

TOPOLOGIE ALGÈBRIQUE. — *Classe d'Euler rationnelle des sous-groupes résolubles de $GL^+(2n, \mathbf{R})$.* Note (*) de **Alain Prouté**, présentée par M. Henri Cartan.

La cohomologie rationnelle du groupe $GL^+(2n, \mathbf{R})$ rendu discret contient une classe d'Euler non nulle. On montre que sa restriction à un sous-groupe résoluble quelconque est nulle. On en déduit que la caractéristique d'Euler de toute variété compacte plate, sans bord, dont le π_1 est résoluble, est nulle.

The rational cohomology of the discrete group $GL^+(2n, \mathbf{R})$ contains a non-zero Euler class. It is proved that the restriction of this class to any solvable subgroup is zero. As a consequence the Euler characteristic of any flat, compact manifold, without boundary, whose π_1 is solvable, is zero.

La cohomologie rationnelle du groupe discret $GL^+(2n, \mathbf{R})_\delta$ (L'indice δ indique que la topologie du groupe est discrète.) contient une classe d'Euler non nulle e , qui est l'image de la classe d'Euler de $H^*(BGL^+(2n, \mathbf{R}); \mathbf{Q})$ dans $H^*(BGL^+(2n, \mathbf{R})_\delta; \mathbf{Q})$ ⁽²⁾. Le but de cette Note est de montrer que sa restriction à tout sous-groupe résoluble est nulle. En terme de fibrés plats, ceci signifie que la classe d'Euler de tout fibré vectoriel réel orientable plat, dont le groupe structural est réduit à un groupe résoluble, est nulle. Comme le groupe structural de tout fibré plat sur X peut être réduit à l'image de $\pi_1(X)$ dans $GL(n, \mathbf{R})$ par l'application d'holonomie, on en déduit en particulier que la caractéristique d'Euler de toute variété compacte sans bord, plate, dont le π_1 est résoluble, est nulle.

THÉORÈME. — *Soit G un sous-groupe résoluble de $GL^+(2n, \mathbf{R})$; alors l'image de la classe d'Euler e de $H^{2n}(GL^+(2n, \mathbf{R}); \mathbf{Q})$ dans $H^{2n}(G, \mathbf{Q})$ est nulle.*

On peut considérer G comme un sous-groupe de $GL(2n, \mathbf{C})$. Soit \overline{G} l'adhérence algébrique de G dans $GL(2n, \mathbf{C})$, c'est-à-dire l'adhérence pour la topologie de Zariski, dont les fermés sont les sous-ensembles algébriques de l'espace vectoriel $\text{End}(\mathbf{C}^{2n})$; \overline{G} est alors un groupe de Lie algébrique résoluble. Soit \overline{G}_0 la composante irréductible contenant 0, de la variété algébrique \overline{G} . \overline{G}_0 est un sous-groupe d'indice fini de \overline{G} [⁽³⁾, p. 86] et par ailleurs \overline{G}_0 est connexe pour la topologie forte de $GL(2n, \mathbf{C})$ [⁽³⁾, p. 86]. Le théorème de Lie-Kolchin [⁽³⁾, p. 243] nous dit qu'il existe un vecteur X de \mathbf{C}^{2n} tel que $gX \in \mathbf{C}X$ pour tout g de \overline{G}_0 . Soit $G_0 = G \cap \overline{G}_0$; G_0 est un sous-groupe d'indice fini de G . Nous allons montrer que la classe de Euler de G_0 est nulle, ce qui entraîne que celle de G l'est aussi. On a

$$X = X_1 + iX_2, \quad X_1 \text{ et } X_2 \text{ étant réels.}$$

Soit E le sous-espace de \mathbf{R}^{2n} engendré par X_1 et X_2 . Si E est de dimension 1, la représentation $G_0 \rightarrow GL^+(2n, \mathbf{R})$ admet une sous-représentation de dimension 1; la classe d'Euler est donc nulle. Si la dimension de E est 2, G_0 agit sur E par des similitudes, donc $G_0 \rightarrow GL^+(2n, \mathbf{R})$ admet une sous-représentation de dimension 2 admettant une structure complexe.

La classe d'Euler de cette sous-représentation est égale à sa première classe de Chern, qui est nulle d'après la théorie de Chern-Weil.

Max Karoubi et Pierre Vogel nous ont aidé par leurs conseils et leurs critiques, Jacques Dixmier nous a suggéré l'utilisation du groupe \overline{G} .

(*) Séance du 18 avril 1977.

(¹) F. KAMBER et P. TONDEUR, *Flat Manifolds (Lecture notes in Math., 67, Springer, 1968)*.

(²) J. MILNOR, *Comment. Math. Helv.*, 32, 1958, p. 215-223.

(³) A. BOREL, *Linear Algebraic Groups*, W. A. Benjamin Inc., 1969.

*Institut de Mathématiques
et d'Informatique,
Université de Nantes,
B. P. n° 1044,
44037 Nantes Cedex.*