

TOPOLOGIE. — *Sur la transformation d'Eilenberg-Mac Lane*. Note (*) de **Alain Prouté**, présentée par Henri Cartan.

La shuffle-transformation d'Eilenberg-Mac Lane [1]: $\mathcal{E}\mathcal{M} : C_*^N(X) \otimes C_*^N(Y) \rightarrow C_*^N(X \times Y)$ est l'unique transformation naturelle satisfaisant à un critère simple. Ceci permet de l'introduire, et de prouver ses propriétés classiques, sans calcul.

TOPOLOGY. — On the Eilenberg-Mac Lane Map.

The Eilenberg-Mac Lane shuffle map [1]: $\mathcal{E}\mathcal{M} : C_*^N(X) \otimes C_*^N(Y) \rightarrow C_*^N(X \times Y)$ is the only natural transformation satisfying a simple criterion. This enables us to introduce this map and prove its classical properties, avoiding computations.

Les lettres X, Y, \dots désignent des ensembles simpliciaux. C_*^N est le foncteur des chaînes simpliciales normalisées, qui est naturellement facteur direct du foncteur C_* des chaînes simpliciales. Comme ce dernier est libre (au sens du théorème des modèles acycliques) sur les $(\Delta_n, e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ [où $e_n \in C_n(\Delta_n)$ est le simplexe identité $1 : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$], C_*^N est « projectif » sur ces mêmes modèles, et on peut également lui appliquer la méthode des modèles acycliques. L'acyclicité de $C_*^N(\Delta_p \times \Delta_q)$ montre alors l'existence d'au moins une transformation naturelle $C_*^N(X) \otimes C_*^N(Y) \rightarrow C_*^N(X \times Y)$. Nous allons montrer qu'elle est en fait unique.

CRITÈRE D'UNICITÉ. — Soient $\mathcal{C} \xrightarrow[F]{G} \mathcal{C}'$, deux foncteurs covariants d'une catégorie \mathcal{C} dans la catégorie des modules différentiels gradués augmentés. On suppose F « engendré » par les modèles $(M_i, e_i)_{i \in I}$ [c'est-à-dire que la famille $(f_*(e_i))_{i \in I, f \in \mathcal{C}(M_i, X)}$ est un système de générateurs de $F(X)$]. On suppose également G acyclique sur les modèles $(M_i)_{i \in I}$.

Alors, si $\forall i \in I, G_{|e_i|+1}(M_i) = 0$, il existe au plus une transformation naturelle de F vers G (où $|e_i|$ désigne le degré de e_i).

En effet, soit $\varphi : F \rightarrow G$ une transformation naturelle. Soit I_n le sous-ensemble de I formé des i tels que $|e_i| = n$.

Alors, pour $i \in I_0$, on a $G_1(M_i) = 0$, donc $\varepsilon : G_0(M_i) \rightarrow \Lambda$ est un isomorphisme. Ceci implique l'unicité de φ en dimension zéro, puisqu'elle est déterminée par les $\varphi(e_i), i \in I_0$, et qu'elle commute à ε .

On termine la démonstration, en remarquant que $G_{|e_i|+1}(M_i) = 0$ implique que :

$$\partial : G_{|e_i|}(M_i) \rightarrow G_{|e_i|-1}(M_i).$$

est injective, ce qui impose par récurrence les $\varphi(e_i) \in G_{|e_i|}(M_i)$. \square

L'unicité de la transformation $\mathcal{E}\mathcal{M} : C_*^N(X) \otimes C_*^N(Y) \rightarrow C_*^N(X \times Y)$ en résulte, puisque tous les simplexes de $\Delta_p \times \Delta_q$ de dimension $p+q+1$ sont dégénérés. $[(X, Y) \mapsto C_*^N(X) \otimes C_*^N(Y)$ est engendré par les $(\Delta_p, \Delta_q), e_p \otimes e_q)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ et $|e_p \otimes e_q| = p+q$.] Noter que cet argument ne serait pas valable si X et Y étaient des espaces topologiques et non des ensembles simpliciaux.

Comme autre conséquence immédiate de ce critère, on a la commutativité (exacte et non pas à homotopie près) de certains diagrammes. En particulier on voit que $\mathcal{E}\mathcal{M}$ est associative et commutative, et est l'inverse à droite de n'importe quelle transformation naturelle de $C_*^N(X \times Y)$ dans $C_*^N(X) \otimes C_*^N(Y)$, en particulier de la transformation d'Alexander-Whitney, d'où il suit que $\mathcal{E}\mathcal{M}$ est injective.

Remarque I. — Le critère ne s'applique évidemment pas en sens inverse. En effet, $(X, Y) \mapsto C_*^N(X \times Y)$ est projectif sur les modèles $((\Delta_n, \Delta_n), \Delta_*(e_n))_{n \in \mathbb{N}}$ (où $\Delta : \Delta_n \rightarrow \Delta_n \times \Delta_n$ est la diagonale). Par ailleurs, $|\Delta_*(e_n)| = n$, et $C_*^N(\Delta_n) \otimes C_*^N(\Delta_n)$ n'est nul que pour $* \geq 2n + 1$. Il est d'ailleurs bien connu qu'il n'y a pas une unique transformation naturelle dans ce sens, car sinon le \cup_1 -produit serait toujours nul.

L'associativité de la flèche d'Alexander-Whitney échappe donc aussi à cette méthode.

Remarque II. — Ce critère a été inspiré à l'auteur par l'exemple suivant :

Soit \mathcal{C} la catégorie des variétés différentiables \mathcal{C}^∞ à coins, \mathcal{C}' celle des \mathbf{R} -modules différentiels gradués augmentés, $C_* : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ le foncteur des chaînes singulières différentiables, et Ω_* le foncteur des courants. Alors C_* est libre sur les modèles $(\Delta_n, e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et Ω_* est acyclique sur ces mêmes modèles. Par ailleurs $\Omega_{n+1}(\Delta_n) = 0$. Il existe donc une unique transformation naturelle :

$$\varphi : C_* \rightarrow \Omega_*$$

Cette transformation est évidemment celle qui associe à tout n -simplexe singulier différentiable, le courant d'intégration des n -formes différentielles sur ce simplexe. La naturalité de φ est la formule du changement de variable, et $\partial\varphi = \varphi\partial$ est la formule de Stokes.

(*) Remise le 4 juillet 1983.

[1] S. EILENBERG et S. MAC LANE, *Annals of Math.*, 58, n° 1, 1953, p. 55-106.

*Institut de Mathématique et d'Informatique,
Université de Nantes, E.R.A. n° 946, 44072 Nantes Cedex.*