Concentration dans les petits groupes rangés

Adrien Deloro

Exposé donné à Lyon le 12 mars 2009

Une certaine technique appelée “l'argument de concentration” est apparue il y a quelques années pour étudier les groupes de rang de Morley fini, et réapparaît périodiquement. Elle est assez belle, mais le problème si l'on veut l'expliquer lors d'une présentation, c'est qu'elle intervient dans les cinq dernières minutes de l'exposé, au terme d'une analyse assez lourde, et que l'auditoire a depuis longtemps décroché. Aujourd'hui prenons le taureau par les cornes ; je raconte précisément ces cinq dernières minutes, qui sont aussi les plus jolies, de façon autonome. Cela vous prépare à l'éventualité d'assister à un exposé sur les groupes de rang de Morley fini.

I Motivation

La motivation est évidemment la fameuse

Conjecture (Cherlin-Zilber). *Un groupe simple infini de ran de Morley fini est un grupe algébrique sur un corps algébriquement clos.*

C'est la dernière des grandes conjectures de Zilber. L'idée n'est pas forcément de la montrer ; à vrai dire beaucoup en doutent à cause de la possible existence de mauvais groupes (une simple question de temps selon certains). Le but est plutôt de déterminer dans quelle mesure elle est vraie, sous quelles hypothèses supplémentaires : on cherche à limiter les contre-exemples.

– Si vous n'avez pas le bonheur d'être logicien, cet énoncé mérite quelques explications. Quand on considère la réalisation d'un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos, on dispose de la topologie de Zariski, qui n'est pas très intuitive, et de la dimension de Zariski, qui l'est déjà davantage. Et si vous ouvrez votre référence préférée sur les groupes algébriques, vous trouverez deux sortes de théorème : ceux qui se démontrent par de simples considérations dimensionnelles (exemple : un groupe de dimension 2 est résoluble), et ceux qui requièrent de la topologie (exemple : les sous-groupes de Borel sont conjugués).
  C'est assez intéressant de se demander ce qu'on peut faire avec la seule dimension, *mais sans la topologie*. Evidemment il faut pour cela généraliser le concept d'ensemble constructible dans l'abstrait, sans référence aux fermés de Zariski. C'est possible en logique, où l'on parle, à la place, d'ensembles *définissables*. Définissable, cela veut dire définissable par une formule “du premier ordre”, où l'on ne quantifie que sur des éléments. On s'autorise paramètres et passages au quotient, pour manipuler les objets familiers au théoricien des groupes.

Exemple.
- si $g_1, \dots, g_n \in G$, alors $C_G(g_1, \dots, g_n)$ est définissable.
- si $H < G$ est définissable, alors l'espace quotient G/H est définissable.
- En revanche, G' n'a pas de raison a priori d'être définissable : il est certes engendré par les commutateurs, mais tant que vous ne savez pas borner les produits, le fait d'être un produit de commutateurs n'est pas du premier ordre.

- Un mot pour nos amis logiciens : j'emploie évidemment "définissable" dans le sens d'"interprétable", ou encore, je travaille dans G^{eq} (avec paramètres).

Tout ceci étant dit, un groupe de rang de Morley fini, c'est tout simplement un groupe muni d'une fonction rg qui à chaque ensemble définissable associe un entier, et qui se comporte bien : si vous êtes logicien, il se comporte comme le rang de Morley ; si vous êtes géomètre, il se comporte comme la dimension de Zariski.

Par exemple, un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos est un groupe de rang de Morley fini. La conjecture de Cherlin-Zilber pose la réciproque, en évitant les contre-exemples triviaux.

II Le rôle des involutions

Si vous n'avez jamais ouvert de livre sur la théorie des groupes, il est difficile d'imaginer l'importance des involutions dans un groupe (ce sont les éléments d'ordre exactement 2). Toute la classification des groupes simples finis repose sur leur étude, celle de leur centralisateur, et du 2-sous-groupe de Sylow.

Et Borovik a eu l'idée de faire la même chose pour analyser les groupes de rang de Morley fini : après tout, la conjecture de Cherlin-Zilber est bien une version infinitaire, épurée, de la classification des groupes simples finis !

On va donc se pencher tout paticulièrement sur les involutions, et les 2-sous-groupes de Sylow, quand ils sont non-triviaux. Un 2-sous-groupe de Sylow, dans le contexte infini, est par définition un 2-sous-groupe maximal. En théorie des groupes finis, il y a un grand théorème, dû à Feit et Thompson, qui donne sa non-trivialité pour un groupe simple ; dans le contexte infini rien de tel n'est connu. A part ce problème on dispose d'une bonne théorie de 2-Sylow.

Théorème (Borovik-Poizat)**.** *Soit G un groupe de rang de Morley fini. Alors les 2-sous-groupes de Sylow S sont conjugués, et sont extension finie d'un produit de la forme $U * T$ (produit central : les éléments de U commutent avec les éléments de T, mais on a peut-être une intersection non-triviale), où*
- *U est un groupe 2-unipotent (d'exposant borné), et*
- *T est un 2-tore, c'est-à-dire $T \simeq \mathbb{Z}_{2^\infty}^d$ pour un entier d, où $\mathbb{Z}_{2^\infty} = \{z \in \mathbb{C} : \text{il existe } k \in \mathbb{N} : z^{2^k} = 1\}$ est le 2-groupe de Prüfer (que l'on peut voir comme limite inductive des $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$).*

On voit se profiler quatre cas ; l'idée (absente de cet exposé) est que l'on chercher ainsi à prévoir la caractérisique du corps sous-jacent, s'il y en a un. De toute manière cette division porte ses fruits.

Livre (Altınel, Borovik, Cherlin)**.** *Si $U \neq 1$, la conjecture de Cherlin-Zilber est résolue.*

Ce livre fait 500 pages : on peut assommer quelqu'un avec, mais pas un théoricien des groupes finis, pour qui c'est ridiculement court. Borovik aime comparer cette démonstration à une image homomorphique de la classification des groupes simples finis ; on en déduit que le noyau est de cardinal environ 20, ou plutôt environ 10, puisque le livre ne traite que la moitié des cas.

Et justement, quand $U = 1$, on ne sait rien de définitif : c'est pour cela qu'il y a un exposé. Il me reste une notion à motiver avant d'attaquer la concentration.

III Un groupe de petit rang de Morley fini n'est pas un petit groupe de rang de Morley fini

Derrière ce titre alambiqué se cache une idée simple : si vous voulez mesurer la petitesse d'un groupe de rang de Morley fini, il ne faut pas employer le rang de Morley, mais plutôt une notion de théorie des groupes. Par exemple si l'on attaque naïvement la conjecture de Cherlin-Zilber par récurrence, on échoue rapidement.

Théorème.
- *Si* $\operatorname{rg} G = 1$, *alors* G° *est abélien. (Reineke)*
- *Si* $\operatorname{rg} G = 2$, *alors* G° *est résoluble. (Cherlin)*
- *Si* $\operatorname{rg} G = 3$, *alors* G° *est* PSL_2 *ou pas. (Cherlin)*

Si ce n'est pas PSL_2, c'est ce qu'on appelle un mauvais groupe : un groupe simple sans involutions (bonjour Feit-Thompson !), et dont les sous-groupes propres sont abéliens. Depuis 30 ans, on ne sait pas si ça existe ; mais comme certains pensent que oui, il ne faut pas trop croire à la conjecture de Cherlin-Zilber, ni à un analogue infini de Feit-Thompson.

La récurrence échoue donc rapidement, et cela devrait vous convaincre que le rang n'est pas une bonne mesure de la petitesse ; il va falloir trouver autre chose. Mais le groupe que vous vouliez identifier, c'est PSL_2, et PSL_2 jouit d'une propriété remarquable : il est simple minimal.

Définition. Un groupe de rang de Morley fini est simple minimal s'il est simple, et que tous ses sous-groupes définissables connexes propres sont résolubles.

"Résoluble" c'est évidemment très loin de "simple" ; simple minimal, cela veut vraiment dire minimal (par inclusion et quotient) pour la simplicité. C'est donc une notion strictement groupe-théorique de petitesse. Et l'on voit que parmi les groupes algébriques, le seul qui soit simple minimal, c'est PSL_2. Cela vous suggérerait de formuler la

Conjecture simple minimale de Cherlin-Zilber. *Soit G un groupe simple minimal infini de rang de Morley fini. Alors G est isomorphe à* PSL_2 *sur un corps algébriquement clos.*

Hélas c'est précisément le cas le plus dur : les mauvais groupes, s'ils existent, sont des contre-exemples ! Et comme on ne sait rien de Feit-Thompson dans le cadre infini, il n'y a même pas de raison pour qu'un groupe simple minimal ait des involutions. La conjecture simple minimale va droit dans le mur.

Mais pour sauver les meubles, on peut se demander comment les groupes simples minimaux sans involutions s'insèrent dans un contexte plus algébrique.

Question. *Comprendre les automorphismes définissables d'un groupe simple minimal sans involutions.*

Par exemple (c'est du folklore de rang de Morley fini), un mauvais groupe n'a pas d'automorphisme définissable d'ordre 2. On aimerait aussi étudier des contre-exemples moins extrêmes.

IV Un résultat

Théorème (Burdges, Cherlin, Deloro)**.** *Soit G un groupe simple minimal de rang de Morley fini sans involutions ; On suppose que la clôture définissable de $S \simeq \mathbb{Z}_{2^\infty}$ agit définissablement et fidèlement sur G. Soit i l'involution de S. Alors $C_G^\circ(i)$ est un sous-groupe définissable, connexe, propre de G maximal pour ces propriétés.*

C'est évidemment le genre de résultat qui intéresse un théoricien des groupes (on parle du centralisateur d'une involution), et c'est typiquement une démonstration par concentration, obtenue au terme d'une longue analyse. Cela repose essentiellement sur des calculs de rang, que Nesin a empruntés à la théorie des groupes finis pour les adapter au cas de rang de Morley fini.

A partir de maintenant, "maximal" signifiera "définissable, connexe, propre, et maximal pour ces propriétés". On fixe un sous-groupe maximal $B \geq C_G^\circ(i)$ (B pour Armand **B**orel) ; on veut montrer l'égalité, on suppose donc $B > C_G^\circ(i)$. Et pour $w \in i^G$, l'on considère l'ensemble de Nesin

$$T[w] = \{b \in B : b^w = b^{-1}\}$$

Pourquoi ? analysons un peu. Si G était un vrai groupe, un groupe algébrique, ce serait PSL_2. J'emploie les lettres grecques pour l'analyse dans $\Gamma = \mathrm{PSL}_2$.

- Une involution est
$$\iota = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}$$
(L'involution est dans Γ alors qu'on a supposé G sans involutions ; poursuivons quand même l'analyse.)
- Le centralisateur est alors
$$C_\Gamma^\circ(\iota) = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \right\}$$
- On fixerait comme sous-groupe maximal, par exemple
$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} t & a \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \right\} > C_\Gamma^\circ(\iota)$$
- Soit
$$Y = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
On remarque que
$$Y = \beta' = \beta^{-\iota}$$
(cette dernière notation désigne l'ensemble inversé par ι dans β).

– Une involution de ι^Γ est

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

– On a alors

$$\tau[\omega] = C_\Gamma^\circ(\iota) \qquad \text{et} \qquad \beta = Y \rtimes \tau[\omega]$$

V L'argument de concentration

Ce que cette description montre, c'est que $\tau[\omega]$ est semi-simple, et $\beta^{-\iota}$ unipotent. Le problème est que ces notions sont géométriques, et n'ont pas de bon analogue en théorie des modèles : on ne pourra rien dire de tel de $T[w]$ et B^{-i}. En revanche ces notions sont intrinsèques, et invariantes par conjugaison ; ce dont on est sûr, c'est que $\tau[\omega]$ et $\beta^{-\iota}$ ne sont certainement pas conjugués dans Γ ; on va essayer de dire la même chose pour $T[w]$ et B^{-i}. C'est exactement ça, l'argument de concentration.

Avant de le formuler, poussons un peu plus avant l'analyse de Y.

- $\beta = Y \rtimes C_\Gamma^\circ(\iota)$
- Y est normal dans β
- Si nous prenons $\upsilon \in Y \setminus \{1\}$, alors $C_\Gamma(\upsilon) = Y$, et β est l'unique sous-groupe maximal de Γ contenant Y.
- $\iota^\beta = \iota^Y$ (il s'agit de classes de conjugaison ; $\beta = Y \rtimes C_\Gamma^\circ(\iota)$ conjugue ses involutions, mais la partie $C_\Gamma^\circ(\iota)$ ne risque pas de faire grand' chose).

Théorème (Concentration). *Soit G un groupe simple minimal de rang de Morley fini, avec ou sans involutions. Soit i un automorphisme définissable de G d'ordre 2 (intérieur, c'est-à-dire $i \in G$, ou non). Soit $B \geq C_G^\circ(i)$ un sous-groupe maximal, et l'on suppose $B > C_G^\circ(i)$.*

On suppose qu'il existe un sous-ensemble définissable $K \subseteq B$ tel que :

- $\operatorname{rg} B \geq \operatorname{rg} K + \operatorname{rg} C_G^\circ(i)$
- $N_G(B) = N_G(K)$
- *pour $k \in K \setminus \{1\}$, B est l'unique sous-groupe maximal contenant $C_G^\circ(k)$.*
- *les éléments de $i^G \cap N_{G\cdot\langle i\rangle}(B)$ sont K-conjugués.*
  (Remarque : il faut prendre le normalisateur dans $G \cdot \langle i \rangle$, car peut-être que i est au-dehors de G.)

Soit $\Theta = \{\theta[w] : w \in i^G\}$ une famille uniformément définssable, indexée par i^G, de sous-ensembles de B tels que chaque $w \in i^G$ normalise $\theta[w]$.

Alors il est faux que : pour w générique dans i^G, $\theta[w]$ est G-conjugué à K.

Cela correspond bien à la dichotomie semi-simple/unipotent observée dans PSL_2, et l'on peut espérer l'employer, avec bien sûr $\theta[w] = T[w]$.

Démonstration. La démonstration se fait par de simples calculs de rang : tout est dans les hypotèses. □

VI Application

Le théorème était le suivant.

Théorème. *Soit G un groupe simple minimal de rang de Morley fini sans involutions ; On suppose que la clôture définissable de $S \simeq \mathbb{Z}_{2^\infty}$ agit définissablement et fidèlement sur G. Soit i l'involution de S. Alors $C_G^\circ(i)$ est un sous-groupe définissable, connexe, propre de G maximal pour ces propriétés.*

Démonstration. On fixe donc un sous-groupe maximal $B \geq C_G^\circ(i)$, et l'on suppose $B > C_G^\circ(i)$; on note, pour $w \in i^G$, $T[w] = \{b \in B : b^w = b^{-1}\}$.

Je démontrerai le théorème sous une hypothèse supplémentaire, à savoir que l'intersection de deux sous-groupes maximaux distincts est toujours abélienne.

Si vous êtes savant en géométrie, cela ne vous étonne guère : mes maximaux, ici, sont des sous-groupes de Borel ; et dans PSL_2, les Borels se coupent sur des tores. En revanche, si vous avez suivi les derniers développements des groupes de rang de Morley fini, il y a de quoi hurler : cette hypothèse n'a aucun bien-fondé, et Burdges a même écrit un article monstrueux décrivant les non moins monstrueuses intersections non-abéliennes !

Nous faisons quand même cette hypothèse, qui est l'un des cas où l'on concentre ; il y a un autre cas plus technique, mais qui repose exactement sur la même contradiction.

Etape 1 (technique)**.** *B est normalisé par S.*

Etape 2. *$T[w]$ est un groupe abélien, et pour w générique,* $\mathrm{rg}\, T[w] \geq \mathrm{rg}\, B^{-i}$.

Vérification: C'est à-peu-près évident : génériquement, B^w est un autre sous-groupe maximal, donc l'intersection $B \cap B^w$ est abélienne. Comme $T[w]$ est dedans, ses éléments commutent deux-à-deux ; il suffit de relire la définition pour s'assurer que c'est un groupe ! Le calcul de rang est immédiat, en regardant la projection canonique $i^G \to G/B$. $\diamondsuit$

Soit $Q = N_B^\circ(T[w])$.

L'idée derrière cet objet n'est pas extravagante : on voudrait attraper un groupe semi-simple, disons un tore algébrique. Le normalisateur est censé capturer toute la clôture de Zariski de $T[w]$.

Etape 3 (folklore, sans difficulté)**.** *Q est abélien et $N_B^\circ(Q) = Q$.*

Q est ce qu'on appelle un sous-groupe de Carter de B. L'intérêt de cette remarque est de disposer d'un argument de Frattini. Un argument de Frattini est une façon d'obtenir de l'invariance, en théorie des groupes ; c'est généralement le résultat d'un théorème de conjugaison. Et précisément, on sait que les sous-groupes de Carter d'un groupe résoluble sont conjugués.

Notamment, par cet argument de Frattini, comme S normalise B et que Q en est un sous-groupe de Carter, on peut supposer que S normalise Q (utilisation typique). On pose alors $K = Q^{-i}$.

Etape 4. *$B = K \rtimes C_G^\circ(i)$ et $\mathrm{rg}\, K = \mathrm{rg}\, T[w]$*

Vérification: Pas de difficulté, on joue avec des involutions. $\diamondsuit$

Etape 5. *Si $k \in K \setminus \{1\}$, alors B est le seul sous-groupe maximal de G contenant $C_G^\circ(k)$.*

Vérification: C'est une démonstration de deux lignes, mais qui utilise un outil un peu technique (l'unipotence de Burdges). $\diamondsuit$

Il est clair que tout est en place pour la concentration ; on va donc atteindre une contradiction en conjuguant $T[w]$ à K.

Etape 6 (astucieux)**.** *Q est un sous-groupe de Carter de $C_G^\circ(T[w])$.*

Ces étapes étant démontrées, nous pouvons concentrer et terminer la démonstration du théorème du jour.

Comme Q est un sous-groupe de Carter de $C_G^\circ(T[w])$ et que ce dernier est w-invariant, on trouve par un argument de Frattini une involution w' conjuguée à w par $C_G^\circ(T[w])$ et qui normalise Q. En particulier, w' et w ont la même action sur $T[w]$; comme w l'inverse (par définition), w' aussi. On en déduit $T[w'] \geq T[w]$, et comme on connaît les rangs, on a même $T[w'] = T[w]$.

Mais i aussi normalise Q. Les deux involutions i et w' sont donc toutes les deux dans $N(Q)$; elles y sont conjuguées. Donc il y a $g \in N(Q)$ tel que $w' = i^g$. Mais alors

$$T[w] = T[w'] = Q^{-w'} = Q^{-(i^g)} = (Q^{-i})^g = K^g$$

ce qui contredit l'argument de concentration ! $\square$