Topologie Algébrique

Alain Prouté
(`alp@math.jussieu.fr`)

Master 1 de l'Université Denis Diderot-Paris 7
2011-2012

Notes du cours du 30 janvier 2012.

Le cours a commencé par un exposé rapide de la notion de somme amalgamée (carrés cocartésiens). Se reporter à `http://people.math.jussieu.fr/~alp/cours_2010.pdf` pour cette question.

1 Le théorème de van Kampen.

Dans toute cette section nous considérons un espace topologique X, deux ouverts U et V de X couvrant X, et une partie A de $U \cap V$ ayant au moins un élément dans chaque composante connexe par arcs de $U \cap V$. Le théorème de van Kampen nous explique comment calculer le groupoïde $\Pi(X, A)$ à partir du diagramme de groupoïdes

$$\Pi(U, A) \longleftarrow \Pi(U \cap V, A) \longrightarrow \Pi(V, A)$$

dont les flèches sont induites par les inclusions.

☞ **1 Définition.**

- *Si $a \in A$, $b \in A$, si $\sigma : [u, u+l] \to X$ est un chemin de a à b dans X, et si $n \in \mathbb{N}$, on note σ_i^n (ou σ_i) la restriction de σ à l'intervalle $[u + \frac{il}{2^n}, u + \frac{(i+1)l}{2^n}]$ (où bien sûr $0 \leq i \leq 2^n - 1$). Le chemin σ_i^n sera appelé le « $i^{\text{ième}}$ n-tronçon » (ou « $i^{\text{ième}}$ tronçon ») de σ.*
- *On dira que le chemin σ est « n-propre », si pour tout i, l'image de σ_i^n est incluse dans U ou incluse dans V.*
- *Une homotopie h entre deux chemins σ et τ de X de $a \in A$ à $b \in A$, est dite « n-propre » si pour tout i $(0 \leq i \leq 2^n - 1)$, $h([0,1] \times [\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}])$ est contenu dans U ou dans V. Évidemment, ceci implique que les chemins σ et τ sont eux-mêmes n-propres, et on dira dans ce cas qu'ils sont « n-proprement homotopes ».*

☞ **2 Lemme.** *Pour tout chemin $\sigma : [u, u+l] \to X$ de $a \in A$ à $b \in A$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que σ soit n-propre. Si σ est n-propre et si $n \leq m$, alors σ est m-propre.*

Démonstration. $\sigma^{-1}(U)$ et $\sigma^{-1}(V)$ sont deux ouverts qui recouvrent $[u, u+l]$. Par le lemme de Lebesgue, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que chaque segment de la forme $[u + \frac{il}{2^n}, u + \frac{(i+1)l}{2^n}]$ soit inclus soit dans $\sigma^{-1}(U)$ soit dans $\sigma^{-1}(V)$. σ est donc n-propre. La deuxième assertion est triviale. ❏

☞ **3 Lemme.** *Si deux chemins de $a \in A$ à $b \in A$, σ et τ, sont homotopes, il existe $n \in \mathbb{N}$ et une suite finie $\gamma_0, \ldots, \gamma_k$ de chemins de a à b tels que $\gamma_0 = \sigma$, $\gamma_k = \tau$ et pour tout i $(0 \leq i \leq k-1)$, γ_i soit n-proprement homotope à γ_{i+1}.*

Démonstration. Comme tout chemin n-propre est clairement n-proprement homotope à son standardisé, on peut supposer que σ et τ sont standard. Soit $h : [0,1] \times [0,1] \to X$ une homotopie de $\sigma : [0,1] \to X$ à $\tau : [0,1] \to X$ $(h(0,s) = \sigma(s)$, $h(1,s) = \tau(s)$, $h(t,0) = a$, $h(t,1) = b)$. $h^{-1}(U)$ et $h^{-1}(V)$ sont deux ouverts qui recouvrent $[0,1] \times [0,1]$. Il existe donc d'après le lemme de Lebesque un entier n tel que tout carré de la forme $[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}] \times [\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}]$ soit inclus soit dans $h^{-1}(U)$ soit dans $h^{-1}(V)$. Posons $k = 2^n$ et $\gamma_i(s) = h(\frac{i}{2^n}, s)$. La conclusion du lemme est alors satisfaite. ❏

☞ **4 Lemme.** *Soit σ un chemin n-propre de $a \in A$ à $b \in A$, x une des extrémités d'un n-tronçon σ_i^n de σ.*

- *Si σ_i^n est contenu dans $U \cap V$, il existe un chemin contenu dans $U \cap V$ de x à un élément de A.*
- *Si σ_i^n est contenu dans U (resp. V), il existe un chemin contenu dans U (resp. V) de x à un élément de A.*

Démonstration. La première assertion est triviale, puisque chaque composante connexe par arcs de $U \cap V$ contient un élément de A. La seconde assertion requiert un raisonnement par récurrence sur i. Si $i = 0$, le tronçon σ_0 a pour origine un élément de A ce qui résoud le problème que x soit l'origine ou l'extrémité de σ_0. Si le résultat est acquis pour le tronçon σ_{i-1}, le problème est trivial si x est l'origine de σ_i. Si x est l'extrémité de σ_i il suffit de concaténer un chemin de U reliant l'origine de σ_i à un élément de A à σ_i lui-même. ❏

☞ **5 Théorème.** *(théorème de van Kampen) Le carré de morphismes de groupoïdes (dont les flèches sont induites par les inclusions)*

$$\begin{tikzcd} \Pi(U \cap V, A) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & \Pi(U, A) \arrow[d, "k"] \\ \Pi(V, A) \arrow[r, "l"'] & \Pi(X, A) \end{tikzcd}$$

est cocartésien.

Démonstration. Soit G un groupoïde, $\varphi : \Pi(U, A) \to G$ et $\psi : \Pi(V, A) \to G$ deux morphismes de groupoïdes tels que le diagramme (en traits pleins)

$$\begin{tikzcd}
\Pi(U \cap V, A) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & \Pi(U, A) \arrow[d, "k"'] \arrow[ddr, "\varphi"] & \\
\Pi(V, A) \arrow[r, "l"] \arrow[drr, "\psi"'] & \Pi(X, A) \arrow[dr, dotted, "\theta"] & \\
 & & G
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. Il s'agit de montrer qu'il existe un unique morphisme de groupoïdes θ : $\Pi(X, A) \to G$ tel que $\theta \circ k = \varphi$ et $\theta \circ l = \psi$.

Si a est un objet de $\Pi(X, A)$, c'est-à-dire un élément de A, on a $\varphi(a) = \varphi(i(a)) = \psi(j(a)) = \psi(a)$. On pose donc $\theta(a) = \varphi(a)$ et le diagramme ci-dessus est commutatif sur les objets. L'unicité de θ sur les objets résulte de l'injectivité de k sur les objets.

Pour la suite de la démonstration, nous simplifions l'écriture en écrivant $\mathbf{Chem}(X, A)$ au lieu de $\mathbf{Fl}(\mathbf{Chem}(X, A))$ et G au lieu de $\mathbf{Fl}(G)$. Afin de définir θ sur les flèches de $\Pi(X, A)$, on va d'abord définir une application $\Theta : \mathbf{Chem}(X, A) \to G$ puis on montrera que Θ passe au quotient pour donner l'application $\theta : \Pi(X, A) \to G$ cherchée.

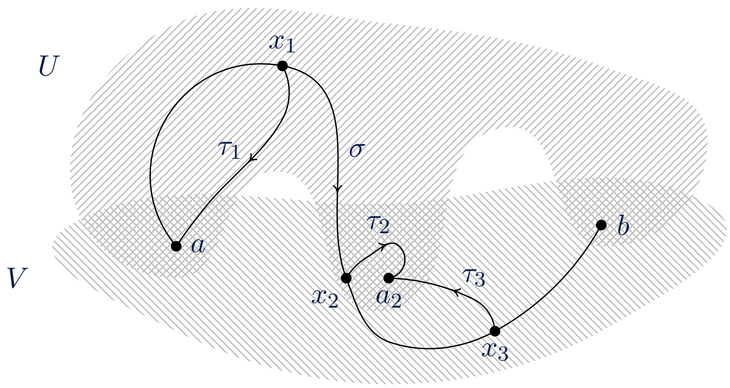
Affirmation : *Il existe une application* $\Theta : \mathbf{Chem}(X, A) \to G$ *telle que (pour tous* σ *et* σ' *de* $\mathbf{Chem}(X, A)$*) :*

- $\Theta(\sigma) = \varphi([\sigma])$ *si* σ *est contenu dans* U*,*
- $\Theta(\sigma) = \psi([\sigma])$ *si* σ *est contenu dans* V*,*
- $\Theta(\sigma\star\sigma') = \Theta(\sigma)\Theta(\sigma')$ *si* σ *est concaténable à* σ' *(où la composition de* G *est notée par simple juxtaposition),*
- $\Theta(\sigma) = \Theta(\sigma')$ *si* σ *est homotope à* σ'*.*

De plus, Θ est unique, mais ce fait ne nous servira pas.

Notons d'abord que si un chemin $\sigma \in \mathbf{Chem}(X, A)$ est contenu dans $U \cap V$, on a $[\sigma] = i([\sigma])$ et $[\sigma] = j([\sigma])$, donc $\varphi([\sigma]) = \psi([\sigma])$. Les deux premières conditions sont donc compatibles. On utilisera cette propriété plusieurs fois.

Soit $\sigma : [u, u + l] \to X$ un chemin quelconque de $\mathbf{Chem}(X, A)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que σ soit n-propre (lemme 2 (page 1)). Pour chaque $x_i = \sigma(u + \dfrac{il}{2^n})$ $(i = 1, \ldots, 2^n - 1)$, soit τ_i^n (aussi noté τ_i) un chemin de x_i à un point a_i de A, tel que τ_i soit dans $U \cap V$ si $x_i \in U \cap V$, sinon dans U (resp. V) si $x_i \in U$ (resp. V) (lemme 4 (page 2)). On définit de plus les chemins τ_0 et τ_{2^n} comme constants (et standard) respectivement en a et en b. Sur la figure ci-dessous, on a $A = \{a, a_2, b\}$, $n = 2$, $a = a_0 = a_1$, $a_2 = a_3$, $b = a_4$ et les chemins τ_0 et τ_4 ne sont pas représentés puisque constants respectivement en a et b.



Pour chaque i ($0 \leq i \leq 2^n - 1$), posons $\gamma_i^n = (\tau_i^n)^{-1} \star \sigma_i^n \star \tau_{i+1}^n$. γ_i^n (aussi noté γ_i) est un chemin reliant deux éléments de A, et il est contenu soit dans U, soit dans V, ce qui impose la valeur de Θ sur chaque γ_i. Si γ_i est dans $U \cap V$, sa valeur est obtenue indifféremment via φ ou via ψ. Par ailleurs, σ est homotope à $\gamma_0 \star \ldots \star \gamma_{2^n-1}$. Les conditions de l'affirmation entraînent donc l'unicité de Θ, puisqu'on devra avoir $\Theta(\sigma) = \Theta(\gamma_0) \ldots \Theta(\gamma_{2^n-1})$.

Bien que $\Theta(\gamma_i)$ dépende en général des choix de τ_i et de τ_{i+1}, $\Theta(\sigma)$ ne dépend pas de ces choix. En effet, remplaçons l'un des τ_i ($1 \leq i \leq 2^n - 1$, puisque τ_0 et τ_{2^n} étant constants, ils ne sont pas l'objet de choix) par τ_i', ce qui transforme γ_{i-1} et γ_i en γ_{i-1}' et γ_i'. Supposons par exemple σ_{i-1} (donc aussi γ_{i-1} et γ_{i-1}') dans U et σ_i dans V. On a, en remarquant que $\tau_i^{-1} \star \tau_i'$ est un élément de $\mathbf{Chem}(X, A)$ contenu dans $U \cap V$, et en utilisant le fait que $\tau_i' \star \tau_i'^{-1}$ est homotope à un chemin de longueur nulle :

$$\begin{array}{rcl}
\Theta(\gamma_{i-1})\Theta(\gamma_i) & = & \varphi([\gamma_{i-1}])\psi([\gamma_i]) \\
& = & \varphi([\tau_{i-1}^{-1} \star \sigma_{i-1} \star \tau_i])\psi([\tau_i^{-1} \star \sigma_i \star \tau_{i+1}]) \\
& = & \varphi([\tau_{i-1}^{-1} \star \sigma_{i-1} \star \tau_i])\psi([\tau_i^{-1} \star \tau_i' \star \tau_i'^{-1} \star \sigma_i \star \tau_{i+1}]) \\
& = & \varphi([\tau_{i-1}^{-1} \star \sigma_{i-1} \star \tau_i])\psi([\tau_i^{-1} \star \tau_i'])\psi([\tau_i'^{-1} \star \sigma_i \star \tau_{i+1}]) \\
& = & \varphi([\tau_{i-1}^{-1} \star \sigma_{i-1} \star \tau_i])\varphi([\tau_i^{-1} \star \tau_i'])\psi([\tau_i'^{-1} \star \sigma_i \star \tau_{i+1}]) \\
& = & \varphi([\tau_{i-1}^{-1} \star \sigma_{i-1} \star \tau_i'])\psi([\tau_i'^{-1} \star \sigma_i \star \tau_{i+1}]) \\
& = & \Theta(\gamma_{i-1}')\Theta(\gamma_i')
\end{array}$$

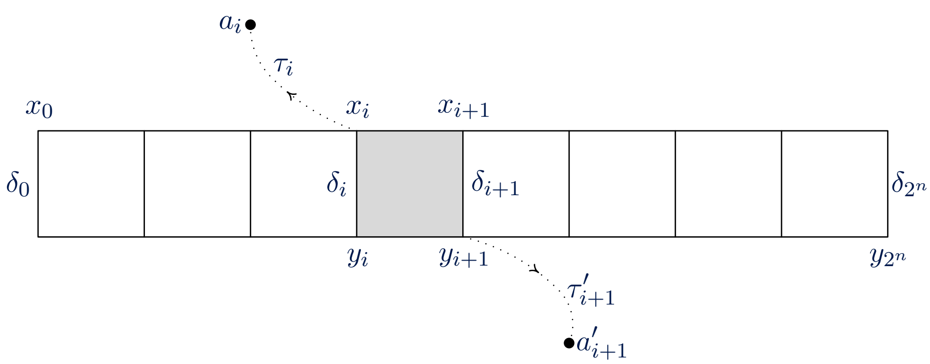
On traite de manière similaire le cas où σ_{i-1} est dans V et σ_i dans U et les cas où tous deux sont dans U ou tous deux sont dans V. On a donc montré que $\Theta(\sigma)$ défini par la formule $\Theta(\sigma) = \Theta(\gamma_0) \ldots \Theta(\gamma_{2^n-1})$ ne dépend pas des choix des τ_i.

Pour voir que $\Theta(\sigma)$ ne dépend pas de n, il suffit de montrer que sa valeur est invariante quand on remplace n par $n + 1$. Or ceci revient à remplacer dans la formule définissant $\Theta(\sigma)$ chaque $\Theta(\gamma_i^n)$ par $\Theta(\gamma_{2i}^{n+1})\Theta(\gamma_{2i+1}^{n+1})$. Si on suppose par exemple σ_i dans U, γ_{2i}^{n+1} et γ_{2i+1}^{n+1} sont tous les deux dans U, et on a

$$\begin{array}{rcl}
\Theta(\gamma_{2i}^{n+1})\Theta(\gamma_{2i+1}^{n+1}) & = & \varphi([\gamma_{2i}^{n+1}])\varphi([\gamma_{2i+1}^{n+1}]) \\
& = & \varphi([\gamma_{2i}^{n+1} \star \gamma_{2i+1}^{n+1}]) \\
& = & \varphi([\gamma_i^n]) \\
& = & \Theta(\gamma_i)
\end{array}$$

L'application $\Theta : \mathbf{Chem}(X, A) \to G$ est donc bien définie. Il reste à montrer qu'elle satisfait les conditions de l'affirmation. Les deux premières sont clairement satisfaites par la construction même de Θ. Pour la troisième, prenons un n assez grand pour que σ et σ' soient n-propres. Alors $\sigma \star \sigma'$ est $(n+1)$-propre, et la formule définissant Θ montre immédiatement que $\Theta(\sigma \star \sigma') = \Theta(\sigma)\Theta(\sigma')$.

D'après le lemme **3** (page 2), il suffit de montrer la dernière propriété pour des chemins $\sigma : [u, u+l] \to X$ et $\sigma' : [x, x+k] \to X$ n-proprement homotopes. Soit h une homotopie n-propre de σ à σ'. Posons $x_i = \sigma(u + \dfrac{il}{2^n})$ et $y_i = \sigma'(x + \dfrac{ik}{2^n})$. Introduisons les τ_i et τ'_i qui comme ci-dessus permettent de définir les γ_i et les γ'_i qui servent à définir $\Theta(\sigma)$ et $\Theta(\sigma')$. Notons δ_i le chemin $t \mapsto h(t, \dfrac{i}{2^n})$ (qui va de x_i à y_i).



Noter que δ_0 et δ_{2^n} sont des chemins constants. Posons $\mu_i = \sigma_0 \star \dots \star \sigma_{i-1} \star \delta_i \star \sigma'_i \star \dots \star \sigma'_{2^n-1}$. Il suffit de montrer que $\Theta(\mu_i) = \Theta(\mu_{i+1})$ $(0 \leq i \leq 2^n - 1)$. Supposons par exemple que le carré gris sur la figure ci-dessus soit dans U. Il en est alors de même de τ_i et τ'_{i+1}. D'après la troisième propriété de l'affirmation, on a

$$\begin{array}{rcl} \Theta(\mu_i) & = & \Theta(\gamma_0) \dots \Theta(\gamma_{i-1}) \Theta(\tau_i^{-1} \star \delta_i \star \tau'_i) \Theta(\gamma'_i) \dots \Theta(\gamma'_{2^n-1}) \\ \Theta(\mu_{i+1}) & = & \Theta(\gamma_0) \dots \Theta(\gamma_i) \Theta(\tau_{i+1}^{-1} \star \delta_{i+1} \star \tau'_{i+1}) \Theta(\gamma'_{i+1}) \dots \Theta(\gamma'_{2^n-1}) \end{array}$$

Or, on a

$$\begin{array}{rcl} \Theta(\tau_i^{-1} \star \delta_i \star \tau'_i) \Theta(\gamma'_i) & = & \varphi([\tau_i^{-1} \star \delta_i \star \tau'_i]) \varphi([\gamma'_i]) \\ & = & \varphi([\tau_i^{-1} \star \delta_i \star \tau'_i \star \gamma'_i]) \\ & = & \varphi([\tau_i^{-1} \star \delta_i \star \sigma'_i \star \tau'_{i+1}]) \\ & = & \varphi([\tau_i^{-1} \star \sigma_i \star \delta_{i+1} \star \tau'_{i+1}]) \\ & = & \Theta(\gamma_i) \Theta(\tau_{i+1}^{-1} \star \delta_{i+1} \star \tau'_{i+1}) \end{array}$$

On a donc terminé la preuve de l'affirmation. L'existence de θ telle que $\theta \circ k = \varphi$ et $\theta \circ l = \psi$ en résulte immédiatement, de même que le fait que θ est un morphisme de groupoïdes. L'unicité de θ résulte du fait que pour toute flèche $[\sigma]$ de $\Pi(X, A)$, il existe des chemins $\gamma_0, \dots, \gamma_k$ chacun contenu dans U ou dans V et à extrémités dans A, donc chacun dans $\Pi(U, A)$ ou $\Pi(V, A)$, tels que $[\sigma] = [\gamma_0] \star \dots \star [\gamma_k]$, car ceci implique que $\theta([\sigma]) = \theta([\gamma_0]) \dots \theta([\gamma_k])$, et bien sûr θ est déterminé sur les $[\gamma_i]$ à cause des relations $\theta \circ k = \varphi$ et $\theta \circ l = \psi$. ❏