vers 0 quand x tend vers $+\infty$, sur l'intervalle $[0,1]$. On en déduit que $g(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

En conséquence, $f(x)$ tend vers $\frac{\pi}{4}$ quand x tend vers $+\infty$, ce qui donne la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$\boxed{\textbf{3.}}$ L'intégrale I_α proposée est uniformément convergente, car elle est dominée par l'intégrale de Gauss qui est elle même convergente.

La dérivation par rapport à α donne :

$$I'_\alpha = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} -2xe^{-x^2}\sin(\alpha x)dx,$$

qui pour les mêmes raisons est uniformément convergente, ce qui justifie cette dérivation.

Comme $x \mapsto -2xe^{-x^2}$ est la dérivée de $x \mapsto e^{-x^2}$, en intégrant par parties, on obtient :

$$I'_\alpha = \frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\sin(\alpha x)\right] - \frac{\alpha}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(\alpha x)dx = -\frac{\alpha}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(\alpha x)dx.$$

On a donc $I'_\alpha = -\frac{\alpha}{2}I_\alpha$. En dérivant par rapport à α l'expression $I_\alpha e^{\frac{\alpha^2}{4}}$, on trouve 0. Cette expression est donc une constante A. On a donc $I_\alpha = Ae^{-\frac{\alpha^2}{4}}$. Il reste à déterminer A, qui n'est autre que I_0, c'est–à–dire l'intégrale de Gauss, d'où le résultat.

$\boxed{\textbf{4.}}$ Au voisinage de 0, $1 - e^{-\alpha x^2}$ est équivalent à αx^2, ce qui montre la convergence de l'intégrale au voisinage de 0, cette convergence étant uniforme sur tout intervalle de la forme $]0, A]$. Au voisinage de l'infini, l'intégrale est dominée par celle de $\frac{1}{x^2}$, qui est convergente, ce qui prouve la convergence uniforme de notre intégrale au voisinage de l'infini, pour toute valeur de α.

En dérivant l'intégrale I_α proposée par rapport à α, on trouve :

$$I'_\alpha = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx,$$

qui est une intégrale uniformément convergente pour α dans $]0, A]$. Ceci montre que cette dérivation est licite.

En faisant le changement de variable $u = x\sqrt{\alpha}$, et en utilisant l'intégrale de Gauss, on trouve $I'_\alpha = \sqrt{\pi}\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$. On a donc $I_\alpha = \sqrt{\pi\alpha} + C$, pour une certaine constante C. Mais $C = I_0 = 0$.

$\boxed{\textbf{5.}}$ a) Soit $[\alpha, \beta]$ un intervalle compact de $]0, +\infty[$ $(0 < \alpha < \beta)$, et soit x dans $[\alpha, \beta]$. Pour t entre 0 et 1, $e^{-t}t^{x-1}$ est majoré indépendamment de x, par $t^{\alpha-1}$. Comme α est strictement positif, l'intégrale

$\int_0^1 t^{\alpha-1}dt$ est convergente. Pour $t \geq 1$, $e^{-t}t^{x-1}$ est majoré par $e^{-t}t^{\beta-1}$, et l'intégrale $\int_1^\infty e^{-t}t^{\beta-1}dt$ est convergente. L'intégrale définissant Γ est donc uniformément convergente pour x entre α et β, et la fonction Γ est continue sur $]0, +\infty[$.

b) La première relation s'obtient en intégrant par parties ($x > 0$) :

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t}dt \\ &= -\left[t^x e^{-t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty x t^{x-1}e^{-t}dt \\ &= x\Gamma(x). \end{aligned}$$

La deuxième s'obtient par un calcul direct :

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1.$$

La troisième s'obtient par récurrence en utilisant les deux autres : Elle est vraie pour $n = 1$, et

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$$

c) Ceci résulte immédiatement des deux premières relations ci-dessus, et de la continuité de Γ en 1. En effet :

$$\frac{\Gamma(x)}{\frac{1}{x}} = x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$$

qui tend vers 1 quand x tend vers 0.

d) On a $dt = xu^{x-1}du$, donc :

$$\begin{aligned} \Gamma(1+\frac{1}{x}) &= \frac{1}{x}\Gamma(\frac{1}{x}) \\ &= \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{1}{x}-1}dt \\ &= \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-u^x}u^{1-x}xu^{x-1}du \\ &= \int_0^\infty e^{-u^x}du. \end{aligned}$$

e) Il suffit de faire $x = 2$ dans la relation précédente :

$$\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \Gamma(\frac{3}{2}) = \int_0^\infty e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

donc $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.