TOPOLOGIE. — Sur la diagonale d'Alexander-Whitney.
Note de **Alain Prouté**, présentée par Henri Cartan.

Remise le 18 juin 1984.

Nous caractérisons la diagonale d'Alexander-Whitney par une propriété de son image. Ceci permet de prouver sans calcul que la transformation d'Eilenberg-Mac Lane est un morphisme de coalgèbres.

TOPOLOGY. — On the Alexander-Whitney Diagonal.

We characterize the Alexander-Whitney diagonal by a property of its image. This enables the proof without computation that the Eilenberg-Mac Lane map is a morphism of coalgebras.

Cette Note complète une précédente Note de l'auteur [2]. Soit $\mathscr{E}$ la catégorie des ensembles finis (partiellement) ordonnés, et des applications croissantes (au sens large). Soit $\mathscr{S}$ la catégorie des ensembles simpliciaux. On définit un foncteur $F : \mathscr{E} \to \mathscr{S}$, en appelant n-simplexe d'un ensemble fini ordonné X, toute suite totalement ordonnée de $n+1$ éléments de X. Les opérateurs de face et de dégénérescence sont obtenus par suppression ou dédoublement d'un élément de la suite. Si X et Y sont des ensembles finis ordonnés, $X \times Y$ est ordonné de sorte que :

$$((i, j) \leqq (i', j')) \Leftrightarrow (i \leqq i' \text{ et } j \leqq j').$$

Noter que $F(X \times Y) = F(X) \times F(Y)$. On a $\Delta_n = F([n])$, où $[n]$ est l'ensemble totalement ordonné $\{0, 1, \ldots, n\}$. Désormais, on identifiera un ensemble fini ordonné à son image par F. On note C_* le foncteur des chaînes normalisées à coefficients dans un anneau unitaire quelconque. Soient X un ensemble fini ordonné, A et B deux parties de X. On dira que A *précède* B dans X, si tout élément de A est inférieur ou égal à tout élément de B. On notera $A_*(X)$ le sous-module de $C_*(X) \otimes C_*(X)$ engendré par les tenseurs $x \otimes y$, où x et y sont des simplexes tels que x précède y. $A_*(X)$ est un sous-complexe de $C_*(X) \otimes C_*(X)$.

Lemme. — *$A_*(\Delta_p \times \Delta_q)$ est acyclique et $A_{p+q+1}(\Delta_p \times \Delta_q) = 0$.*

$A_*(\Delta_p \times \Delta_q)$ peut s'écrire $M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$, où M_1, M_2 et M_3 sont engendrés respectivement par les $x \otimes y$ (x précédant y) tels que :

- $x = ((0,0))$,
- $x \neq ((0,0))$ et $(0,0) \in x$,
- $(0,0) \notin x$.

M_1 est alors un sous-complexe de $A_*(\Delta_p \times \Delta_q)$, isomorphe à $C_*(\Delta_p \times \Delta_q)$, donc acyclique. Il suffit donc de prouver que $A_*(\Delta_p \times \Delta_q)/M_1$ a une homologie nulle. Mais ce dernier complexe s'identifie à $M_2 \oplus M_3$ avec une différentielle qui s'écrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix},$$

or β est tautologiquement une bijection de M_2 sur M_3. $A_*(\Delta_p \times \Delta_q)/M_1$ est donc le mapping-cone d'un isomorphisme. La deuxième assertion résulte du fait que toute partie totalement ordonnée de $\Delta_p \times \Delta_q$ ne peut contenir plus de $p+q+1$ éléments. $\square$

COROLLAIRE. — $A_*(\Delta_p)$ *est acyclique et* $A_{p+1}(\Delta_p)=0$.

Il suffit de faire $q=0$. □

COROLLAIRE. — *La diagonale d'Alexander-Whitney :*

$$\mathscr{AW}: \quad C_*(X) \to C_*(X) \otimes C_*(X),$$

est l'unique transformation naturelle (sur $\mathscr{E}$*) dont l'image soit contenue dans* $A_*(X)$.

Il suffit d'appliquer le critère d'unicité de [2] à la situation $C_*(X) \to A_*(X)$. □

COROLLAIRE. — *La transformation d'Eilenberg-Mac Lane :*

$$\mathscr{EM}: \quad C_*(X) \otimes C_*(Y) \to C_*(X \times Y),$$

est un morphisme de coalgèbres.

Il s'agit d'établir la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
C_*(X) \otimes C_*(Y) \arrow[rr, "\mathscr{EM}"] \arrow[d, "\mathscr{AW} \otimes \mathscr{AW}"'] & & C_*(X \times Y) \arrow[dd, "\mathscr{AW}"] \\
C_*(X) \otimes C_*(X) \otimes C_*(Y) \otimes C_*(Y) \arrow[d, "1 \otimes T \otimes 1"'] & & \\
C_*(X) \otimes C_*(Y) \otimes C_*(X) \otimes C_*(Y) \arrow[rr, "\mathscr{EM} \otimes \mathscr{EM}"] & & C_*(X \times Y) \otimes C_*(X \times Y),
\end{tikzcd}$$

et pour cela de prouver que l'image de $(\mathscr{EM} \otimes \mathscr{EM})(1 \otimes T \otimes 1)(\mathscr{AW} \otimes \mathscr{AW})$ est contenue dans $A_*(X \times Y)$, car on pourra alors appliquer le critère d'unicité de [2] à la situation $C_*(X) \otimes C_*(Y) \to A_*(X \times Y)$. Il suffit donc d'établir que si α précède β dans X et γ précède δ dans Y, $\mathscr{EM}(\alpha \otimes \gamma) \otimes \mathscr{EM}(\beta \otimes \delta)$ est dans $A_*(X \times Y)$. Or ceci résulte immédiatement de l'égalité :

$$\mathscr{EM}(\alpha \otimes \gamma) \otimes \mathscr{EM}(\beta \otimes \delta) = (\alpha \times \gamma)_* \otimes (\beta \times \delta)_* (\mathscr{EM} \otimes \mathscr{EM})(e_{|\alpha|} \otimes e_{|\gamma|} \otimes e_{|\beta|} \otimes e_{|\delta|}).$$

et du fait que l'image de $\alpha \times \gamma$ précède celle de $\beta \times \delta$ dans $X \times Y$. □

Le dernier corollaire, dû à S. Eilenberg et J. C. Moore [1], est l'un des ingrédients indispensables à la construction de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore. Il a également pour conséquence que, si X est un H-espace, $C_*(X)$ est une algèbre de Hopf.

Remarque. — On peut prouver par cette méthode que $\mathscr{AW}$ est associative, mais ceci est bien sûr d'un intérêt limité, la vérification directe étant très simple.

L'auteur tient à remercier John C. Moore de l'avoir encouragé à réfléchir à cette question.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] S. EILENBERG et J. C. MOORE, *Comment. Math. Helv.*, 40, 1966, p. 231-232.

[2] A. PROUTÉ, *Comptes rendus*, 297, série I, 1983, p. 193-194.

Institut de Mathématiques et d'Informatique,
E.R.A. 946, 44072 *Nantes Cedex.*