

Ce cours peut être librement copié et distribué. Il est recommandé d'en télécharger la version la plus récente à partir de : <http://www.math.jussieu.fr/~alp>. Toute remarque, correction ou suggestion doit être adressée à l'auteur : [alp@math.jussieu.fr](mailto:alp@math.jussieu.fr).

# Classes Caractéristiques.

par Alain Prouté

Université Denis Diderot — Paris 7

## Table des matières

1	Fibrés localement triviaux.	1
2	Fibrés induits et invariance homotopique.	2
3	Grassmanniennes et fibrés universels.	3
4	Applications de Gauss.	4
5	Théorème de Leray–Hirsch.	5
6	Classe de Thom, classe d'Euler et suite de Gysin.	7
7	L'algèbre de cohomologie de l'espace projectif.	8
8	Le fibré projectif associé.	8
9	Principe de scindement.	8
10	Cohomologie de la grassmannienne infinie.	9
11	Classes caractéristiques.	10
A	Sur les algèbres de polynômes.	11

Dans ce texte, toutes les affirmations non justifiées sont à considérer comme des exercices.

Notons  $\mathbf{F}$  l'un des corps  $\mathbf{R}$  (réels),  $\mathbf{C}$  (complexes), ou  $\mathbf{H}$  (quaternions).  $c$  représentera la dimension de  $\mathbf{F}$  sur  $\mathbf{R}$ , c'est à dire, respectivement 1, 2 et 4.

## 1 Fibrés localement triviaux.

**Définition 1** Une application continue  $\pi : E \longrightarrow B$  est un  $\mathbf{F}^k$ -fibré vectoriel localement trivial, si pour tout  $x \in B$ ,  $\pi^{-1}(x)$  (la fibre au dessus de  $x$ ) est un  $\mathbf{F}$ -espace vectoriel et s'il existe des ouverts  $U_i$  ( $i \in I$ ) recouvrant  $B$ , et des homéomorphismes  $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbf{F}^k$ , tels que :

- $\text{pr}_1 \psi_i = \pi$  (en restriction à  $\pi^{-1}(U_i)$ ),
- pour chaque  $x \in U_i$ ,  $\text{pr}_2 \psi_i : \pi^{-1}(x) \longrightarrow \mathbf{F}^k$  est un isomorphisme  $\mathbf{F}$ -linéaire.

L'expression "fibré vectoriel" signifiera désormais fibré vectoriel localement trivial, chaque fibre étant un  $\mathbf{F}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Les  $U_i$  de la définition ci-dessus sont appelés des "ouverts trivialisants". Un fibré  $\pi : E \longrightarrow B$  est dit "trivial" si  $B$  lui-même est un ouvert trivialisant. L'homéomorphisme  $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbf{F}^k$  est appelé une "trivialisant" du fibré au dessus de  $U_i$ .

On utilisera d'autres fibrés (non vectoriels). La définition est essentiellement la même, sauf que  $\mathbf{F}^k$  est remplacé par une paire topologique  $(F, F')$  ( $F'$  est parfois vide), et évidemment on ne demande plus que les  $\varphi_i$  soient linéaires sur chaque fibre.

Soit  $f : B \rightarrow B'$  une application continue. Soit  $\pi' : E' \rightarrow B'$  un fibré. Le fibré induit par  $\pi'$  le long de  $f$  est  $\pi : E \rightarrow B$ , où :

$$E = \{(x, y) \in B \times E' \mid f(x) = \pi'(y)\},$$

et où  $\pi(x, y) = x$ . La topologie de  $E$  est celle induite par la topologie produit sur  $B \times E'$ . Le couple  $(f, \tilde{f})$ , où  $\tilde{f} : E \rightarrow E'$  est défini par  $\tilde{f}(x, y) = y$ , est un morphisme de fibrés, qui est un isomorphisme sur chaque fibre.

Un fibré qui est trivial au dessus d'un ouvert  $U$  peut être trivialisé de différentes manières. En effet, donnons-nous une application continue  $\theta : U \rightarrow \text{GL}(\mathbf{F}^k)$ . On peut alors considérer la composition :

$$\pi_1(U) \xrightarrow{\psi} U \times \mathbf{F}^k \xrightarrow{\Lambda} U \times \mathbf{F}^k,$$

où  $\psi$  trivialisé le fibré au dessus de  $U$ , et où  $\Lambda(x, y) = (x, \theta(x)(y))$ . C'est clairement une autre trivialisé du fibré au dessus de  $U$ . Réciproquement, si  $\psi$  et  $\psi'$  sont deux trivialisés d'un fibré au dessus de  $U$ , l'application  $\theta$  :

$$x \mapsto (y \mapsto \text{pr}_2 \psi \psi'^{-1}(x, y))$$

(qui est continue) envoie  $U$  dans  $\text{GL}(\mathbf{F}^k)$ . Il est clair que deux trivialisés au dessus de  $U$  "diffèrent" par une unique application continue  $\theta : U \rightarrow \text{GL}(\mathbf{F}^k)$ , qu'on appellera leur "différence". La différence  $\theta$  entre la trivialisé  $\psi$  et la trivialisé  $\psi'$  est caractérisée par l'équation :

$$\psi(x, y) = (x, \theta(x)(\text{pr}_2 \psi'(x, y))).$$

## 2 Fibrés induits et invariance homotopique.

**Lemme 1** Soit  $\pi : E \rightarrow B \times I$  (où  $I = [0, 1]$ ) un fibré vectoriel, qui est trivial au dessus de  $B_1 = B \times [0, \frac{1}{2}]$  et au dessus de  $B_2 = B \times [\frac{1}{2}, 1]$ . Alors il est trivial au dessus de  $B \times I$ .

Le résultat est immédiat quand les trivialisés au dessus de  $B_1$  et de  $B_2$  sont égales au dessus de  $B_1 \cap B_2$ . Il suffit donc de se ramener à ce cas. Soit  $\theta : B_1 \cap B_2 \rightarrow \text{GL}(\mathbf{F}^k)$  la différence entre la trivialisé provenant de  $B_1$  et celle provenant de  $B_2$ . On peut prolonger  $\theta$  à  $B_2$  en posant (pour  $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ ) :

$$\theta(x, t) = \theta(x, \frac{1}{2}).$$

Ceci permet de changer de trivialisé au dessus de  $B_2$ , et de satisfaire la condition demandée.  $\square$

**Lemme 2** Soit  $\pi : E \rightarrow B \times I$  un fibré vectoriel. Alors, pour chaque  $x \in B$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  dans  $B$ , tel que le fibré soit trivial au dessus de  $U \times I$ .

Pour chaque  $t \in I$ , choisissons un pavé ouvert  $U_t \times I_t$  de  $B \times I$  au dessus duquel le fibré est trivial, et contenant  $(x, t)$ . Par compacité de  $I$ , il existe un entier  $n$ , tel que chaque intervalle  $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$  ( $0 \leq k < n$ ) soit contenu dans un  $I_{t_k}$  (lemme de Lebesgue). Posons :

$$U = \bigcap_{k=0}^{n-1} U_{t_k}.$$

$n - 1$  applications du lemme précédent donnent le résultat.  $\square$

**Théorème 1** Soit  $\pi : E \longrightarrow B \times I$  un fibré vectoriel, où  $B$  est paracompact. Soit  $p : B \times I \longrightarrow B \times I$  l'application définie par  $p(x, t) = (x, 1)$ . Alors les fibrés  $\pi$  et  $p^*(\pi)$  sont isomorphes.

Nous traitons le cas où  $B$  est compact. Le lemme précédent permet de recouvrir  $B$  par des ouverts  $U_i$  tels que le fibré soit trivial au dessus de  $U_i \times I$ . Par compacité de  $B$ , on peut supposer la famille des  $U_i$  finie, et se donner, pour chaque  $i$ , une fonction continue  $\lambda_i : B \longrightarrow [0, 1]$ , dont le support (i.e.  $\lambda^{-1}((0, 1])$ ) soit contenu dans  $U_i$ , et telles que pour tout  $x$  de  $B$ , on ait :

$$\sup_{i \in I} \lambda_i(x) = 1.$$

(Une telle famille s'appelle une "enveloppe de l'unité"). Pour chaque  $i$ , considérons l'application  $\alpha_i : B \times I \longrightarrow B \times I$ , définie par :

$$\alpha_i(x, t) = (x, \sup(t, \lambda_i(x))).$$

$\alpha_i$  est l'application identique en dehors de  $U_i \times I$ . De plus, si  $\xi$  est un fibré au dessus de  $B \times I$  qui est trivial au dessus de  $U_i \times I$ , alors le fibré  $\alpha_i^*(\xi)$  est encore trivial au dessus de  $U_i \times I$  et est isomorphe à  $\xi$ .

On peut composer les  $\alpha_i$  (dans un ordre quelconque). Notons  $\alpha$  cette composition. Alors  $\alpha^*(\pi)$  est isomorphe à  $\pi$ , mais par ailleurs, il est clair que  $\alpha = p$ . Pour le cas où  $B$  est seulement paracompact, incorporer délicatement un zest de Zermelo.  $\square$

**Corollaire 1** Soit  $\pi : E' \longrightarrow B'$  un fibré vectoriel. Soient  $f, g : B \longrightarrow B'$  deux applications continues homotopes, où  $B$  est supposé paracompact. Alors les fibrés  $f^*(\pi)$  et  $g^*(\pi)$  sont isomorphes.  $\square$

### 3 Grassmanniennes et fibrés universels.

Soit  $E$  un  $\mathbf{F}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ . Notons  $G_k(E)$  l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension  $k$  de  $E$ .  $G_k(E)$  est appelé une "grassmannienne".

À chaque décomposition de  $E$  en une somme directe de sous-espaces,  $E = K \oplus H$ , avec  $K$  de dimension  $k$  et  $H$  de dimension  $n - k$ , on peut associer une application  $\varphi_{KH}$  de  $\mathcal{L}(K, H)$  vers  $G_k(E)$ , comme suit :

$$f \mapsto \varphi_{KH} \{x + f(x) \mid x \in K\}.$$

Cette application est clairement injective, et son image est formée de tous les sous-espaces de dimension  $k$  de  $E$  qui sont des supplémentaires de  $H$ . On voit donc que les images des  $\varphi_{KH}$  recouvrent  $G_k(E)$ .

Munissons  $G_k(E)$  de la topologie finale pour la famille des applications  $\varphi_{KH}$ . En d'autres termes, une application  $g$  de  $G_k(E)$  vers un espace topologique  $X$  est continue si et seulement si tous les composés  $g\varphi_{KH}$  sont continus.

Les  $\varphi_{KH}$  forment un atlas, qui fait de  $G_k(E)$  une variété différentiable de dimension  $k(n - k)$ . Noter que si  $k = 1$ ,  $G_k(E)$  n'est autre que l'espace projectif associé à  $E$ .

Considérons maintenant le sous-espace suivant du produit  $G_k(E) \times E$  :

$$E_k(E) = \{(V, x) \in G_k(E) \times E \mid x \in V\}.$$

On a une projection  $\pi : E_k(E) \longrightarrow G_k(E)$ , définie par  $\pi(V, x) = V$ . Alors,  $\pi$  est un fibré vectoriel localement trivial. En effet, notons  $O_H$  l'ouvert qui est l'image de  $\varphi_{KH}$  (cet ouvert ne dépend pas de  $K$ , car il est formé de tous les supplémentaires de  $H$ ).  $\pi^{-1}(O_H)$  n'est autre que l'ensemble  $\{(V, x) \mid H \oplus V = E, x \in V\}$ . Un supplémentaire  $K$  de  $H$  étant choisi, on peut considérer la projection  $p$  sur  $K$  parallèlement à  $H$ . L'application  $(V, x) \mapsto (V, p(x))$  est alors un homéomorphisme de  $\pi^{-1}(O_H)$  vers  $O_H \times K$ , qui commute avec les projections sur  $O_H$ .

Le fibré que nous venons de construire sera noté  $\gamma_k$ , et appelé “fibré universel”. Ses fibres sont de dimension  $k$  (sur  $\mathbf{F}$ ).

On note  $G_k$  ou  $G_k^\infty$  la limite inductive des  $G_k(\mathbf{F}^n)$ , qu’on appelle “grasmannienne infinie”. On a encore un fibré  $\gamma_k$  sur cet espace (dont l’espace total est la limite inductive des  $E_k(\mathbf{F}^n)$ ).

Noter que  $G_k^\infty$  est un espace paracompact. Ceci résulte du théorème de Miyazaki : Tout CW-complexe est paracompact (Tohoku Math. J. 4 (1952) 309–313).

## 4 Applications de Gauss.

**Définition 2** Soit  $\pi : E \longrightarrow B$  un  $\mathbf{F}^k$ -fibré vectoriel. Une application de Gauss pour ce fibré est une application continue  $g : E \longrightarrow \mathbf{F}^n$ , qui est linéaire injective sur chaque fibre.

Il est clair que si une application de Gauss à valeurs dans  $\mathbf{F}^n$  existe, alors il en existe a fortiori à valeurs dans  $\mathbf{F}^m$ , pour  $m > n$ . Par ailleurs, pour un  $\mathbf{F}^k$ -fibré vectoriel, une application de Gauss à valeurs dans  $\mathbf{F}^k$  existe si et seulement si le fibré est trivial.

**Lemme 3** Pour tout  $\mathbf{F}^k$ -fibré vectoriel  $\pi : E \longrightarrow B$  sur une base  $B$  compacte, il existe un entier  $n$ , et une application de Gauss à valeurs dans  $\mathbf{F}^n$ .

Recouvrons  $B$  par une famille finie d’ouverts  $(U_i)_{i \in m}$  (où  $m = \{0, \dots, m-1\}$ ) au dessus desquels le fibré est trivial (via une trivialisatation  $\psi_i$ ). Soit  $(\lambda_i)_{i \in m}$  une partition de l’unité associée à ce recouvrement. Envoyons alors l’espace total  $E$  du fibré dans  $\bigoplus_{i \in m} \mathbf{F}^k$  (qui s’identifie à  $\mathbf{F}^{km}$ ), comme suit :

$$y \mapsto (\lambda_0(\pi(y))\text{pr}_2\psi_0(y), \dots, \lambda_{m-1}(\pi(y))\text{pr}_2\psi_{m-1}(y))$$

Cette application est clairement continue, et linéaire et injective sur chaque fibre.  $\square$

Notons  $\varphi : G_k(\mathbf{F}^n) \longrightarrow G_k(\mathbf{F}^n \oplus \mathbf{F}^n)$  l’application (dite “canonique”), qui envoie le sous-espace  $V$  (de dimension  $k$ ) de  $\mathbf{F}^n$ , sur le sous-espace  $V \oplus 0$ , et notons  $\varphi'$  celle qui envoie  $V$  sur  $0 \oplus V$ . Alors  $\varphi$  et  $\varphi'$  sont homotopes. En effet, pour  $t \in [0, 1]$ , envoyons  $\mathbf{F}^n$  dans  $\mathbf{F}^n \oplus \mathbf{F}^n$  par l’application  $x \mapsto (1-t)(x, 0) + t(0, x)$ . C’est clairement une application linéaire injective. Elle induit donc une application  $\varphi_t : G_k(\mathbf{F}^n) \longrightarrow G_k(\mathbf{F}^n \oplus \mathbf{F}^n)$ , qui est l’homotopie cherchée. Dans la suite nous identifions  $\mathbf{F}^n \oplus \mathbf{F}^n$  avec  $\mathbf{F}^{2n}$ .

**Lemme 4** Soient  $f, g : B \longrightarrow G_k(\mathbf{F}^n)$  deux applications continues, telles que les fibrés  $f^*(\gamma_k)$  et  $g^*(\gamma_k)$  soient isomorphes. Alors, les applications  $\varphi f$  et  $\varphi g$  (où  $\varphi : G_k(\mathbf{F}^n) \longrightarrow G_k(\mathbf{F}^{2n})$  est l’application canonique) sont homotopes.

Comme  $\varphi$  et  $\varphi'$  sont homotopes, il suffit de prouver que  $\varphi f$  et  $\varphi' g$  sont homotopes. Soit  $E_f$  l’espace total de  $f^*(\gamma_k)$ , et  $E_g$  l’espace total de  $g^*(\gamma_k)$ . On a les flèches  $\tilde{f} : E_f \longrightarrow \mathbf{F}^n$  et  $\tilde{g} : E_g \longrightarrow \mathbf{F}^n$  provenant des morphismes canoniques, qui sont linéaires injectives sur chaque fibres. Soit  $\theta : E_f \longrightarrow E_g$  l’isomorphisme qui nous est donné entre les deux fibrés. Pour  $t \in [0, 1]$ , considérons l’application suivante, de  $E_f$  vers  $\mathbf{F}^{2n}$  :

$$y \mapsto ((1-t)\tilde{f}(y), t\tilde{g}\theta(y)).$$

C’est une application continue, linéaire et injective sur chaque fibre du fibré  $f^*(\gamma_k)$ . Elle induit donc une application continue  $h_t$  de  $B$  vers  $G_k(\mathbf{F}^{2n})$ , dépendant continuellement de  $t$ . C’est l’homotopie cherchée.  $\square$

**Théorème 2** Soit  $B$  un espace paracompact. Alors l'application :

$$[B, G_k^\infty] \longrightarrow \text{Vect}^k(B),$$

qui envoie la classe d'homotopie de  $f : B \longrightarrow G_k^\infty$  vers la classe d'isomorphisme du fibré  $f^*(\gamma_k)$ , est une bijection.  $\square$

## 5 Théorème de Leray–Hirsch.

Soit  $\pi : (E, E') \longrightarrow B$  un fibré “en paires” localement trivial de fibre  $(F, F')$ . On pose  $\pi'^{-1}(x) = \pi^{-1}(x) \cap E'$ . Pour tout  $x$  de  $B$ , on note  $j_x : (\pi^{-1}(x), \pi'^{-1}(x)) \longrightarrow (E, E')$  l'inclusion de la fibre au dessus de  $x$  dans l'espace total.

**Définition 3** On appelle “trivialisation cohomologique” de  $\pi$ , une application linéaire homogène de degré 0,  $\theta : H^*(F, F') \longrightarrow H^*(E, E')$ , telle que pour tout  $x$  de  $B$ , le composé  $j_x^* \theta$  soit un isomorphisme.

**Théorème 3** (Leray–Hirsch) Soit  $\pi : (E, E') \longrightarrow B$  un fibré localement trivial de fibre  $(F, F')$ . Soit  $\theta : H^*(F, F') \longrightarrow H^*(E, E')$  une trivialisation cohomologique de ce fibré. Soit  $(b_1, \dots, b_k)$  une base de  $H_*(F, F')$  comme  $\mathbf{k}$ -module (faite d'éléments homogènes). On remarque qu'alors  $H^*(F, F')$  est le dual de  $H_*(F, F')$ , et on note  $(b_1^*, \dots, b_k^*)$  la base duale. Alors les applications :

$$\begin{array}{ccc} H_*(E, E') & \xrightarrow{\Phi} & H_*(B) \otimes H_*(F, F') \\ H^*(B) \otimes H^*(F, F') & \xrightarrow{\Phi'} & H^*(E, E') \end{array}$$

définies par :

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \sum_{i=1}^k \pi_*(\theta(b_i^*) \frown x) \otimes b_i \\ \Phi'(x \otimes y) &= \pi^*(x) \smile \theta(y) \end{aligned}$$

sont des isomorphismes.

*Étape 1.*  $\Phi$  est un isomorphisme quand le fibré est trivial et quand  $B$  est connexe par arcs. Il suffit dans ce cas, de montrer que  $\Phi$  est un isomorphisme pour le fibré  $\text{pr}_1 : B \times (F, F') \longrightarrow B$ , qui est isomorphe à  $\pi : (E, E') \longrightarrow B$ . La formule de Künneth pour l'homologie de  $B \times (F, F')$  se réduit à l'isomorphisme :

$$H_*(B) \otimes H_*(F, F') \xrightarrow{\times} H_*(B \times (F, F')).$$

Il suffit donc de montrer que  $x \otimes y \mapsto \Phi(x \otimes y)$  est un automorphisme de  $H_*(B) \otimes H_*(F, F')$ .

Comme  $\theta$  envoie  $H^*(F, F')$  dans  $H^*(B \times (F, F'))$ , et comme on a l'isomorphisme (formule de Künneth pour la cohomologie, qui s'applique ici car  $H^*(F, F')$  est de type fini) :

$$H^*(B) \otimes H^*(F, F') \xrightarrow{\times} H^*(B \times (F, F')),$$

on voit qu'on peut écrire, pour tout  $y$  de  $H^*(F, F')$ , en tenant compte de  $H^0(B) = \mathbf{k}$  :

$$\theta(y) = 1 \times \lambda(y) + \mu(y),$$

où  $\mu(y)$  est lui-même de la forme  $\sum_k \alpha_k \times b_k^*$ , avec  $|\alpha_k| > 0$ , et donc  $|b_k| < |y|$ . Notez par ailleurs, que  $\lambda$  est un automorphisme de  $H^*(F, F')$ , car  $\theta$  est une trivialisation cohomologique, et  $j_x^* \theta(y) = \lambda(y)$  (la fibre au dessus de  $x$  étant identifiée à  $(F, F')$ ).

En conséquence, l'application  $x \otimes y \mapsto \Phi(x \times y)$  est la somme des deux applications suivantes :

$$\begin{aligned} x \otimes y &\mapsto \Phi_0 \sum_{j=1}^k \text{pr}_{1*}((1 \times \lambda(b_j^*)) \frown (x \times y)) \otimes b_j \\ x \otimes y &\mapsto \Phi_1 \sum_{j=1}^k \text{pr}_{1*}(\mu(b_j^*) \frown (x \times y)) \otimes b_j \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \Phi_0(x \otimes b_i) &= \sum_{j=1}^k \text{pr}_{1*}(x \times (\lambda(b_j^*) \frown b_i)) \otimes b_j \\ &= \sum_{j=1}^k x \otimes \lambda(b_j^*)(b_i) b_j \\ &= x \otimes \lambda_*(b_i) \end{aligned}$$

où  $\lambda_* : H_*(F, F') \longrightarrow H_*(F, F')$  est l'automorphisme dont  $\lambda$  est le transposé.  $\Phi_0$  est donc  $1 \otimes \lambda_*$ , c'est-à-dire un automorphisme.

Par ailleurs,  $\Phi_1$  est nilpotent pour une simple raison de degré. Il en résulte que  $\Phi$  est un isomorphisme.

*Étape 2.*  $\Phi$  est un isomorphisme quand le fibré est trivial. On n'a plus l'hypothèse de connexité par arcs. On se ramène au cas précédent en décomposant  $B$  en l'union disjointe de ses composantes connexes par arcs.

*Étape 3.*  $\Phi$  est un isomorphisme quand le fibré est de type fini. Il suffit d'utiliser la suite exacte de Mayer-Vietoris.

*Étape 4.*  $\Phi$  est un isomorphisme. Il suffit de passer à la limite inductive.

*Étape 5.*  $\Phi'$  est un isomorphisme. On peut définir un morphisme de complexes  $\bar{\Phi}$  comme suit :

$$C_*(E, E') \xrightarrow{\bar{\Phi}} C_*(B) \otimes H_*(F, F'),$$

par la formule :

$$\bar{\Phi}(x) = \sum_{i=1}^k \pi_* (\bar{\theta}(b_i^*) \frown x) \otimes b_i,$$

où  $\bar{\theta} : H^*(F, F') \longrightarrow C^*(E, E')$  induit  $\theta : H^*(F, F') \longrightarrow H^*(E, E')$ . On a montré que  $\bar{\Phi}$  induit un isomorphisme en homologie. On peut alors considérer le composé suivant :

$$C^*(B) \otimes H^*(F, F') \xrightarrow{\gamma} \text{Hom}(C_*(B) \otimes H_*(F, F'), \mathbf{k}) \xrightarrow{\bar{\Phi}^*} \text{Hom}(C_*(E, E'), \mathbf{k})$$

où la flèche de gauche est un isomorphisme, et où la flèche  $\bar{\Phi}^*$  induit un isomorphisme en homologie par la formule des coefficients universels. On voit donc que ce composé induit un isomorphisme en homologie. Il suffit donc de prouver qu'il induit  $\Phi'$ . Pour  $y \in C^*(B)$ , et  $x \in C_*(E, E')$ , on a :

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}^* \gamma(y \otimes b_i^*)(x) &= (y \otimes b_i^*) \Phi(x) \\ &= (y \otimes b_i^*) \left( \sum_{j=1}^k \pi_* (\bar{\theta}(b_j^*) \frown x) \otimes b_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^k y (\pi_* (\bar{\theta}(b_j^*) \frown x) b_i^*(b_j)) \\ &= \pi^*(y) (\bar{\theta}(b_i^*) \frown x) \\ &= (\pi^*(y) \smile \bar{\theta}(b_i^*))(x), \end{aligned}$$

or, quand  $y$  est un cocycle, la classe de cohomologie du cocycle  $\pi^*(y) \smile \bar{\theta}(b_i^*)$  est clairement  $\Phi'(\bar{y} \otimes b_i^*)$ , où  $\bar{y}$  est la classe de cohomologie du cocycle  $y$ .  $\square$

**Corollaire 2** Soit  $\pi : (E, E') \longrightarrow B$  un fibré localement trivial de fibre  $(F, F')$ . Soient  $a_1, \dots, a_n$  des éléments de  $H^*(E, E')$ , dont les restrictions à chaque fibre forment une base de la cohomologie de cette fibre. Alors  $H^*(E, E')$  est un  $H^*(B)$ -module libre (via  $\pi^*$ ), de base  $a_1, \dots, a_n$ . En particulier, si  $n \neq 0$ ,  $\pi^*$  est injectif.  $\square$

## 6 Classe de Thom, classe d'Euler et suite de Gysin.

Considérons un fibré  $\pi : (E, E') \longrightarrow B$ , localement trivial dont la fibre est  $(\mathbf{F}^n, \mathbf{F}^n - \{0\})$ , provenant d'un  $\mathbf{F}^n$ -fibré vectoriel. Une trivialisatıon cohomologique pour un tel fibré est une application :

$$H^*(\mathbf{F}^n, \mathbf{F}^n - \{0\}) \xrightarrow{\theta} H^*(E, E').$$

Or,  $H^*(\mathbf{F}^n, \mathbf{F}^n - \{0\})$  est isomorphe à  $\mathbf{k}$  avec un générateur canonique  $\omega^*$  (de dimension  $cn$ ). La condition de trivialisatıon cohomologique dit que la restriction de  $\theta(\omega^*)$  à chaque fibre est un générateur de la cohomologie de cette fibre. Si une telle trivialisatıon cohomologique existe, le fibré est donc orienté (relativement aux coefficients  $\mathbf{k}$ ). Réciproquement, tout fibré orientable de fibre  $(\mathbf{F}^n, \mathbf{F}^n - \{0\})$  possède une trivialisatıon cohomologique (c'est pratiquement la définition de "orientable").

**Définition 4** La classe de cohomologie  $\theta(\omega^*) \in H^*(E, E')$ , notée par la suite  $U_\pi$  s'appelle la "classe de Thom" du fibré  $\pi$ , et la classe  $s^*j^*(U_\pi) \in H^*(B)$ , où  $j$  est l'inclusion de  $E$  dans  $(E, E')$  et  $s$  la section nulle de  $\pi$ , est appelée la "classe d'Euler" de  $\pi$ .

**Théorème 4** Pour tout  $(\mathbf{F}^n, \mathbf{F}^n - \{0\})$ -fibré  $\pi : (E, E') \longrightarrow B$ , orientable (relativement à  $\mathbf{k}$ ), on a la suite exacte (dite de Gysin) :

$$\dots \longrightarrow H^i(B) \xrightarrow{e \smile} H^{i+cn}(B) \xrightarrow{\pi^*} H^{i+cn}(E') \xrightarrow{\psi} H^{i+1}(B) \longrightarrow \dots$$

où  $e \smile$  représente le produit par la classe d'Euler.

Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} H^i(B) & \xrightarrow{e \smile} & H^{i+cn}(B) & \xrightarrow{\pi^*} & H^{i+cn}(E') & \xrightarrow{\psi} & H^{i+1}(B) \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \pi^* & & \downarrow 1 & & \downarrow \varphi \\ H^{i+cn}(E, E') & \xrightarrow{j^*} & H^{i+cn}(E) & \xrightarrow{i^*} & H^{i+cn}(E') & \xrightarrow{\partial^*} & H^{i+cn+1}(E, E') \end{array}$$

dans lequel la suite inférieure est exacte, comme suite exacte d'une paire, où  $\varphi$  est donné par la formule :

$$\varphi(x) = \Phi'(x \otimes \omega^*),$$

qui en fait un isomorphisme (appelé isomorphisme de Thom), et où  $\psi$  est tel que le carré de droite est commutatif. La commutativité du carré central étant claire, il reste à prouver celle (au signe près) du

carré de gauche, les flèches verticales étant des isomorphismes. Or,

$$\begin{aligned}
\pi^*(e \smile x) &= \pi^*(s^*j^*(U_\pi) \smile x) \\
&= \pi^*s^*j^*(U_\pi) \smile \pi^*(x) \\
&= j^*(U_\pi) \smile \pi^*(x) \\
&= \pm\pi^*(x) \smile j^*(U_\pi) \\
&= \pm j^*(\pi^*(x) \smile U_\pi) \\
&= \pm j^*(\pi^*(x) \smile \theta(\omega^*)) \\
&= \pm j^*\Phi'(x \otimes \omega^*). \quad \square
\end{aligned}$$

## 7 L'algèbre de cohomologie de l'espace projectif.

L'espace projectif  $\mathbf{FP}^{k-1}$  est la base du fibré universel  $\gamma_1$ . Si on note  $E$  l'espace total de ce fibré, on peut considérer le complémentaire  $E'$  de la section nulle.  $E'$  est clairement homéomorphe à  $\mathbf{F}^k - \{0\}$ , qui a le type d'homotopie de la sphère  $S^{ck-1}$ .  $\mathbf{FP}^{k-1}$  étant connexe par arcs (même si  $k = 0$ ), on voit que  $H^0(\mathbf{FP}^{k-1}) = \mathbf{k}$ . La suite exacte de Gysin nous donne :

$$H^{i+c-1}(S^{ck-1}) \xrightarrow{\psi} H^i(\mathbf{FP}^{k-1}) \xrightarrow{e \smile} H^{i+c}(\mathbf{FP}^{k-1}) \xrightarrow{\pi^*} H^{i+c}(S^{ck-1})$$

On en déduit aisément que :

$$H^*(\mathbf{FP}^{k-1}) = \frac{\mathbf{k}[e]}{e^k}$$

aussi bien dans le cas  $\mathbf{F} = \mathbf{R}$  et  $\mathbf{k} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ , que dans le cas  $\mathbf{F} = \mathbf{C}$  et  $\mathbf{k} = \mathbf{Z}$ , que dans le cas  $\mathbf{F} = \mathbf{H}$  et  $\mathbf{k} = \mathbf{Z}$ .

## 8 Le fibré projectif associé.

Soit  $\pi : E \rightarrow B$  un  $\mathbf{F}^k$ -fibré vectoriel. On notera  $\xi : P \rightarrow B$  le fibré obtenu en remplaçant chaque fibre par l'espace projectif associé. Il s'agit d'un nouveau fibré localement trivial ayant  $\mathbf{FP}^{k-1}$  pour fibre. En effet, les ouverts qui trivialisent le fibré  $\pi$  trivialisent aussi ce nouveau fibré.

Le fibré en droites canonique  $\zeta : E' \rightarrow P$  est défini comme suit.  $E'$  est l'ensemble des couples  $(x, y)$ , où  $x \in P$  et où  $y \in x$  (ceci a un sens car  $x$  est une droite vectorielle dans une fibre de  $\pi$ ). Il s'agit d'un fibré en droites localement trivial.

**Lemme 5** Soit  $e \in H^c(P)$  la classe d'Euler du fibré  $\zeta$ . Alors  $1, e, e^2, \dots, e^{k-1}$  forment une  $H^*(B)$ -base de  $H^*(P)$ . De plus la projection  $\xi : P \rightarrow B$  induit une injection en cohomologie.

Il suffit d'appliquer le théorème de Leray-Hirsch, et pour cela de vérifier que les restrictions de  $1, e, \dots, e^{k-1}$  à chaque fibre  $F_x = \xi^{-1}(x)$  de  $\xi$  donne une  $\mathbf{F}$ -base de la cohomologie de  $F_x$ . Mais ceci est immédiat par naturalité de la classe d'Euler, puisque ces restrictions sont  $1, e', \dots, e'^{k-1}$ , où  $e'$  est la classe d'Euler du fibré en droites universel sur l'espace projectif  $F_x$ . L'injectivité de  $\xi^*$  en résulte.  $\square$

## 9 Principe de scindement.

Dans toute la suite, la cohomologie sera à coefficients dans  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  si  $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ , et à coefficients dans  $\mathbf{Z}$  sinon. Un fibré est donc toujours orientable relativement à ces coefficients.

**Définition 5** Soit  $\pi : E \rightarrow B$  un  $\mathbf{F}^k$ -fibré vectoriel. Une application continue  $f : X \rightarrow B$  est appelée “application de scindement” pour ce fibré, si :

- le fibré  $f^*(\pi)$  est une somme de Whitney de fibrés en droites,
- l’application induite par  $f$  en cohomologie est injective.

**Lemme 6** Pour tout  $\mathbf{F}^k$ -fibré vectoriel  $\pi : E \rightarrow B$  sur une base paracompacte, il existe une application continue  $\xi : X \rightarrow B$ , telle que  $\xi^*(\pi)$  soit la somme de Whitney d’un fibré en droite et d’un  $\mathbf{F}^{k-1}$ -fibré, et induisant une injection en cohomologie.

Prenons pour  $\xi$  la projection du fibré projectif associé à  $\pi$ . Il suffit alors de choisir un supplémentaire<sup>1</sup> du sous-fibré en droites  $\zeta$  construit précédemment, pour voir  $\xi^*(\pi)$  comme la somme de Whitney d’un fibré en droites et d’un  $\mathbf{F}^{k-1}$ -fibré. Par ailleurs, on a déjà vu que  $\xi$  induit une injection en cohomologie.  $\square$

**Théorème 5** Tout  $\mathbf{F}^k$ -fibré vectoriel sur une base paracompacte a une application de scindement.

Il suffit d’appliquer le lemme précédent  $k - 1$  fois.  $\square$

## 10 Cohomologie de la grassmannienne infinie.

Considérons, sur  $(P^\infty)^k$ , le fibré  $\text{pr}_1^*(\gamma_1) \oplus \dots \oplus \text{pr}_k^*(\gamma_1)$ . Ce fibré a une application classifiante, unique à homotopie près :

$$P^\infty \times \dots \times P^\infty \xrightarrow{\Theta} G_k^\infty.$$

**Lemme 7** L’application  $\Theta$  ci-dessus est une application de scindement pour le fibré universel  $\gamma_k$ .

Il y a juste à prouver qu’elle induit une injection en cohomologie. Soit  $g : X \rightarrow G_k^\infty$  une application de scindement pour le fibré universel  $\gamma_k$  sur  $G_k^\infty$ . Alors  $g^*(\gamma_k) = \xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_k$ . Pour chaque  $i$ , soit  $h_i : X \rightarrow P^\infty$  une application classifiante pour le fibré  $\xi_i$ . Les applications  $h_i$  donnent une application  $h : X \rightarrow (P^\infty)^k$ , telle que

$$\xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_k = h^*(\text{pr}_1^*(\gamma_1) \oplus \dots \oplus \text{pr}_k^*(\gamma_1)).$$

Le membre de droite de cette égalité est isomorphe à  $(\Theta h)^*(\gamma_k)$ . Il en résulte que  $\Theta h$  est homotope à  $g$ , et donc que  $h^*\Theta^* = g^*$  en cohomologie. L’injectivité de  $\Theta^*$  en résulte.  $\square$

On a donc l’application injective :

$$H^*(G_k^\infty) \xrightarrow{\Theta^*} H^*((P^\infty)^k).$$

qui est aussi un morphisme d’algèbres.

L’algèbre de cohomologie  $H^*((P^\infty)^k)$  est le produit tensoriel de  $k$  exemplaires de l’algèbre de cohomologie  $H^*(P^\infty)$  (par la formule de Künneth). C’est donc une algèbre de polynômes sur les lettres  $y_1, \dots, y_k$ , où chaque  $y_i$  est de degré  $c$  (et est la classe d’Euler du fibré  $\text{pr}_i^*(\gamma_1)$ ).

Soit  $\sigma$  une permutation de  $k$  éléments. On a une application induite  $\sigma : (P^\infty)^k \rightarrow (P^\infty)^k$ . Le fibré  $\sigma^*(\text{pr}_1^*(\gamma_1) \oplus \dots \oplus \text{pr}_k^*(\gamma_1))$  est isomorphe (car identique) au fibré  $\text{pr}_1^*(\gamma_1) \oplus \dots \oplus \text{pr}_k^*(\gamma_1)$ . Il en résulte que les applications  $\Theta$  et  $\Theta\sigma$  sont homotopes, et donc que l’image de  $\Theta^*$  est contenue dans la sous-algèbre de  $H^*((P^\infty)^k)$  formée des polynômes symétriques.

<sup>1</sup>Pour construire un tel supplémentaire, sur une base paracompacte, construire une structure euclidienne ou hermitienne sur le fibré, et prendre l’orthogonal du sous-fibré en droites.

**Théorème 6** *L'image de  $\Theta^*$  est exactement la sous-algèbre des polynômes symétriques.*

Il suffit de montrer qu'en chaque degré l'algèbre  $H^*(G_k^\infty)$  a la même dimension (sur  $\mathbf{F}$ ) que la sous-algèbre des polynômes symétriques dans  $H^*((P^\infty)^k)$ . On sait que la sous-algèbre des polynômes symétriques dans  $\mathbf{F}[y_1, \dots, y_k]$  est l'algèbre libre sur  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ , où  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  sont les fonctions symétriques élémentaires des  $y_1, \dots, y_k$ . Il suffit donc de montrer que  $H^*(G_k^\infty)$  est une algèbre (commutative) libre sur des générateurs  $c_1, \dots, c_k$ , où  $c_i$  est de degré  $ic$ .

Le résultat est déjà connu pour  $k = 1$  (algèbre cohomologie de l'espace projectif). Procédons par récurrence sur  $k$ . On sait déjà que  $H^*(G_k^\infty)$  est une algèbre intègre, car isomorphe à une sous-algèbre d'une algèbre de polynômes.

L'espace total  $E_0$  du fibré en sphères associé au fibré universel  $\gamma_k$  s'identifie à l'ensemble des couples  $(V, x)$ , où  $V$  est un sous-espace de dimension  $k$  dans  $\mathbf{F}^\infty$ , et  $x$  un vecteur de norme 1 appartenant à  $V$ .  $E_0$  se projete sur la sphère  $S^\infty$  par l'application  $(x, V) \mapsto x$ . Cette projection est un fibré localement trivial, dont la fibre au dessus de  $x$  est l'ensemble des sous-espaces de dimension  $k$  de  $\mathbf{F}^\infty$  qui contiennent  $x$ . Cet ensemble s'identifie à  $G_{k-1}^\infty$ . Comme la sphère  $S^\infty$  est contractile et paracompacte,  $E_0$  lui-même a le type d'homotopie de  $G_{k-1}^\infty$ . La suite exacte de Gysin s'écrit alors :

$$\dots \longrightarrow H^i(G_k^\infty) \xrightarrow{\smile e} H^{i+ck}(G_k^\infty) \xrightarrow{p^*} H^{i+ck}(G_{k-1}^\infty) \xrightarrow{\Psi} H^{i+1}(G_k^\infty) \longrightarrow \dots$$

Comme la classe d'Euler  $e$  du fibré universel  $\gamma_k$  n'est pas nulle<sup>2</sup>, et comme l'algèbre  $H^*(G_k^\infty)$  est intègre, la multiplication par la classe d'Euler est injective. Il en résulte que  $\Psi$  est nul, et qu'on a la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow H^*(G_k^\infty) \xrightarrow{\smile e} H^*(G_k^\infty) \xrightarrow{p^*} H^*(G_{k-1}^\infty) \longrightarrow 0.$$

Comme, par hypothèse d'induction, l'algèbre  $H^*(G_{k-1}^\infty)$  est libre,  $p^*$  admet une section qui est un morphisme d'algèbres. Le degré de  $e$  étant positif ( $k > 0$ ), on voit qu'on a un isomorphisme d'algèbres :

$$H^*(G_k^\infty) \simeq H^*(G_{k-1}^\infty)[e]$$

(voir l'appendice pour ce résultat d'algèbre). Comme  $e$  est de degré  $k$ , on voit par induction que l'algèbre  $H^*(G_k^\infty)$  est isomorphe à une algèbre de polynômes sur des générateurs de degrés  $1, \dots, k$ .  $\square$

## 11 Classes caractéristiques.

Nous savons maintenant que l'application injective :

$$H^*(G_k^\infty) \xrightarrow{\Theta^*} H^*((P^\infty)^k)$$

a pour image la sous-algèbre des polynômes symétriques en  $y_1, \dots, y_n$ . Il existe donc des classes de cohomologie uniques  $c_1, \dots, c_k$  dans  $H^*(G_k^\infty)$ , de degrés respectifs  $c, 2c, \dots, kc$ , dont les images par  $\Theta^*$  sont les fonctions symétriques élémentaires  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  des variables  $y_1, \dots, y_k$ .

Les classes  $c_1, \dots, c_k$  s'appellent les classes caractéristiques du fibré universel  $\gamma_k$ . Si  $\pi : E \longrightarrow B$  est un  $\mathbf{F}^k$ -fibré vectoriel sur une base compacte  $B$ , ce fibré a une application classifiante  $f : B \longrightarrow G_k^\infty$ , unique à homotopie près. Il y a donc des classes de cohomologie bien déterminées  $f^*(c_1), \dots, f^*(c_k)$  dans la cohomologie de  $B$ , qu'on appelle les "classes caractéristiques" de  $\pi$ , et qu'on note  $c_1(\pi), \dots, c_k(\pi)$ . La "classe caractéristique totale" du fibré  $\pi$  est l'élément (non homogène)  $1 + c_1(\pi) + \dots + c_k(\pi)$ , noté  $c(\pi)$ .

<sup>2</sup>car son image par  $\Theta^*$  est la classe d'Euler de  $\text{pr}_1^*(\gamma_1) \oplus \dots \oplus \text{pr}_k^*(\gamma_1)$ , et que la classe d'Euler de ce dernier fibré est le produit des classes d'Euler des termes de la somme, ce qui montre qu'il s'agit du monôme non nul  $y_1 \dots y_k$ .

**Théorème 7** *La classe caractéristique totale a les propriétés suivantes, qui la caractérisent :*

- $c(\pi) = 1 + c_1(\pi) + \dots + c_k(\pi)$ , pour un  $\mathbf{F}^k$ -fibré  $\pi : E \longrightarrow B$ , avec  $c_i(\pi) \in H^{ic}(B)$ .
- Si  $\pi$  et  $\pi'$  sont isomorphes,  $c(\pi) = c(\pi')$ .
- Si  $f : B \longrightarrow B'$  est continue, et si  $\pi' : E' \longrightarrow B'$  est un  $\mathbf{F}^k$ -fibré,  $f^*(c(\pi')) = c(f^*(\pi'))$ .
- $c(\gamma_1) = 1 + z$ , où  $\gamma_1$  est le fibré universel sur l'espace projectif  $P^k$ , et où  $z$  est le générateur canonique de l'algèbre  $H^*(P^k)$  (c'est-à-dire la classe d'Euler de  $\gamma_1$ ).
- $c(\pi \oplus \pi') = c(\pi)c(\pi')$ .

Le seul point non trivial est le dernier, plus le fait que ces propriétés caractérisent la classe caractéristique totale.

*Preuve du dernier point.* Soient  $f : X \longrightarrow B$  une flèche qui scinde simultanément  $\pi$  et  $\pi'$  (exercice). Comme  $f^* : H^*(B) \longrightarrow H^*(X)$  est injective, il suffit de prouver que  $c(f^*(\pi) \oplus f^*(\pi')) = c(f^*(\pi))c(f^*(\pi'))$ , ce qui résultera du fait que pour une somme de Whitney de fibrés en droites  $\xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_k$ , on a :

$$c(\xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_k) = c(\xi_1) \dots c(\xi_k).$$

Soient  $g_i : X \longrightarrow P^\infty$  des flèches classifiantes pour les  $\xi_i$ . Alors la flèche  $g : X \longrightarrow (P^\infty)^k$  de composantes  $g_i$  est telle que

$$\xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_k \simeq g^*(\text{pr}_1^*(\gamma_1) \oplus \dots \oplus \text{pr}_k^*(\gamma_k)).$$

On a donc :

$$\begin{aligned} c(\xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_k) &= g^*(c(\text{pr}_1^*(\gamma_1) \oplus \dots \oplus \text{pr}_k^*(\gamma_k))) \\ &= g^*\Theta^*(c(\gamma_k)) \\ &= g^*((1 + y_1) \dots (1 + y_k)) \\ &= (1 + g^*(y_1)) \dots (1 + g^*(y_k)). \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} g^*(y_i) &= g^*(e(\text{pr}_i^*(\gamma_1))) \\ &= g_i^*(e(\gamma_1)). \end{aligned}$$

On voit donc que  $1 + g^*(y_i) = g_i^*(1 + e(\gamma_1)) = g_i^*(c(\gamma_1)) = c(\xi_i)$ .

*Caractérisation de la classe totale.* Il est clair que les axiomes ci-dessus caractérisent la classe totale pour les fibrés en droites. Le principe de scindement et ces mêmes axiomes permettent de traiter le cas des fibrés de dimensions  $k$  quelconque.

## A Sur les algèbres de polynômes.

**Lemme 8** *Soit  $A$  une algèbre (positivement) graduée et commutative. Soit  $x$  un élément de  $A$  de degré strictement positif, et tel que la multiplication par  $x$  soit une injection de  $A$  dans  $A$ . On suppose que la projection de  $A$  sur  $A/xA$  admet une section qui est un morphisme d'algèbres. Alors  $A$  est isomorphe comme algèbre à l'algèbre de polynômes  $(A/xA)[x]$ .*

Posons  $B = A/xA$ . On a par hypothèse la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\times x} A \xrightarrow{p} B \longrightarrow 0.$$

Par ailleurs, on a la suite exacte courte suivante :

$$0 \longrightarrow B[x] \xrightarrow{\times x} B[x] \longrightarrow B \longrightarrow 0.$$

Soit  $s : B \longrightarrow A$  une section de  $p$ , qui soit un morphisme d'algèbres. On définit  $\varphi : B[x] \longrightarrow A$ , par  $\varphi(bx^k) = s(b)x^k$ . Le triplet  $(\varphi, \varphi, 1)$  est alors un morphisme de la seconde suite exacte vers la première, comme on peut facilement le vérifier.

Bien sûr,  $\varphi$  est un isomorphisme en degrés négatifs. Une récurrence sur le degré, utilisant le lemme des cinq et le fait que le degré de  $x$  est strictement positif, montre alors que  $\varphi$  est un isomorphisme en tout degré.  $\square$